逆写像定理

平成 20 年 12 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html
“The inverse, the obverse, the converse, the reverse,” The Velvet Underground

バナッハ空間に於ける逆写像の存在定理に就いて纏めて置こう。先ず完備距離空間の**開球**に於ける縮小写像の不動点の存在に就いて考える。

定理１　(X,d) を (空でない) 完備距離空間とし $x_0 \in X,\ \rho > 0$ に対し

$$B_\rho(x_0) = \{x \in X; d(x, x_0) < \rho\}$$

を中心 x_0 で半径 ρ の開球とする。写像 $f : B_\rho(x_0) \to X$ は次の仮定を満たすものとする。

(i) $0 < k < 1$ なる k が存在し任意の $x, y \in B_\rho(x_0)$ に対し不等式

$$d(f(x), f(y)) \le kd(x, y)$$

が成立つ。

(ii) $d(f(x_0), x_0) < (1-k)\rho$

このとき f は $B_\rho(x_0)$ に唯一つの不動点を持つ。

(証明)　$x_0 \in X$ に対し $x_1 = f(x_0),\ x_{n+1} = f(x_n),\ n \ge 1$ と置いて点列 $\{x_n\}$ を定める。仮定 (ii) より $d(f(x_0), x_0) < (1-k)\rho_0 < (1-k)\rho$ なる $\rho_0 > 0$ を取る。点列 $\{x_n\}$ は閉球 $\overline{B_{\rho_0}(x_0)} = \{x \in X; d(x, x_0) \le \rho_0\}$ に於けるコーシー列を成す事を示そう。

任意の $\boldsymbol{n}$ に対し $\boldsymbol{x_n \in \overline{B_{\rho_0}(x_0)}}$ なる事：　$d(x_1, x_0) = d(f(x_0), x_0) < (1-k)\rho_0 < \rho_0$ より $x_1 \in \overline{B_{\rho_0}(x_0)}$ となる。$n \ge 2$ とし、$1 \le j \le n-1$ なる任意の j に対し $x_j \in \overline{B_{\rho_0}(x_0)}$ となる事を仮定し $x_n \in \overline{B_{\rho_0}(x_0)}$ を導こう。$1 \le j \le n$ に対し (i) より

$$\begin{aligned} d(x_j, x_{j-1}) &= d(f(x_{j-1}), f(x_{j-2})) \\ &\le kd(x_{j-1}, x_{j-2}) \\ \cdots &\le k^{j-1} d(x_1, x_0) = k^{j-1} d(f(x_0), x_0) \end{aligned}$$

となる。従って三角不等式より

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_0) &\leq \sum_{j=1}^{n} d(x_j, x_{j-1}) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} k^{j-1} d(f(x_0), x_0) \\
&\leq \frac{1}{1-k} d(f(x_0), x_0) \leq \rho_0
\end{aligned}
$$

となり帰納法が完結する。

$\{x_n\}$ は $\overline{B_{\rho_0}(x_0)}$ のコーシー列である事：　上の不等式より $m > n$ に対し

$$
\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq \sum_{j=n+1}^{m} d(x_j, x_{j-1}) \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{m} k^{j-1} d(x_1, x_0) = \frac{k^n - k^m}{1-k} d(x_1, x_0)
\end{aligned}
$$

となるので $\{x_n\}$ はコーシー列である。

$\overline{B_{\rho_0}(x_0)}$ に於ける f の不動点の存在：　$\{x_n\}$ は完備距離空間のコーシー列であるから収束する。その極限点を x と表す。$\overline{B_{\rho_0}(x_0)}$ は閉集合であるから $x \in \overline{B_{\rho_0}(x_0)}$ となる。

$$
\begin{aligned}
d(f(x), x) &\leq d(f(x), x_n) + d(x_n, x) \\
&= d(f(x), f(x_{n-1})) + d(x_n, x) \\
&\leq k d(x, x_{n-1}) + d(x_n, x) \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

より $f(x) = x$ が従う。

$B_\rho(x_0)$ に於ける f の不動点の一意性：　$x, y \in B_\rho(x_0)$ を f の不動点とすると

$$
0 \leq d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)
$$

となる。これより

$$
0 \leq (1-k) d(x, y) \leq 0
$$

を得るので $x = y$ となる。

定理２　X をバナッハ空間とし $B_\rho(0)$ を X の原点を中心とする半径 $\rho > 0$ の開球とする：

$$
B_\rho(0) = \{x \in X; \|x\| < \rho\}
$$

$g : B_\rho(0) \to X$ を縮小定数 $k \in (0,1)$ を持つ縮小写像で $g(0) = 0$ なる写像とする。このとき $x \in B_\rho(0)$ に対し $f(x) = x + g(x)$ と置いて定まる写像 $f : B_\rho(0) \to X$ は次の性質を持つ。

(1) $f(0)=0, \quad B_{(1-k)\rho}(0)\subset f(B_\rho(0))$

(2) $f:B_\rho(0)\to f(B_\rho(0))$ は全単射

(3) $f^{-1}:f(B_\rho(0))\to B_\rho(0)$ はリプシッツ定数 $1/(1-k)$ を持つリプシッツ写像

(証明) $y\in B_{(1-k)\rho}(0)$ に対し $h_y:B_\rho(0)\to X$ を $h_y(x)=y-g(x),\ x\in B_\rho(0)$ で定める。このとき

$$
\begin{aligned}
&\|h_y(x')-h_y(x'')\|=\|g(x')-g(x'')\|\le k\|x'-x''\|\\
&\|h_y(0)-0\|=\|h_y(0)\|=\|y\|<(1-k)\rho
\end{aligned}
$$

であるから h_y は $x_0=0$ として定理１の仮定を満たす。よって h_y は $B_\rho(0)$ に唯一つの不動点を持つ：$h_y(x)=x$

これは $y-g(x)=x$ 及び $y=x+g(x)=f(x)$ と同値である。これより (1) を得る。

次に f の単射性を示そう。$y\in f(B_\rho(0))$ に対し $x',x''\in B_\rho(0)$ が在って $y=f(x')=f(x'')$ となっているとする。このとき $x'+g(x')=x''+g(x'')$ であるから $x'-x''=g(x'')-g(x')$ が従う。g は縮小写像であるから

$$
\|x'-x''\|=\|g(x')-g(x'')\|\le k\|x'-x''\|
$$

となり $x'=x''$ が従う。これより (2) を得る。

最後に (3) を示そう。$y',y''\in f(B_\rho(0))$ に対し $f(x')=y',\ f(x'')=y''$ なる $x',\ x''\in B_\rho(0)$ が一意性に存在する。このとき

$$
\begin{aligned}
\|x'-x''\| &= \|y'-y''-(g(x')-g(x''))\|\\
&\le \|y'-y''\|+\|g(x')-g(x'')\|\\
&\le \|y'-y''\|+k\|x'-x''\|
\end{aligned}
$$

これより

$$
\|x'-x''\|\le\frac{1}{1-k}\|y'-y''\|
$$

即ち

$$
\|f^{-1}(y')-f^{-1}(y'')\|\le\frac{1}{1-k}\|y'-y''\|
$$

を得る。

定理３ X,Y をバナッハ空間とする。$U\subset X$ を点 x_0 を含む開集合で写像 $f:U\to Y$ は次の条件を満たすものとする。

(i) $f:U\to Y$ は C^1 写像である。

(ii) $f'(x_0)\in B(X;Y)$ は有界な逆を持つ：$(f'(x_0))^{-1}\in B(Y;X)$

このとき $\rho>0$ が在って次が成立つ。

(1) $f(B_\rho(x_0))$ は $f(x_0)$ を含む Y の開集合

(2) $f : B_\rho(x_0) \to f(B_\rho(x_0))$ は全単射

(3) $f^{-1} : f(B_\rho(x_0)) \to B_\rho(x_0)$ は連続

(4) $f^{-1} : f(B_\rho(x_0)) \to X$ は C^1 写像であり任意の $x \in B(x_0;\rho)$ に対し

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1}$$

注. 開写像定理により (ii) では「$f'(x_0) \in B(X;Y)$ は全単射である」とすれば充分。

(証明) $\overline{B_r(x_0)} \subset U$ なる $r > 0$ を取る。$x \in B_r(0)$ に対し

$$g(x) = (f'(x_0))^{-1}(f(x_0+x) - f(x_0)) - x$$

と置いて $g : B_r(0) \to X$ を定める。定義より $g(0) = 0$ であり

$$g'(x) = (f'(x_0))^{-1} f'(x_0+x) - I, \quad x \in B_r(0)$$

となる。これより $g' : B_r(0) \to B(X;Y)$ の連続性が従う。$g'(0) = 0$ であるから $0 < k < 1$ なる任意の k に対し $0 < \rho < r$ なる ρ が在って

$$\sup\{\|g'(x)\|; x \in B_\rho(0)\} \le k$$

とする事が出来る。このとき任意の $x, y \in B_\rho(0)$ に対し

$$\begin{aligned}\|g(x) - g(y)\| &= \|\int_0^1 g'(tx+(1-t)y)dt(x-y)\| \\ &\le \left(\sup_{0\le t\le 1}\|g'(tx+(1-t)y)\|\right)\|x-y\| \le k\|x-y\|\end{aligned}$$

となる。以上より $g : B_\rho(0) \to X$ は定理２の仮定を満たす。よって $F(x) = x + g(x)$ として得られる写像

$$F : B_\rho(0) \ni x \mapsto (f'(x_0))^{-1}(f(x_0+x) - f(x_0)) \in X$$

に対し次が成立つ。

(1) $F(0) = 0, \quad B_{(1-k)\rho}(0) \subset F(B_\rho(0))$

(2) $F : B_\rho(0) \to F(B_\rho(0))$ は全単射

(3) $F^{-1} : F(B_\rho(0)) \to B_\rho(0)$ はリプシッツ定数 $1/(1-k)$ を持つリプシッツ写像

このとき $x \in B_\rho(x_0)$ に対し $x - x_0 \in B_\rho(0)$ であり $\xi = x - x_0$ と置くと

$$F(\xi) = (f'(x_0))^{-1}(f(x_0+\xi) - f(x_0))$$
$$\Longleftrightarrow \xi = F^{-1}((f'(x_0))^{-1}(f(x_0+\xi) - f(x_0))$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \xi \in B_\rho(0) &\Longleftrightarrow F(\xi) \in F(B_\rho(0)) \\ &\Longleftrightarrow (f'(x_0))^{-1}(f(x_0+\xi) - f(x_0)) \in F(B_\rho(0)) \end{aligned}$$

なる関係に注意する。さて $x = x_0 + \xi$ であるから

$$\xi = F^{-1}((f'(x_0))^{-1}(f(x_0+\xi) - f(x_0)))$$
$$\Longleftrightarrow x = x_0 + F^{-1}((f'(x_0))^{-1}(f(x_0+\xi) - f(x_0)))$$

となる。よって $f : B_\rho(x_0) \to Y$ の逆写像は $f(x_0)$ を含む Y の開集合

$$f(B_\rho(x_0)) = f(x_0 + B_\rho(0)) = f(x_0) + f'(x_0)(F(B_\rho(0)))$$

の上で定義される写像

$$y \mapsto x_0 + F^{-1}((f'(x_0))^{-1}(y - f(x_0)))$$

である。この写像は連続写像の合成として連続である。

最後に (4) を示す事が残っている。先ず任意の $x \in B_\rho(x_0)$ に対し $f'(x) \in B(X;Y)$ は有界な逆を持つ事を示そう。$\rho > 0$ の定め方により

$$\|I - (f'(x_0))^{-1}f'(x)\| \leq k$$

であるからノイマン級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(I-(f'(x_0))^{-1}f'(x))^n$ は $B(X)$ で収束し $I-(I-(f'(x_0))^{-1}f'(x)) \in B(X)$ の有界な逆 $(I-(I-(f'(x_0))^{-1}f'(x)))^{-1}$ に等しい。即ち $((f'(x_0))^{-1}f'(x))^{-1} \in B(X)$ が定まる。このとき定義により

$$((f'(x_0))^{-1}f'(x))^{-1}(f'(x_0))^{-1}f'(x) = I_X,$$
$$(f'(x_0))^{-1}f'(x)((f'(x_0))^{-1}f'(x))^{-1} = I_Y$$

となる。最後の等式の両辺の左から $f'(x_0)$ を作用させ右から $(f'(x_0))^{-1}$ を作用させると

$$f'(x)((f'(x_0))^{-1}f'(x))^{-1}(f'(x_0))^{-1} = I_Y$$

となるので結局

$$(f'(x))^{-1} = ((f'(x_0))^{-1}f'(x))^{-1}(f'(x_0))^{-1}$$

が $B(Y;X)$ の元として定まる。

さて $y', y'' \in f(B_\rho(x_0))$ に対し $x' = f^{-1}(y'),\ x'' = f^{-1}(y'')$ が $B_\rho(x_0)$ 内に存在する。このとき

$$\begin{aligned} &f^{-1}(y') - f^{-1}(y'') - (f'(x''))^{-1}(y' - y'') \\ &= (f'(x''))^{-1}((f'(x''))(x' - x'') - (y' - y'')) \\ &= -(f'(x''))^{-1}(f(x') - f(x'') - f'(x'')(x' - x'')) \end{aligned}$$

となるので

$$
\begin{aligned}
&\|f^{-1}(y')-f^{-1}(y'')-(f'(x''))^{-1}(y'-y'')\\
&\le \|(f'(x''))^{-1}\|\|f(x')-f(x'')-f'(x'')(x'-x'')\|
\end{aligned}
$$

となる。さて f の逆写像は

$$
f^{-1}(y)=x_0+F^{-1}((f'(x_0))^{-1}(y-f(x_0)))
$$

で与えられ、F^{-1} はリプシッツ定数 $1/(1-k)$ を持つリプシッツ写像であるから

$$
\begin{aligned}
\|x'-x''\| &= \|f^{-1}(y')-f^{-1}(y'')\|\\
&= \|F^{-1}((f'(x_0))^{-1}(y'-f(x_0)))-F^{-1}((f'(x_0))^{-1}(y''-f(x_0)))\|\\
&\le \frac{1}{1-k}\|(f'(x_0))^{-1}(y'-f(x_0))-(f'(x_0))^{-1}(y''-f(x_0))\|\\
&= \frac{1}{1-k}\|(f'(x_0))^{-1}(y'-y'')\|\\
&\le \frac{1}{1-k}\|(f'(x_0))^{-1}\|\|y'-y''\|
\end{aligned}
$$

以上より

$$
\begin{aligned}
&\frac{\|f^{-1}(y')-f^{-1}(y'')-(f'(x''))^{-1}(y'-y'')\|}{\|y'-y''\|}\\
&\le \frac{1}{1-k}\|(f'(x_0))^{-1}\|\|(f'(x''))^{-1}\|\frac{\|f(x')-f(x'')-f'(x'')(x'-x'')\|}{\|x'-x''\|}
\end{aligned}
$$

であり右辺は f の x'' に於ける微分可能性より $\|x'-x''\|\to 0$ なるとき 0 に収束する。f と f^{-1} の連続性より $\|x'-x''\|\to 0$ と $\|y'-y''\|\to 0$ とは同値であり最後の不等式から f^{-1} の y'' に於ける微分可能性が従い、その微分係数 $(f^{-1})'(y'')$ は $(f'(x''))^{-1}$ であるから等式

$$
(f^{-1})'(y'')=(f'(x''))^{-1}
$$

が成立つ事が分かる。

参考文献： ディュドネ，現代解析の基礎，東京図書
S. Lang, *Analysis I, II*, Addison-Wesley