二次無理函数の原始函数

平成 24 年 7 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

実二変数の有理函数 $R:(x,y)\mapsto R(x,y)$ 及び二次函数 $x\mapsto ax^2+bx+c(a\neq 0)$ の平方根 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ の合成函数として $x\mapsto R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ の形で表される函数を**二次無理函数**と謂う。ここではその原始函数の基本的事項及び関連する幾つかの幾何学的視点に就いて纏めて置こう。

1. 有理函数の積分への帰着

先ず二次函数を平方完成し

$$y^2=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

の形に書いて置く。

(1) $a<0,\ b^2-4ac\leq 0$ の場合

このとき $y^2=ax^2+bx+c\leq 0$ より $y\in\mathbb{R}$ となるのは $y=0$ に限られるので、この場合は以下では除外して考える。

(2) $a<0,\ b^2-4ac>0$ の場合

$t=\sqrt{-a}x+\frac{b}{2\sqrt{-a}},\ k=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{-4a}}=\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}$ と置くと $k>0$ であり $y=\sqrt{k^2-t^2},\ dt=\sqrt{-a}dx$ となるので

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int R\left(\frac{t}{\sqrt{-a}}+\frac{b}{2a},\sqrt{k^2-t^2}\right)dt$$

と表される。

(3) $a>0,\ b^2-4ac\leq 0$ の場合

$t=\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}},\ k=\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}$ と置くと $k\geq 0$ であり $y=\sqrt{t^2+k^2},\ dt=\sqrt{a}dx$ となるので

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\int R\left(\frac{t}{\sqrt{a}}-\frac{b}{2a},\sqrt{t^2+k^2}\right)dt$$

と表される。$k=0$ 即ち $b^2=4ac$ の場合は右辺は t の有理函数の原始函数であるから以下では除外して考える。

(4) $a>0,\ b^2-4ac>0$ の場合

$t=\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}},\ k=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}$ と置くと $k>0$ であり $y=\sqrt{t^2-k^2},\ dt=\sqrt{a}dx$ となるので

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\int R\left(\frac{t}{\sqrt{a}}-\frac{b}{2a},\sqrt{t^2-k^2}\right)dt$$

と表される。

上に現れた t 変数を再び x 変数に書き換え

$$\tilde{R}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\ R\left(\frac{x}{\sqrt{|a|}}-\frac{b}{2|a|},\ y\right)$$

と置くと $\tilde{R}$ は (x,y) の有理函数となり、平方根に相当する y 変数は定数 $k>0$ によって

I. $\sqrt{k^2-x^2}$

II. $\sqrt{x^2+k^2}$

III. $\sqrt{x^2-k^2}$

の何れかの形を取り、それに応じて二次無理函数の原始函数は

I. $\int\tilde{R}\ (x,\sqrt{k^2-x^2})dx$

II. $\int\tilde{R}\ (x,\sqrt{x^2+k^2})dx$

III. $\int\tilde{R}\ (x,\sqrt{x^2-k^2})dx$

の形を取る。以下、簡単の為 $\tilde{R}$ を再び R と表す事にする。

I. $\int R(x,\sqrt{k^2-x^2})dx$ の場合

$x=k\frac{1-t^2}{1+t^2}$ と変換すると

$$y=\sqrt{k^2-x^2}=k\sqrt{1-\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}=\pm\frac{2kt}{1+t^2}\ (\pm t>0)$$
$$\frac{dx}{dt}=k\left(\frac{-2t}{1+t^2}-\frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\right)=-\frac{4kt}{(1+t^2)^2}$$

となるので

$$\int R(x,\sqrt{k^2-x^2})dx=\int R\left(k\frac{1-t^2}{1+t^2},\pm\frac{2kt}{1+t^2}\right)\frac{-4kt}{(1+t^2)^2}dt$$

と表され有理函数の原始函数に帰着される。

II. $\int R(x,\sqrt{x^2+k^2})dx$ の場合

$x = k\frac{1-t^2}{2t}$ と変換すると

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{x^2+k^2} = k\sqrt{\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^2+1} = \pm\,\frac{1+t^2}{2t}\ (\pm t > 0) \\
\frac{dx}{dt} &= k\left(-\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{-k(1+t^2)}{2t^2}
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\int R(x,\sqrt{x^2+k^2})dx = \int R\left(k\frac{1-t^2}{2t}, \pm k\frac{1+t^2}{2t}\right)\frac{-k(1+t^2)}{2t^2}dt
$$

と表され、有理函数の原始函数に帰着される。

III. $\int R(x,\sqrt{x^2-k^2})dx$ の場合

$x = k\frac{1+t^2}{2t}$ と変換すると

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{x^2-k^2} = k\sqrt{\left(\frac{1+t^2}{2t}\right)^2-1} = \begin{cases} \frac{t^2-1}{2t}\ (t>1 \text{ または } -1<t<0) \\ \\ -k\frac{t^2-1}{2t}\ (0<t<1 \text{ または } t<-1) \end{cases} \\
\frac{dx}{dt} &= k\left(-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{-k(1-t^2)}{2t^2}
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\int R(x,\sqrt{x^2-k^2})dx = \int R\left(k\frac{1+t^2}{2t}, \pm k\frac{t^2-1}{2t}\right)\frac{-k(1+t^2)}{2t^2}dt
$$

と表され、有理函数の原始函数に帰着される。

2. 具体例

I. $\int R(x,\sqrt{k^2-x^2})dx$ の場合

例 1

$$
\int \frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\frac{x}{k}
$$

変数変換や逆三角函数に伴う不定性を回避する為に原始函数を不定積分の形で表示しよう。以下では $0 \leq x < k$ とする。積分変数を $\xi \in [0,x]$ と表し、変数変換を $\xi = k\frac{1-t^2}{1+t^2}$ で与えられるものとすれば

$$
\xi(1+t^2) = k(1-t^2) \ \Leftrightarrow\ (\xi+k)t^2 = k-\xi \ \Leftrightarrow\ t = \pm\sqrt{\frac{k-\xi}{k+\xi}}
$$

であるが $\xi = 0 \Leftrightarrow t = 1$ と取ると ξ が 0 から x 迄増加する時 t は 1 から $\sqrt{\frac{k-x}{k+x}}$ 迄減少し、負の値を取らないので $t = \sqrt{\frac{k-\xi}{k+\xi}}$ であり

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{k^2-\xi^2}}d\xi &= \int_1^{\sqrt{\frac{k-x}{k+x}}} \frac{1+t^2}{2kt}\frac{-4kt}{(1+t^2)^2}dt = \int_{\sqrt{\frac{k-x}{k+x}}}^1 \frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \left[2\tan^{-1}t\right]_{\sqrt{\frac{k-x}{k+x}}}^1 = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{k-x}{k+x}}\end{aligned}$$

となる。さて

$$-2\tan^{-1}t = y \;\Leftrightarrow\; t = \tan(-\frac{y}{2}) = \frac{-\sin(\frac{y}{2})}{\cos(\frac{y}{2})}$$

であるので

$$\begin{aligned}t^2\cos^2\frac{y}{2} = \sin^2\frac{y}{2} \;&\Leftrightarrow\; t^2(1-\sin^2\frac{y}{2}) = \sin^2\frac{y}{2} \\ &\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}(1-\cos y) = \sin^2\frac{y}{2} = \frac{t^2}{t^2+1} = \frac{\frac{k-x}{k+x}}{\frac{k-x}{k+x}+1} = \frac{k-x}{2k} \\ &\Leftrightarrow\; \cos y = \frac{x}{k} \\ &\Leftrightarrow\; \sin^{-1}\frac{x}{k} = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\frac{x}{k} = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}t\end{aligned}$$

となり上記の結論が従う。

例 2

$$\int \sqrt{k^2-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{k^2-x^2} + \frac{1}{2}k^2\sin^{-1}\frac{x}{k}$$

例 1 と同様に計算し

$$\int_0^x \sqrt{k^2-\xi^2}d\xi = \int_1^{\sqrt{\frac{k-x}{k+x}}} \frac{2kt}{1+t^2}\frac{-4kt}{(1+t^2)^2}dt = \int_{\sqrt{\frac{k-x}{k+x}}}^1 \frac{8k^2t^2}{(1+t^2)^3}dt$$

を得る。被積分函数に現れる有理函数に就いては

$$\frac{8t^2}{(1+t^2)^3} = t\frac{d}{dt}\left(-\frac{2}{(1+t^2)^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{(1+t^2)^2}\right) + \frac{2}{(1+t^2)^2}$$

及び

$$\begin{aligned}\frac{2}{(1+t^2)^2} &= \frac{2(1+t^2)-2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{2}{1+t^2} - t\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^2} \\ &= \frac{2}{1+t^2} + t\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) \\ &= \frac{2}{1+t^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{1+t^2}\right) - \frac{1}{1+t^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{1+t^2}\right) + \frac{1}{1+t^2}\end{aligned}$$

より

$$\frac{8t^2}{(1+t^2)^3} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{2t}{(1+t^2)^2} + \frac{t}{1+t^2}\right) + \frac{1}{1+t^2}$$

を得るので $\sqrt{k^2-x^2}$ の原始函数の一つは

$$\frac{2t}{(1+t^2)^2} - \frac{t}{1+t^2} + \left(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} t\right)$$

で与えられる事が分る。t 変数を x 変数に戻すと

$$\begin{aligned}\frac{2t}{(1+t^2)^2} - \frac{t}{1+t^2} &= \frac{2t - t(1+t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{-t^3+t}{(1+t^2)^2} = -\frac{t(t^2-1)}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{-\sqrt{\frac{k-x}{k+x}}\left(\frac{k-x}{k+x}-1\right)}{\left(\frac{k-x}{k+x}+1\right)^2} = \sqrt{\frac{k-x}{k+x}}\frac{\frac{2x}{k+x}}{\left(\frac{2k}{k+x}\right)^2} = \frac{x}{2k^2}\sqrt{k^2-x^2},\end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} t = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{x}{k}$$

となるので上記の結論を得る。次の方法はもう少し簡単である。

$$\begin{aligned}\int \sqrt{k^2-x^2}dx &= \int \frac{k^2-x^2}{\sqrt{k^2-x^2}}dx = k^2\int\frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}}dx - \int x\cdot\frac{x}{\sqrt{k^2-x^2}}dx \\ &= k^2\int\frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}}dx + \int x\frac{d}{dx}(\sqrt{k^2-x^2})dx \\ &= k^2\int\frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}}dx + \int\left(\frac{d}{dx}(x\sqrt{k^2-x^2}) - \sqrt{k^2-x^2}\right)dx\end{aligned}$$

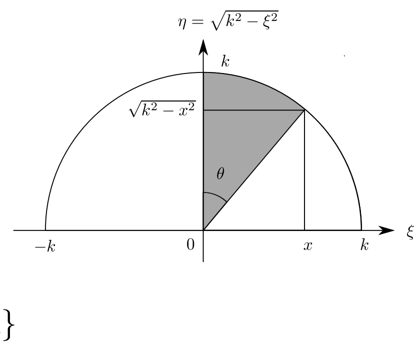
より

$$\int\sqrt{k^2-x^2}dx = \frac{k^2}{2}\int\frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}}dx + \frac{1}{2}x\sqrt{k^2-x^2}$$

を得るので例 1 より上記の結論を得る。

例 2 の幾何学的意味

$$\int_0^x \sqrt{k^2-\xi^2}d\xi = \frac{1}{2}x\sqrt{k^2-x^2} + \frac{1}{2}k^2\sin^{-1}\frac{x}{k}$$



の幾何学的意味を右図を用いて考えよう。

$\xi\eta$ 平面 $\mathbb{R}^2$ 内で、三つの直線

$$\{(0,\eta);\eta\in\mathbb{R}\}, \{(x,\eta);\eta\in\mathbb{R}\}, \{(\xi,0);\xi\in\mathbb{R}\}$$

及び一つの曲線

$$\{(\xi,\eta);\xi^2+\eta^2=k^2\}$$

で囲まれた図形の面積は左辺 $\int_0^x \sqrt{k^2-\xi^2}d\xi$ で与えられるので、原点 $(0,0)$ を中心とする半径 k, 中心角 $\theta = \sin^{-1}\frac{x}{k}$ とする扇形の面積 S は、そこから三点 $(0,0),(0,x),(x,\sqrt{k^2-x^2})$ を頂点とする三角形の面積 $\frac{1}{2}x\sqrt{k^2-x^2}$ を引いたもの、即ち $S=\frac{1}{2}k^2\sin^{-1}\frac{x}{k}=\frac{1}{2}k^2\theta$ となる。また

$$S=\frac{1}{2}k^2\sin^{-1}\frac{x}{k} \;\Leftrightarrow\; x=k\sin\frac{2S}{k^2}$$

となるので、半径 k の円と二つの線分（但し $x,y>0$ とする）

$$\{(0,\eta);0\le\eta\le k\},\{(t,\frac{y}{x}t);0\le t\le x\}$$

で囲まれた図形の面積が S であれば $x=k\sin\frac{2S}{k^2}, y=k\cos\frac{2S}{k^2}$ である事が分かる。

II. $\int R(x,\sqrt{x^2+k^2})dx$ の場合

例 3

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+k^2}}dx=\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2+k^2}}{k}\right)=\sinh^{-1}\frac{x}{k}$$

$x>0$ とし、積分変数を $\xi\in[0,x]$ と表し、変数変換を $\xi=k\frac{1-t^2}{2t}$ で与えられるものとすれば

$$\frac{2\xi}{k}t=k(1-t^2) \;\Leftrightarrow\; \left(t-\frac{\xi}{k}\right)^2=\frac{\xi^2+k^2}{k^2} \;\Leftrightarrow\; t=\frac{\xi\pm\sqrt{\xi^2+k^2}}{k}$$

であるが $\xi=0\Leftrightarrow t=1$ と取ると ξ が 0 から x 迄増加する時 t は 1 から $\frac{x+\sqrt{x^2+k^2}}{k}$ 迄減少し負の値を取らないので $t=\frac{\xi+\sqrt{\xi^2+k^2}}{k}$ であり

$$kdt=\left(1+\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+k^2}}\right)d\xi=\frac{\sqrt{\xi^2+k^2}+\xi}{\sqrt{\xi^2+k^2}}d\xi=\frac{kt}{\sqrt{\xi^2+k^2}}d\xi$$

となるので

$$\int_0^x\frac{1}{\sqrt{\xi^2+k^2}}d\xi=\int_1^{\frac{x+\sqrt{x^2+k^2}}{k}}\frac{1}{t}dt=\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2+k^2}}{k}\right)$$

を得る。また

$$\begin{aligned}\frac{x}{k}=\sinh y \;&\Leftrightarrow\; \frac{2x}{k}=e^y-e^{-y} \;\Leftrightarrow\; (e^y)^2-\frac{2x}{k}e^y=1\\ &\Leftrightarrow\; \left(e^y-\frac{x}{k}\right)^2=\frac{x^2+k^2}{k^2} \;\Leftrightarrow\; e^y=\frac{x\pm\sqrt{x^2+k^2}}{k}\end{aligned}$$

であるが

$$\frac{x-\sqrt{x^2+k^2}}{k}=\frac{-k}{x+\sqrt{x^2+k^2}}<0$$

であり $e^y>0$ なので $e^y=\frac{x+\sqrt{x^2+k^2}}{k}$ 即ち $\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2+k^2}}{k}\right)=y=\sinh^{-1}\frac{x}{k}$ が従う。

例 1 と例 3 との関係

複素函数論の立場では例 1 と例 3 とは同値と考えられる。その事情を説明しよう。その為に例 1 と例 3 の等式を

$$\sin\left(\int_0^x \frac{1}{\sqrt{k^2-\xi^2}}d\xi\right) = \frac{x}{k} = \sinh\left(\int_0^x \frac{1}{\sqrt{k^2+\xi^2}}d\xi\right)$$

と表して置こう。複素平面 $\mathbb{C}$ 内の領域 $D_\pm$ を

$$D_+ = \mathbb{C}\setminus[k,\infty),\ D_- = \mathbb{C}\setminus(-\infty,-k]$$

と定義する。函数

$$D_\pm \ni z \longmapsto \int_0^z \frac{1}{\sqrt{k^2\mp\zeta^2}}d\zeta \in \mathbb{C}$$

は正則である。ここに平方根は実軸で実数値を取る主値であるとし、積分は原点 0 から $z \in D_\pm$ への有向線分上の複素積分であるとする。よって上の等式は一致の定理により $D_+ \cap D_-$ 上で成立する。さて $|x| < k$ なる $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$\int_0^{ix} \frac{1}{\sqrt{k^2\mp\zeta^2}}d\zeta = i\int_0^x \frac{1}{\sqrt{k^2\pm\xi^2}}d\xi$$

となり、一方任意の $x \in \mathbb{C}$ に対し $\sinh(ix) = i\sin x, \sin(ix) = i\sinh x$ であるから例 1 と例 3 との同値性が従う。

例 4
$$\int\sqrt{x^2+k^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+k^2} + \frac{1}{2}k^2\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2+k^2}}{k}\right)$$

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2+k^2}dx &= \int\frac{x^2+k^2}{\sqrt{x^2+k^2}}dx \\ &= \int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+k^2}}dx + k^2\int\frac{1}{\sqrt{x^2+k^2}}dx\end{aligned}$$

と表し、最後の等式の右辺の第一項に於いて

$$x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+k^2}} = x\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+k^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x^2+k^2}\right) - \sqrt{x^2+k^2}$$

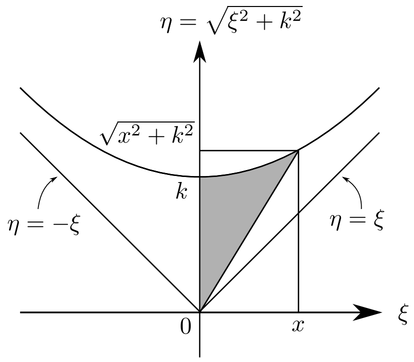
である事を用いると

$$\int\sqrt{x^2+k^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+k^2} + \frac{1}{2}k^2\int\frac{1}{\sqrt{x^2+k^2}}dx$$

を得るので例 3 より上記の結論を得る。

例 4 の幾何学的意味

$$\int_0^x \sqrt{\xi^2+k^2}d\xi = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+k^2}+\frac{1}{2}k^2\sinh^{-1}\frac{x}{k}$$



の幾何学的意味を右図を用いて考えよう。

$\xi\eta$ 平面 $\mathbb{R}^2$ 内で、三つの直線

$$\{(0,\eta);\eta\in\mathbb{R}\},\ \{(x,\eta);\eta\in\mathbb{R}\},\{(\xi,0);\xi\in\mathbb{R}\}$$

及び一つの曲線

$$\{(\xi,\eta);\eta^2-\xi^2=k^2\}$$

で囲まれた図形の面積は左辺 $\int_0^x\sqrt{\xi^2+k^2}d\xi$ で与えられるので、原点 $(0,0)$ と二つの点 $(0,k),(x,\sqrt{x^2+k^2})$ を夫々結ぶ線分と上の曲線で囲まれた図形の面積 S は、そこから三点 $(0,0)$, $(0,x)$, $(x,\sqrt{x^2+k^2})$ を頂点とする三角形の面積を引いたもの、即ち $S=\frac{1}{2}k^2\sinh^{-1}\frac{x}{k}$ となる。また

$$S=\frac{1}{2}k^2\sinh^{-1}\frac{x}{k} \ \Leftrightarrow\ x=k\sinh\frac{2S}{k^2}$$

となるので、この図形の面積が S であれば $x=k\sinh\frac{2S}{k^2}, y=k\cosh\frac{2S}{k^2}$ である事が分かる。

III. $\int R(x,\sqrt{x^2-k^2})dx$ の場合

例 5

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-k^2}}dx=\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-k^2}}{k}\right)=\cosh^{-1}\frac{x}{k}$$

$x>k$ とし、積分変数を $\xi\in[k,x]$ と表し、変数変換を $\xi=k\frac{1+t^2}{2t}$ で与えられるものとすれば

$$\frac{2\xi}{k}t=1+t^2 \ \Leftrightarrow\ \left(t-\frac{\xi}{k}\right)^2=\frac{\xi^2-k^2}{k^2} \ \Leftrightarrow\ t=\frac{\xi\pm\sqrt{\xi^2-k^2}}{k}$$

であり t は $1(\xi=k$ に相当する$)$ から $\frac{x+\sqrt{x^2-k^2}}{k}$ (>1) 迄増加する様に取るものとすれば $t=\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-k^2}}{k}$ となり

$$kdt=\left(1+\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-k^2}}\right)d\xi=\frac{kt}{\sqrt{\xi^2-k^2}}d\xi$$

より

$$\int_k^x\frac{1}{\sqrt{\xi^2-k^2}}d\xi=\int_1^{\frac{x-\sqrt{x^2-k^2}}{k}}\frac{1}{t}dt=\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-k^2}}{k}\right)$$

を得る。因みに t を 1 から $\frac{x-\sqrt{x^2-k^2}}{k}(<1)$ 迄減少する様に取ると $t=\frac{\xi-\sqrt{\xi^2-k^2}}{k}$ となり

$$kdt=\left(1-\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-k^2}}\right)d\xi=\frac{-kt}{\sqrt{\xi^2-k^2}}d\xi$$

より

$$\int_k^x \frac{1}{\sqrt{\xi^2-k^2}}d\xi = \int_1^{\frac{x-\sqrt{x^2-k^2}}{k}} \frac{-1}{t}dt = \log\left(\frac{k}{x-\sqrt{x^2-k^2}}\right) = \log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-k^2}}{k}\right)$$

となり同じ結論を得る。
また

$$\begin{aligned} \frac{x}{k}\cosh y \ &\Leftrightarrow \ \frac{2x}{k} = e^y + e^{-y} \ \Leftrightarrow \ (e^y)^2 - \frac{2x}{k}e^y = -1 \\ &\Leftrightarrow \ \left(e^y - \frac{x}{k}\right)^2 = \frac{x^2-k^2}{k^2} \ \Leftrightarrow \ e^y \frac{x \pm \sqrt{x^2-k^2}}{k} \end{aligned}$$

であるが

$$\frac{x-\sqrt{x^2-k^2}}{k} = \frac{k}{x+\sqrt{x^2-k^2}} < \frac{k}{x} < 1$$

であり $\frac{x}{k} = \cosh y \geq 1$ なので $e^y = \frac{x+\sqrt{x^2-k^2}}{k}$ 即ち $\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-k^2}}{k}\right) = y = \cosh^{-1}\frac{x}{k}$ が従う。

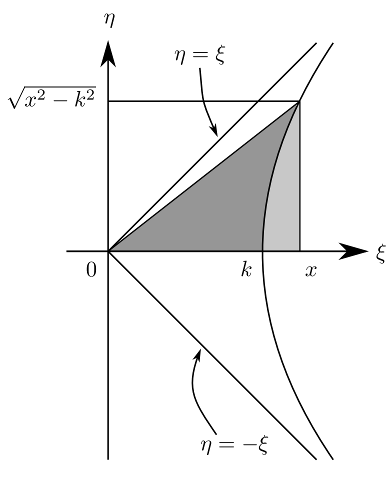
例 6

$$\int \sqrt{x^2-k^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-k^2} - \frac{k^2}{2}\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-k^2}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2-k^2}dx &= \int \frac{x^2-k^2}{\sqrt{x^2-k^2}}dx \\ &= \int x\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2-k^2}) - k^2\int \frac{1}{\sqrt{x^2-k^2}}dx \\ &= \int \frac{d}{dx}(x\sqrt{x^2-k^2}) - \int \sqrt{x^2-k^2}dx - k^2\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-k^2}}{k}\right) \end{aligned}$$

より上記の結論を得る。

例 6 の幾何学的意味



$$\int_k^x \sqrt{\xi^2-k^2}d\xi = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-k^2} - \frac{1}{2}k^2\cosh^{-1}\frac{x}{k}$$

の幾何学的意味を右図を用いて考えよう。$\xi\eta$ 平面で、二つの直線

$$\{(\xi,0);\xi\in\mathbb{R}\},\{(x,\eta);\eta\in\mathbb{R}\}$$

及び一つの曲線

$$\{(\xi,\eta);\xi^2-\eta^2=k^2\}$$

で囲まれた図形の面積は左辺 $\int_k^x \sqrt{\xi^2-k^2}d\xi$ で与えられるので、原点と二つの点 $(0,k)$,

$(x, \sqrt{x^2-k^2})$ を夫々結ぶ線分と上の曲線で囲まれた図形の面積は、三点 $(0,0), (0,x)$, $(x, \sqrt{x^2-k^2})$ を頂点とする三角形の面積から左辺 $\int_k^x \sqrt{\xi^2-k^2}d\xi$ を引いたもの、即ち $S = \frac{1}{2}k^2 \cosh^{-1}\frac{x}{k}$ となる。また

$$S = \frac{1}{2}k^2 \cosh^{-1}\frac{x}{k} \ \Leftrightarrow \ x = k\cosh\frac{2S}{k^2}$$

となるので、この図形の面積が S であれば $x = k\cosh\frac{2S}{k^2}, y = k\sinh\frac{2S}{k^2}$ である事が分かる。

3. 有理化に伴う変数変換の幾何学的解釈

第1節の I,II,III に現れた変数変換の幾何学的意味に就いて考えよう。伸長変換 $(x,y) \mapsto (kx, ky)$ を用いれば $k=1$ の場合を考えれば充分であるので以下では $k=1$ とする。充分であるので以下では $k=1$ とする。

I. $\int R(x, \sqrt{1-x^2})dx$ の場合

$y = \sqrt{1-x^2}$ より $x^2+y^2=1$ を得る。そこで平面上の単位円

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2=1\}$$

を考える。一点 $(-1,0)$ を通る勾配 t の直線は $y = t(x+1)$ で与えられる。この直線と単位円との交点は $x^2+y^2=1$ 及び $y=t(x+1)$ を満たすので

$$\begin{aligned} x^2+t^2(x+1)^2 = 1 \ &\Leftrightarrow \ (1+t^2)x^2+2t^2x+t^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \ x^2 + \frac{2t^2}{1+t^2}x + \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 = \frac{1-t^2}{1+t^2} + \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 = \frac{1}{(1+t^2)^2} \\ &\Leftrightarrow \ \left(x+\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \ x = \frac{-t^2\pm 1}{1+t^2} = \ \frac{1-t^2}{1+t^2} \ \text{または} -1 \end{aligned}$$

故 $(-1,0)$ 及び $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ の二点となる。$-\pi < \theta < \pi$ として後者を $(\cos\theta, \sin\theta)$ で表せば $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ となり

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = t$$

が従う。直線 $y=t(x+1)$ と y 軸との交点は $t = \tan\frac{\theta}{2}$ で与えられる。
写像 $\Phi : \mathbb{R} \ni t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \in S^1$ は y 軸の単位円への立体射影 stereographic projection に相当し、$\mathbb{R}$ から $S^1 \setminus \{(-1,0)\}$ への全単射を与える。$\mathbb{R}$ に無限遠点を付け加えた一点コンパクト化が S^1 であり無限遠点は西極 $(-1,0)$ に対応するものと見做す事が出来る。第1節の I に現れた変数変換は Φ に外ならない。

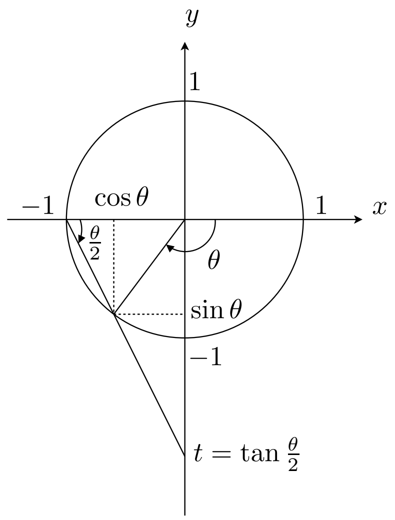


図 1: $-\pi < \theta < -\frac{\pi}{2}$ の場合

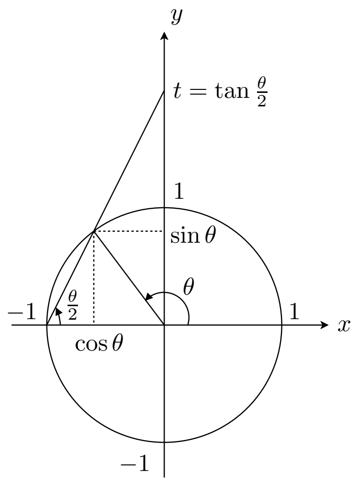


図 2: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ の場合

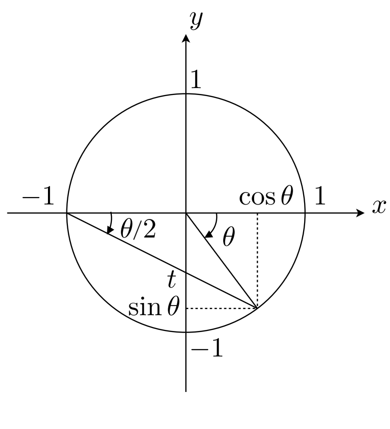


図 3: $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ の場合

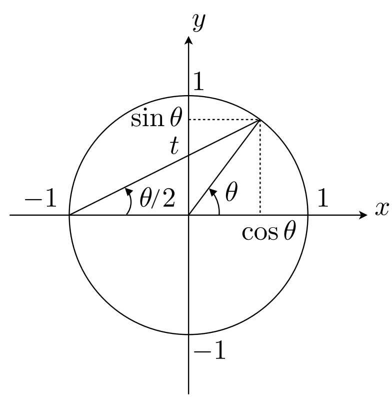


図 4: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の場合

無限遠点を北極に対応させ x 軸の一点コンパクト化を単位円として実現するには、一点 $(0,1)$ を通る勾配 $-\frac{1}{t}$ の直線 $y-1=-\frac{1}{t}x$ を取る。この直線と単位円との交点は $x^2+y^2=1$ 及び $y=-\frac{1}{t}x+1$ を満たすので

$$\begin{aligned}
x^2+\left(-\frac{1}{t}x+1\right)^2=1 \;&\Leftrightarrow\; \left(1+\frac{1}{t^2}\right)x^2-\frac{2}{t}x=0\\
&\Leftrightarrow\; 0=x\left(\left(1+\frac{1}{t^2}\right)x-\frac{2}{t}\right)=x\left(x-\frac{2t}{t^2+1}\right)\frac{t^2+1}{t^2}\\
&\Leftrightarrow\; x=0 \text{ または } \frac{2t}{t^2+1}
\end{aligned}$$

故 $(0,1)$ 及び $\left(\frac{2t}{t^2+1},\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$ の二点となる。$-\frac{3}{2}\pi<\theta<\frac{\pi}{2}$ として後者を $(\cos\theta,\sin\theta)$ で表せば $\cos\theta=\frac{2t}{t^2+1}$, $\sin\theta=\frac{t^2-1}{t^2+1}$ となり

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\theta+\pi/2}{2}\right)=\frac{\sin(\theta+\pi/2)}{1+\cos(\theta+\pi/2)}=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{\frac{2t}{t^2+1}}{1-\frac{t^2-1}{t^2+1}}=t$$

が従う。直線 $y=-\frac{1}{t}x+1$ と x 軸との交点は $t=\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ で与えられる。
写像 $\tilde{\Phi}:\mathbb{R}\ni t\mapsto\left(\frac{2t}{t^2+1},\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)\in S^1$ は x 軸の単位円への立体射影に相当し、$\mathbb{R}$ から $S^1\setminus\{(0,1)\}$ への全単射を与える。無限遠点は北極 $(0,1)$ に対応する。

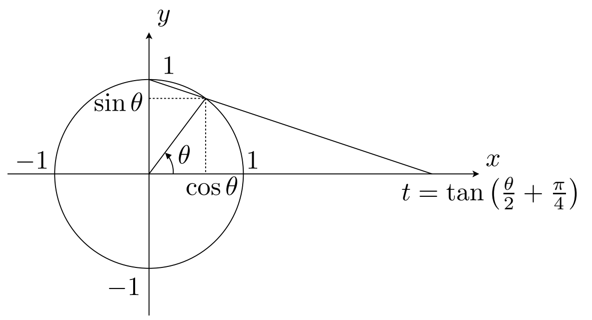


図 5: $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の場合

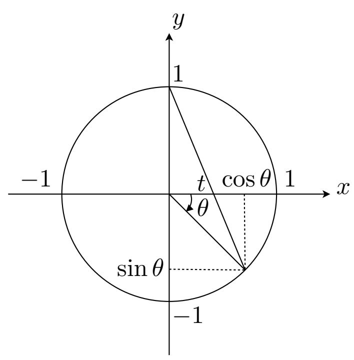


図 6: $-\frac{\pi}{2}<\theta<0$ の場合

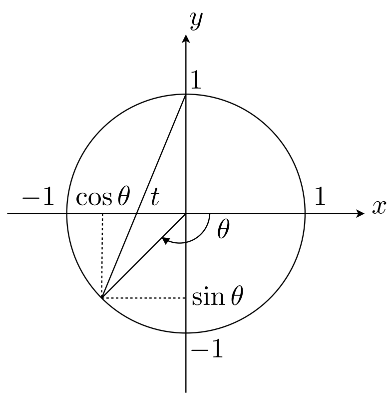


図 7: $-\pi<\theta<-\frac{\pi}{2}$ の場合

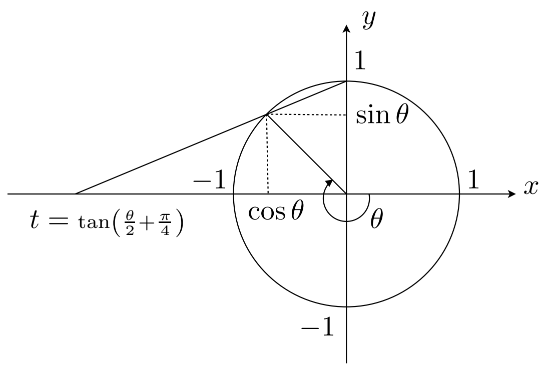


図 8: $-\frac{3}{2}\pi<\theta<-\pi$ の場合

II. $\int R(x,\sqrt{x^2+1})dx$ **の場合**

$y=\sqrt{x^2+1}$ より $y^2-x^2=1$ を得る。そこで平面上の双曲線

$$\mathbb{H}=\{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2;\ \eta^2-\xi^2=1\}$$

を考える。$\eta^2=1+\xi^2\geq 1$ より $\eta\geq 1$ または $\eta\leq -1$ が従う。これより $\mathbb{H}$ は

$$\mathbb{H}=\mathbb{H}_+\cup\mathbb{H}_-,\ \mathbb{H}_\pm=\{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2;\eta^2-\xi^2=1,\ \pm\eta>0\}$$

と二つの連結成分の合併として表される。さて

$$f:S^1\setminus\{(\pm1,0)\}\ni(x,y)\mapsto f(x,y)=\left(\frac{x}{y},\frac{1}{y}\right)\in\mathbb{H}$$

は

$$\mathbb{H}\ni(\xi,\eta)\mapsto\left(\frac{\xi}{\eta},\frac{1}{\eta}\right)\in S^1\setminus\{(\pm1,0)\}$$

を逆写像として持つので全単射を与える。また

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;y>0\},\\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0}&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;y<0\}\end{aligned}$$

と置くと

$$\begin{aligned}f(S^1\cap(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}))&=\mathbb{H}_+, &\quad f^{-1}(\mathbb{H}_+)&=S^1\cap(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0})\\ f(S^1\cap(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0}))&=\mathbb{H}_-, &\quad f^{-1}(\mathbb{H}_-)&=S^1\cap(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0})\end{aligned}$$

が成立つ。

さて、立体射影 $\Phi:\mathbb{R}\ni t\mapsto\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\in S^1$ の定義域を $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ に制限した写像の値域は $S^1\setminus\{(\pm1,0)\}$ となるので f と合成させる事が出来

$$f\circ\Phi:\ \mathbb{R}\setminus\{0\}\ni t\mapsto\left(\frac{1-t^2}{2t},\frac{1+t^2}{2t}\right)\in\mathbb{H}$$

$$\begin{tikzcd}\mathbb{R}\setminus\{0\} \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[dr, "\Phi^*f=f\circ\Phi"] & \\ S^1 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{H}\end{tikzcd}$$

を得る。第1節のIIに現れた変数変換は $f\circ\Phi$ に外ならない。
更に

$$f\circ\Phi:\ \mathbb{R}_{>0}=(0,\infty)\ni t\mapsto\left(\frac{1-t^2}{2t},\frac{1+t^2}{2t}\right)\in\mathbb{H}_+$$

の逆写像は

$$\mathbb{H}_+\cap(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R})\ni(\xi,\eta)\mapsto\ t=\eta-\sqrt{\eta^2-1}\in\mathbb{R}_{>0}$$

$$\mathbb{H}_+\cap(\mathbb{R}_{<0}\times\mathbb{R})\ni(\xi,\eta)\mapsto\ t=\eta+\sqrt{\eta^2-1}\in\mathbb{R}_{>0}$$

で与えられ

$$f\circ\Phi:\mathbb{R}_{<0}=(-\infty,0)\ni t\mapsto\left(\frac{1-t^2}{2t},\frac{1+t^2}{2t}\right)\in\mathbb{H}_-$$

の逆写像は

$$\mathbb{H}_- \cap (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}) \ni (\xi, \eta) \mapsto t = \eta - \sqrt{\eta^2 - 1} \in \mathbb{R}_{<0}$$
$$\mathbb{H}_- \cap (\mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{R}) \ni (\xi, \eta) \mapsto t = \eta + \sqrt{\eta^2 - 1} \in \mathbb{R}_{<0}$$

で与えられる。

　また $t = e^\tau$ による変数変換（逆写像は $t \mapsto \log t = \tau$）

$$\exp : \mathbb{R} \ni \tau \mapsto t = e^\tau \in \mathbb{R}_{>0}$$

を合成すると

$$f \circ \Phi \circ \exp : \mathbb{R} \ni \tau \mapsto \left(\frac{e^{-\tau} - e^\tau}{2}, \frac{e^{-\tau} + e^\tau}{2} \right)$$
$$= (-\sinh \tau, \cosh \tau) \in \mathbb{H}_+$$

となり $t = -e^\tau$ による変数変換（逆写像は $t \mapsto \log |t| = \tau$）

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\exp"] & \mathbb{R}_{>0} \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[dr, "\Phi^* f = f \circ \Phi"] & \\ & S^1 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{H}_+ \end{tikzcd}$$

$$-\exp : \mathbb{R} \ni \tau \mapsto t = -e^\tau \in \mathbb{R}_{<0}$$

を合成すると

$$f \circ \Phi \circ (-\exp) : \mathbb{R} \ni \tau \mapsto \left(\frac{-e^{-\tau} + e^\tau}{2}, \frac{-e^{-\tau} - e^\tau}{2} \right)$$
$$= (\sinh \tau, -\cosh \tau) \in \mathbb{H}_-$$

となるので双曲線 $\mathbb{H}_\pm$ の双曲線函数による媒介変数表示を得る。

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "-\exp"] & \mathbb{R}_{<0} \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[dr, "\Phi^* f = f \circ \Phi"] & \\ & S^1 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{H}_- \end{tikzcd}$$

　S^1 の極座標表示 $R(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ による $f : S^1 \to \mathbb{H}$ の引き戻しは

$$f \circ R : (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \ni \theta \mapsto (\cot\theta,\ \mathrm{cosec}\ \theta) \in \mathbb{H}$$

で与えられ、二つの自然な全単射

$$f \circ R : (0, \pi) \ni \theta \mapsto (\cot\theta,\ \mathrm{cosec}\ \theta) \in \mathbb{H}_+$$
$$f \circ R : (\pi, 2\pi) \ni \theta \mapsto (\cot\theta,\ \mathrm{cosec}\ \theta) \in \mathbb{H}_-$$

を引き起こす。

$$\begin{tikzcd} (0, \pi) \arrow[d, "R"'] \arrow[dr, "R^* f = f \circ R"] & \\ S^1 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{H}_+ \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (\pi, 2\pi) \arrow[d, "R"'] \arrow[dr, "R^* f = f \circ R"] & \\ S^1 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{H}_- \end{tikzcd}$$

III. $\int R(x, \sqrt{x^2-1})dx$ の場合

$y = \sqrt{x^2-1}$ より $x^2 - y^2 = 1$ を得る。そこで平面上の双曲線

$$\tilde{\mathbb{H}} = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2; \xi^2 - \eta^2 = 1\}$$

を考える。$\xi^2 = 1 + \eta^2 \geq 1$ より $\xi \geq 1$ または $\xi \leq -1$ が従う。これにより $\tilde{\mathbb{H}}$ は

$$\tilde{\mathbb{H}} = \tilde{\mathbb{H}}_+ \cup \tilde{\mathbb{H}}_-,\ \tilde{\mathbb{H}}_\pm = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2; \xi^2 - \eta^2 = 1, \pm\xi > 0\}$$

と二つの連結成分の合併として表される。さて

$$g : S^1 \setminus \{(0, \pm 1)\} \ni (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right) \in \tilde{\mathbb{H}}$$

は

$$\tilde{\mathbb{H}} \ni (\xi, \eta) \mapsto \left(\frac{1}{\xi}, \frac{\eta}{\xi}\right) \in S^1 \setminus \{(0, \pm 1)\}$$

逆写像として持つので全単射を与える。また

$$g(S^1 \cap (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R})) = \tilde{\mathbb{H}}_+,\ g^{-1}(\tilde{\mathbb{H}}_+) = S^1 \cap (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R})$$

$$g(S^1 \cap (\mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{R})) = \tilde{\mathbb{H}}_-,\ g^{-1}(\tilde{\mathbb{H}}_-) = S^1 \cap (\mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{R})$$

が成立つ。

さて立体射影 $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \ni t \mapsto \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right) \in S^1$ の定義域を $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ に制限した写像の値域は $S^1 \setminus \{(0, \pm 1)\}$ となるので g と合成させる事が出来

$$g \circ \tilde{\Phi} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \ni t \mapsto \left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{t^2-1}{2t}\right) \in \tilde{\mathbb{H}}$$

を得る。第 1 節の III に現れた変数変換は $g \circ \tilde{\Phi}$ に外ならない。
更に $g \circ \tilde{\Phi} : \mathbb{R}_{>0} \ni t \mapsto \left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{t^2-1}{2t}\right) \in \tilde{\mathbb{H}}_+$ の逆写像は

$$\tilde{\mathbb{H}}_+ \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}) \ni (\xi, \eta) \mapsto t = \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \in \mathbb{R}_{>0}$$

$$\tilde{\mathbb{H}}_- \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}) \ni (\xi, \eta) \mapsto t = \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \in \mathbb{R}_{>0}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\setminus\{0\} \arrow[d, "\widetilde{\Phi}"'] \arrow[dr, "\widetilde{\Phi}^* g = g \circ \widetilde{\Phi}"] & \\
S^1 \arrow[r, "g"'] & \widetilde{\mathbb{H}}
\end{tikzcd}$$

で与えられ

$$g \circ \tilde{\Phi} : \mathbb{R}_{<0} \ni t \mapsto \left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{t^2-1}{2t}\right) \in \tilde{\mathbb{H}}_-$$

の逆写像は

$$\tilde{\mathbb{H}}_- \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}) \ni (\xi, \eta) \mapsto t = \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \in \mathbb{R}_{<0}$$

$$\tilde{\mathbb{H}}_- \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}) \ni (\xi, \eta) \mapsto t = \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \in \mathbb{R}_{<0}$$

で与えられる。

また $t = e^\tau$ による変数変換

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\exp"] & \mathbb{R}_{>0} \arrow[d, "\widetilde{\Phi}"'] \arrow[dr, "\widetilde{\Phi}^* g = g \circ \widetilde{\Phi}"] & \\
& S^1 \arrow[r, "g"'] & \widetilde{\mathbb{H}}_+
\end{tikzcd}
$$

$$\exp : \mathbb{R} \ni \tau \mapsto t = e^\tau \in \mathbb{R}_{>0}$$

を合成すると

$$
\begin{aligned}
g \circ \tilde{\Phi} \circ \exp : \mathbb{R} \ni \tau \mapsto & \left(\frac{e^\tau + e^{-\tau}}{2}, \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{2} \right) \\
& = (\cosh \tau, \sinh \tau) \in \tilde{\mathbb{H}}_+
\end{aligned}
$$

となり $t = -e^\tau$ による変数変換

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "-\exp"] & \mathbb{R}_{<0} \arrow[d, "\widetilde{\Phi}"'] \arrow[dr, "\widetilde{\Phi}^* g = g \circ \widetilde{\Phi}"] & \\
& S^1 \arrow[r, "g"'] & \widetilde{\mathbb{H}}_-
\end{tikzcd}
$$

$$-\exp : \mathbb{R} \ni \tau \mapsto t = -e^\tau \in \mathbb{R}_{<0}$$

を合成すると

$$
\begin{aligned}
g \circ \tilde{\Phi} \circ (-\exp) : \mathbb{R} \ni \tau \mapsto & \left(\frac{-e^\tau - e^{-\tau}}{2}, \frac{-e^\tau + e^{-\tau}}{2} \right) \\
& = (-\cosh \tau, -\sinh \tau) \in \tilde{\mathbb{H}}_-
\end{aligned}
$$

となるので双曲線 $\tilde{\mathbb{H}}_\pm$ の双曲線函数による媒介変数表示を得る。
S^1 の極座標表示 $R(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ による $g : S^1 \to \tilde{\mathbb{H}}$ の引き戻しは

$$g \circ R : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \ni \theta \mapsto (\sec\theta, \tan\theta) \in \tilde{\mathbb{H}}$$

で与えられ、二つの自然な全単射

$$
\begin{tikzcd}
\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \arrow[d, "R"'] \arrow[dr, "R^* g = g \circ R"] & \\
S^1 \arrow[r, "g"'] & \mathbb{H}_+
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
g \circ R : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \ni \theta \mapsto (\sec\theta, \tan\theta) \in \tilde{\mathbb{H}}_+ \\
g \circ R : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \ni \theta \mapsto (\sec\theta, \tan\theta) \in \tilde{\mathbb{H}}_-
\end{aligned}
$$

を引き起こす。

$$
\begin{tikzcd}
\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \arrow[d, "R"'] \arrow[dr, "R^* g = g \circ R"] & \\
S^1 \arrow[r, "g"'] & \mathbb{H}_-
\end{tikzcd}
$$

参考文献：

藤原松三郎，微分積分學，内田老鶴圃
杉浦光夫，解析入門，東京大学出版会