上極限と下極限

平成 19 年 11 月
平成 22 年 12 月改訂
平成 29 年 5 月改訂
小澤 徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

実数列の極限の係わる問題では上極限・下極限を利用する事で簡単な取扱いが可能となる場合が有る。ここでは幾つかの例を紹介しよう。先ずは数列とその極限の定義を確認する。

定義

(1) (実) 数列とは $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への函数 $a : \mathbb{N} \ni n \mapsto a(n) \in \mathbb{R}$ の事である。通常、n に於ける値 $a(n)$ を a_n と書き $a = \{a_n\}$ と表す。

(2) 数列 $\{a_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとは次が成立つ事と定義する：

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

この関係を $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ a_n \to \alpha (n \to \infty)$ 等と表す。

(3) 数列 $\{a_n\}$ が $+\infty$ に発散するとは次は成立つ事と定義する：

$$\forall L > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n > L$$

この関係を $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,\ a_n \to +\infty (n \to \infty)$ 等と表す。

(4) 数列 $\{a_n\}$ が $-\infty$ に発散するとは次は成立つ事と定義する：

$$\forall L > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n < -L$$

この関係を $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,\ a_n \to -\infty (n \to \infty)$ 等と表す。

(5) 数列 a の部分列とは狭義単調増加函数 $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ との合成函数 $a \circ \rho : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ の事である。通常 $a(\rho(j)) = a_{\rho(j)}$ を a_{n_j} と書き $\{a_{n_j}\} \subset \{a_n\}$ と表す。

実数列 $\{a_n\}$ に対し

$$b_n = \sup_{j\geq n} a_j, \quad c_n = \inf_{j\geq n} a_j$$

と置くと、$c_n \le a_n \le b_n$ であるから $-\infty < b_n \le +\infty,\ -\infty \le c_n < +\infty$ となる。定義より $\{b_n\}$ は単調減少列、$\{c_n\}$ は単調増加列である。$\{a_n\}$ が有界なら実数の順序完備性により $\{b_n\},\ \{c_n\}$ は共に収束列であり、その極限を夫々$\{a_n\}$ の上極限、下極限と謂い

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\sup_{j\ge n} a_j)$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\inf_{j\ge n} a_j)$$

と表す。$\{a_n\}$ が上に非有界なら $b_n = +\infty(\forall n)$ なので $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$ と定義し、$\{a_n\}$ が下に非有界なら $c_n = -\infty(\forall n)$ なので $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ と定義する。また、定義により $a_n \to -\infty$ と $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$ とは同値であり $a_n \to +\infty$ と $\liminf_{n\to\infty} a_n = +\infty$ とは同値である。以上により任意の数列にその上極限、下極限が $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 内で定まった事になる。基礎的な事項を纏めておこう。

命題１.

(1) $-\infty \le \liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n \le +\infty$

(2) $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$

$\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n$

(3) $a_n \le b_n(\forall n)$

$\Rightarrow\ \limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} b_n$

命題２.　$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対し

(1) $\limsup_{n\to\infty} a_n = \alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } \forall\varepsilon > 0\ \exists N : n \ge N \Rightarrow a_n < \alpha + \varepsilon \\ \text{(ii) } \forall\varepsilon > 0,\ \sharp\{n; a_n > \alpha - \varepsilon\} = \infty \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } \forall\varepsilon > 0\ \exists N : n \ge N \Rightarrow a_n < \alpha + \varepsilon \\ \text{(iii) } \exists\{a_{n_j}\} \text{ 部分列 } \subset \{a_n\} : a_{n_j} \to \alpha(j \to \infty) \end{cases}$$

(2) $\liminf_{n\to\infty} a_n = \beta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } \forall\varepsilon > 0\ \exists N : n \ge N \Rightarrow a_n > \beta - \varepsilon \\ \text{(ii) } \forall\varepsilon > 0,\ \sharp\{n; a_n < \beta + \varepsilon\} = \infty \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } \forall\varepsilon > 0\ \exists N : n \ge N \Rightarrow a_n > \beta - \varepsilon \\ \text{(iii) } \exists\{a_{n_j}\} \text{ 部分列 } \subset \{a_n\} : a_{n_j} \to \beta(j \to \infty) \end{cases}$$

(3) $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$\Leftrightarrow\ \exists\{a_{n_j}\}$ 部分列 $\subset \{a_n\} : a_{n_j} \to +\infty(j \to \infty)$

(4) $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$

$\Leftrightarrow$ $\exists\{a_{n_j}\}$ 部分列 $\subset \{a_n\} : a_{n_j} \to -\infty (j \to \infty)$

系１． $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ に対し

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

系２． 非負数列 $\{a_n\}$ に対し

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

収束列の極限はそのチェザロ極限に等しい事を示そう。

命題３． 数列 $\{a_n\},\ \alpha \in \mathbb{R}$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j = \alpha$$

(証明) $1 \le k < n$ に対し

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j - \alpha\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(a_j - \alpha)\right| \\
&\le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k-1}|a_j - \alpha| + \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{n}|a_j - \alpha| \\
&\le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k-1}|a_j - \alpha| + \frac{n-(k-1)}{n}\sup_{j\ge k}|a_j - \alpha| \\
&\le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k-1}|a_j - \alpha| + \sup_{j\ge k}|a_j - \alpha|
\end{aligned}$$

よって任意の $k \ge 1$ に対し

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j - \alpha\right| &\le \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k-1}|a_j - \alpha| + \sup_{j\ge k}|a_j - \alpha| \\
&= \sup_{j\ge k}|a_j - \alpha|.
\end{aligned}$$

$k \to \infty$ とすると

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j - \alpha\right| \le \lim_{k\to\infty}\left(\sup_{j\ge k}|a_j - \alpha|\right) = \lim_{n\to\infty}|a_n - a| = 0.$$

より一般的には次の不等式が成立し、命題３はその系と見做せる。

命題４． $\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j \le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j \le \limsup_{n\to\infty} a_n$

証明は殆ど同様で、不等式

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k-1} a_j + \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{n} a_j \\ &\le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k-1} a_j + \frac{n-k+1}{n}\sup_{j\ge k} a_j\end{aligned}$$

に対し $\limsup_{n\to\infty}$ を取った後 $k\to\infty$ とすれば良い。

命題４の $\sum_{j=1}^{n} a_j$ を新たな数列と見做す事で次の不等式が従う。

命題５． $\liminf_{n\to\infty}(a_n - a_{n-1}) \le \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \le \limsup_{n\to\infty}(a_n - a_{n-1})$

正数列に関する次の不等式は級数論に現れる。

命題６． $a_n > 0(\forall n)$

$\Rightarrow\ \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$

(証明)　$\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ と $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ の性質を用いると命題５と６とは同値であるが、ここでは直接証明しよう。不等式

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a_n} &= \left(a_k \prod_{j=k}^{n} \frac{a_j}{a_{j-1}}\right)^{1/n} \\ &= a_k^{1/n}\left(\prod_{j=k}^{n} \frac{a_j}{a_{j-1}}\right)^{1/n} \\ &\le a_k^{1/n}\left(\sup_{j\ge k} \frac{a_j}{a_{j-1}}\right)^{(n-k+1)/n}\end{aligned}$$

に対して $\limsup_{n\to\infty}$ を取った後 $k\to\infty$ とすれば良い。

命題７． $a_n \ge 0,\ b_n \ge 0(\forall n)$ とすると

$$(\limsup_{n\to\infty} a_n)(\liminf_{n\to\infty} b_n) \le \limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \le (\limsup_{n\to\infty} a_n)(\limsup_{n\to\infty} b_n)$$

特に $\lim_{n\to\infty} b_n$ が存在すれば

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\limsup_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$$

(証明)　不等式 $a_j b_j \le (\sup_{n\ge j} a_n)(\sup_{n\ge j} b_n)$ の右辺は j に就いて単調減少であるから

$$\sup_{j\ge\ell}(a_j b_j) \le \sup_{j\ge\ell}((\sup_{n\ge j} a_n)(\sup_{n\ge j} b_n)) = (\sup_{n\ge\ell} a_n)(\sup_{n\ge\ell} b_n)$$

なる不等式が従う。両辺は ℓ に就いて単調減少で下に有界であるから極限が存在し

$$\lim_{\ell\to\infty} \sup_{j\ge\ell}(a_j b_j) \le \lim_{\ell\to\infty}((\sup_{n\ge\ell} a_n)(\sup_{n\ge\ell} b_n))$$

なる不等式が従い、その右辺は極限と積との可換性を用いれば

$$\lim_{\ell\to\infty}(\sup_{n\ge\ell} a_n)\cdot\lim_{\ell\to\infty}(\sup_{n\ge\ell} b_n) = (\limsup_{n\to\infty} a_n)(\limsup_{n\to\infty} b_n)$$

に等しい。これより

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \le (\limsup_{n\to\infty} a_n)(\limsup_{n\to\infty} b_n)$$

が従う。一方、不等式

$$a_n b_n \ge a_n(\inf_{m\ge n} b_m)$$

より

$$\sup_{n\ge\ell}(a_n b_n) \ge \sup_{n\ge\ell}(a_n(\inf_{m\ge n} b_m)) \ge \sup_{n\ge\ell}(a_n(\inf_{m\ge\ell} b_m)) = (\sup_{n\ge\ell} a_n)(\inf_{m\ge\ell} b_m)$$

となるので $\ell\to\infty$ とすればもう一方の不等式が従う。

　次の良く知られた事実も上極限・下極限を用いれば $\{a_n\}$ の単調性を直接用いない証明が可能となる。

命題８．　$a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ に対しそれらの極限が存在し等しい：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

(証明)

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\ \text{(但し } \prod_{j=1}^{k-1}(\cdots) = 1\ (k\le 1) \text{ と約束する。)} \end{aligned}$$

これより $a_n \leq b_n$ なので $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n$, $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n$.

一方 $n > \ell$ として

$$\begin{aligned} a_n &\geq \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \geq \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{\ell-1}{n}\right) \\ &\geq \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{\ell-1}{n}\right)^{\ell-1} \end{aligned}$$

これより $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq \liminf_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{\ell-1}{n}\right)^{\ell-1} \geq \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!}$

よって

$$\limsup_{n\to\infty}\ a_n \geq \liminf_{n\to\infty}\ a_n \geq \limsup_{\ell\to\infty}\ b_\ell \geq \liminf_{\ell\to\infty}\ b_\ell$$

を得る。ここで、初めの二つの不等式と $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n$ より $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} b_n$ が従い、最後の二つの不等式と $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n$ より $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} b_n = \liminf_{n\to\infty} b_n$ が従う。

「上極限・下極限の存在」を「実数の連続性」の公理体系の枠組から考えてみよう。「実数の連続性」を特徴付ける命題として代表的なものを挙げる。

(W) **Weierstrass の公理**

空でない上に有界な部分集合は上限を持つ。
空でない下に有界な部分集合は下限を持つ。

即ち $A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$ に対し
A は上に有界 $\Rightarrow\ \exists \sup A \in \mathbb{R}$
A は下に有界 $\Rightarrow\ \exists \inf A \in \mathbb{R}$

(D) **Dedekind の切断**

$\mathbb{R}$ の任意の切断は唯一つの実数を定める。
即ち $A \cup B = \mathbb{R},\ A \cap B = \emptyset,\ A \neq \emptyset,\ B \neq \emptyset,$

$a \in A,\ b \in B \Rightarrow a < b$

を満たす $A, B \subset \mathbb{R}$ に対し

$\exists 1\ c \in \mathbb{R} : a \in A,\ b \in B \Rightarrow a \leq c \leq b$

(OC) **順序完備性**

上に有界な単調増加列は収束列である。
下に有界な単調減少列は収束列である。

(C) **完備性**

Cauchy 列は収束列である。

即ち $|a_m - a_n| \to 0(m,n \to \infty)$ なる数列 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ に対し

$\exists \alpha \in \mathbb{R} : a_n \to \alpha(n \to \infty).$

(C′) **Cantor の区間縮小法**

単調減少閉区間列の共通集合は空でない。

即ち $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ なる形の区間の列 $\{I_n\}$ に対し

$$\forall n,\ I_{n+1} \subset I_n \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

(LSI) **上極限・下極限の存在**

上に有界な数列は上極限を持つ。

下に有界な数列は下極限を持つ。

(BW) **Borzano-Weierstrass の公理 (点列コンパクト性)**

有界な数列は収束部分列を持つ。

(A) **Archimedes の公理**

$\mathbb{N}$ は $\mathbb{R}$ の非有界部分集合である。

上極限・下極限の定義は (W) と (OC) に基づいているので

$$\text{(W)},\ \text{(OC)} \Rightarrow \text{(LSI)}$$

となっている。そこで (LSI) から導かれる性質を考えよう。

命題　(LSI) ⇒ (C)

(証明)　$\{a_n\}$ を Cauchy 列とする。

$$\sup_{n \geq j} a_n - \inf_{n \geq j} a_n = \sup_{m,n \geq j} |a_m - a_n|$$

であり、仮定から右辺は $j \to \infty$ で 0 に収束する。一方 (LSI) より上極限・下極限は存在するので両者は一致する事になる。よって $\{a_n\}$ は収束する。

命題　(LSI) ⇒ (C′)

(証明)　$I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ は単調減少閉区間列 $\{I_n\}$ を成しているものとする。(LSI) により $\alpha = \limsup_{n\to\infty} a_n,\ \beta = \liminf_{n\to\infty} b_n$ が存在する。$\alpha \leq \beta$ なので $[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ となり (C') が従う。

命題　(LSI) $\Rightarrow$ (BW)

(証明)　命題の特別な場合である。

命題　(LSI) $\Rightarrow$ (OC)

(証明)　$\{a_n\}$ を上に有界 [下に有界] な単調増加列 [単調減少列] とすると $a_n = \inf_{j \geq n} a_j [a_n = \sup_{j \geq n} a_j]$ なので (LSI) より収束する。

命題　(LSI) $\Rightarrow$ (A)

(証明)　(A) は $\lim_{n \to \infty} 1/n = 0$ と同値となるのでこれを示そう。数列 $\{1/n\}$ は下に有界な単調減少列なので

$$\exists \alpha = \limsup_{n \to \infty} 1/n \in \mathbb{R}$$

であるが $1/n > 0$ 故 $\alpha \geq 0$. さて $\alpha > 0$ と仮定すると命題より部分列 $\{1/n_j\}$ が存在して $1 < n_1 < n_2 < \cdots < n_j \uparrow \infty,\ 1/n_j \to \alpha (j \to \infty)$. これより $\forall \varepsilon > 0\ \exists J : j \geq J \Rightarrow |1/n_j - \alpha| < \varepsilon$. $\varepsilon = \alpha/2$ とし対応する J を取ると $j \geq J \Rightarrow \alpha/2 < 1/n_j \Leftrightarrow n_j < 2/\alpha$. これは $n_j \uparrow \infty$ に矛盾するので $\alpha = 0$.

参考文献：三村征雄、微分積分学 I、岩波書店
森毅、現代の古典解析、現代数学社