# 常微分方程式の初期値問題の局所解の存在

平成 22 年 10 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

　バナッハ空間に於ける常微分方程式の初期値問題の局所解の存在定理を纏めて置こう。$X$ をバナッハ空間とし $t_0 \in \mathbb{R}$ 及び $u_0 \in X$ を与える。$a, b > 0$ に対し $\mathbb{R} \times X$ の有界閉集合 $D$ を

$$\begin{aligned} D &= \{(t,u) \in \mathbb{R} \times X;\ t_0 \le t \le t_0 + a,\ \|u - u_0\| \le b\} \\ &= [t_0, t_0 + a] \times \overline{B(u_0; b)} \end{aligned}$$

と定める。$D$ 上定義された写像 $f : D \to X$ による相速度ベクトル場 vector field of phase velocity に従う相点の運動方程式 equation of phase motion

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

を初期時刻 $t_0 \in \mathbb{R}$ に於ける初期条件 $u(t_0) = u_0$ の下で考えよう。その為に幾つかの定義を導入しよう。

**定義**　区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の $X$ 値連続函数の全体及び $X$ 値弱連続函数の全体を夫々 $C(I : X)$ 及び $C_w(I; X)$ と表す。$I$ 上の $X$ 値連続微分可能函数の全体及び $X$ 値弱連続微分可能函数の全体を $C^1(I; X)$ 及び $C^1_w(I; X)$ と表す。但し $I$ が開区間でない場合は

$$\begin{aligned} C^1(I;X) &= \{u \in C(I;X); u \text{ は } \mathrm{Int}\, I \text{ 上微分可能で } v \in C(I;X) \text{ が存在し } u'|\mathrm{Int}\, I = v|\mathrm{Int}\, I\} \\ C^1_w(I;X) &= \{u \in C_w(I;X); u \text{ は } \mathrm{Int}\, I \text{ 上弱微分可能で } v \in C_w(I;X) \text{ が存在し } u'|\mathrm{Int}\, I = v|\mathrm{Int}\, I\} \end{aligned}$$

と定める。上の定義の $v$ は $u'$ により一意的に定まるので $u'$ の拡張 $v$ を夫々再び $u' \in C(I; X)$ 及び $u' \in C_w(I; X)$ と表す。

**定義**　$\mathbb{R} \times X$ の部分集合 $E$ 上定義された写像 $f : E \to X$ に対し $L > 0$ が存在し任意の $(t,u), (t,v) \in E$ に対し評価

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \le L\|u - v\|$$

が成立つとき $f$ はリプシッツ条件を満たすと謂い $L$ をそのリプシッツ定数と謂う。

**定理 1（リプシッツ連続相速度ベクトル場の下での解の存在と一意性）**　$X$ をバナッハ空間とし $t_0 \in \mathbb{R}$ 及び $u_0 \in X$ を与える。$a, b > 0$ に対し $D = [t_0, t_0 + a] \times \overline{B(u_0; b)}$ と置く。
写像 $f : D \to X$ は有界でリプシッツ定数 $L$ を持つリプシッツ写像とする。$I = [t_0, t_0 + T], T = \min(a, b/M), M = \sup\{\|f(t,u)\|; (t,u) \in D\}$ とする。このとき $u \in C^1(I; X)$ が存在して $u(t_0) = u_0$ 及び任意の $t \in I$ に対して $(t, u(t)) \in D$ であり方程式

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

を満たす。この様な $u$ は $I$ 上で一意的である。

(証明)　幾つかの段階に分けて議論しよう。

**第一段**　任意の $\varepsilon > 0$ 及び $u \in C(I;X)$ に対し

$$|||u|||_\varepsilon = \sup_{t\in I} e^{-(1+\varepsilon)L(t-t_0)}\|u(t)\|$$

とすると $|||\cdot|||_\varepsilon$ は $C(I;X)$ 上のノルムとなり $C(I;X)$ にノルム $|||\cdot|||_\varepsilon$ を与えた空間 $\mathscr{X}$ は完備となる。$C(I;X)$ の部分集合

$$\mathscr{F} = \{u \in C(I;X);\ \sup_{t\in I}\|u(t)-u_0\| \le b\}$$

は $\mathscr{X}$ の閉集合となる。

(証明)　$\mathscr{X}$ の完備性は一様ノルムとの同値性

$$|||u|||_\varepsilon \le \sup_{t\in I}\|u(t)\| \le \exp((1+\varepsilon)LT)|||u|||_\varepsilon$$

により従う。

次に $\mathscr{F}$ は $\mathscr{X}$ の閉集合である事を示そう。$\overline{\mathscr{F}} \subset \mathscr{F}$ を示せば良い。任意の $u \in \overline{\mathscr{F}}$ に対し $\{u_n\} \subset \mathscr{F}$ が存在し $|||u_n - u|||_\varepsilon \to 0 (n \to \infty)$ となる。このとき

$$\begin{aligned}\|u(t)-u_0\| &\le \|u(t)-u_n(t)\| + \|u_n(t)-u_0\| \\ &\le \exp((1+\varepsilon)LT)|||u_n-u|||_\varepsilon + b\end{aligned}$$

であるから

$$\sup_{t\in I}\|u(t)-u_0\| \le \exp((1+\varepsilon)LT)|||u_n-u|||_\varepsilon + b$$

が従い $n \to \infty$ とすれば $u \in \mathscr{F}$ である事が分かる。

**第二段**　$u \in \mathscr{F}$ に対し $\Phi(u): I \to X$ を

$$(\Phi(u))(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(t', u(t'))dt',\ t \in I$$

で定めると $\Phi(u) \in \mathscr{F}$ となる。即ち $\Phi: u \mapsto \Phi(u)$ は $\mathscr{F}$ からそれ自身への写像となる。

(証明)　$u \in \mathscr{F}, t \in I$ に対し $(t, u(t)) \in D$ であるから不等式

$$\|(\Phi(u))(t) - (\Phi(u))(s)\| = \|\int_s^t f(t', u(t'))dt'\| \le M|t-s|$$

により $\Phi(u)$ の連続性が従う。更に

$$\|(\Phi(u))(t)-u_0\| = \|\int_{t_0}^{t} f(t',u(t'))dt'\| \leq M(t-t_0) \leq MT \leq b$$

により $\Phi(u) \in \mathscr{F}$ が従う。

**第三段**　$\Phi : \mathscr{F} \ni u \mapsto \Phi(u) \in \mathscr{F}$ は $\mathscr{X}$ に於ける距離 $d(u,v) \equiv |||u-v|||_\varepsilon$ に関し縮小写像となる。$\Phi$ の不動点 $u \in \mathscr{X}$ は初期値問題

$$\begin{cases} u'(t) = f(t,u(t)),\ t \in I \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

の $C^1(I;X)$ に属す解である。

(証明)　$u,v \in \mathscr{F}, t \in I$ に対し等式

$$(\Phi(u))(t) - (\Phi(v))(t) = \int_{t_0}^{t} (f(t',u(t')) - f(t',v(t')))dt'$$

が成立つのでリプシッツ条件及びノルム $|||\cdot|||_\varepsilon$ の定義を用いると

$$\begin{aligned} \|(\Phi(u)-\Phi(v))(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(t',u(t')) - f(t',v(t'))\| dt' \\ &\leq L\int_{t_0}^{t} \|u(t')-v(t')\| dt' \\ &\leq L\int_{t_0}^{t} e^{(1+\varepsilon)L(t'-t_0)} |||u-v|||_\varepsilon dt' \\ &= \frac{1}{1+\varepsilon}(e^{(1+\varepsilon)L(t-t_0)}-1)|||u-v|||_\varepsilon \end{aligned}$$

を得る。これより

$$|||\Phi(u)-\Phi(v)|||_\varepsilon \leq \frac{1}{1+\varepsilon}|||u-v|||_\varepsilon$$

が従い $\Phi$ は縮小写像となる。故に $\Phi$ は $\mathscr{F}$ 内に不動点 $u$ を持つ。

$\Phi$ の不動点 $u$ は $u \in \mathscr{F} \subset C(I;X)$ であり積分方程式

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(t',u(t'))dt',\ t \in I$$

を満たす。一点 $t \in (t_0, t_0+T)$ を取り $t+h \in (t_0, t_0+T)$ なる任意の $h \neq 0$ に対し

$$\begin{aligned} \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - f(t,u(t)) &= \frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} f(t',u(t'))dt' - f(t,u(t)) \\ &= \frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} (f(t',u(t')) - f(t,u(t)))dt' \end{aligned}$$

と変形すると

$$\begin{aligned} \|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - f(t,u(t))\| &\leq \sup_{|t'-t|\leq|h|} \|f(t',u(t')) - f(t,u(t))\| \\ &\to 0\ (h \to 0) \end{aligned}$$

を得るので $u$ は $(t_0, t_0+T)$ 上微分可能であり

$$u'(t) = f(t, u(t)),\ t \in (t_0, t_0+T)$$

を満たす。右辺は $I$ 上連続なので $u \in C^1(I;X)$ となる。

**第四段**　一意性を証明しよう。$v \in C^1(I;X)$ は $v(t_0) = u_0, v'(t) = f(t, v(t)),\ t \in I$ を満たしているものとすると $t$ に就いて両辺を積分する事により

$$v(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(t', v(t'))dt'$$

を得る。このとき

$$\|u(t) - v(t)\| \leq L \int_{t_0}^{t} \|u(t') - v(t')\| dt'$$

となりグロンウォールの補題より $u = v$ を得る。

**定理２（弱連続相速度ベクトル場の下での解の存在）**　$X$ をバナッハ空間とし $t_0 \in \mathbb{R}$ 及び $u_0 \in X$ を与える。$a, b > 0$ に対し $D = [t_0, t_0+a] \times \overline{B(u_0;b)}$ と置く。
写像 $f : D \to X$ は弱連続で $f(D)$ は $X$ の弱相対点列コンパクト集合であるとする。このとき $f(D)$ は有界であり

$$M = \sup\{\|f(t,u)\|; (t,u) \in D\}$$

と置く。$I = [t_0, t_0+T], T = \min(a, b/M)$ とする。ことのき $u \in (C \cap C_w^1)(I;X)$ が存在して $u(t_0) = u_0$ 及び任意の $t \in I$ に対して $(t, u(t)) \in D$ であり方程式

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

を満たす。ここに $u'$ は $u$ の弱導函数である。

(証明)　幾つかの段階に分けて議論しよう。

**第一段：$f(D)$ は有界である。**

(証明)　もしそうでないとすると任意の $n \geq 1$ に対して $(t_n, u_n) \in D$ が存在し $\|f(t_n, u_n)\| \geq n$ となる。$f(D)$ は弱相対点列コンパクトであるから部分列 $\{(t_{n_j}, u_{n_j})\} \subset D$ により $\{f(t_{n_j}, u_{n_j})\}$ は $X$ の弱収束列とする事が出来るが弱収束列のノルム $\|f(t_{n_j}, u_{n_j})\|$ の成す列は有界となる為矛盾を生ずる。

**第二段：コーシーの折線近似による近似解の列 $\{u_n\} \subset C(I;X)$ の構成**
　各 $n \geq 1$ に対し区間 $I = [t_0, t_0+T]$ の分割 $\Delta_n$ を次の様に定める：

$$\Delta_n : t_0 = \tau_0^n < \tau_1^n < \cdots < \tau_{N(n)}^n = t_0 + T,$$

$$|\Delta_n| \equiv \max\{\tau_j^n - \tau_{j-1}^n; 1 \leq j \leq N(n)\} \to 0\ (n \to \infty)$$

次に各 $n \geq 1$ に対し分割 $\Delta_n$ に付随した点列 $\{u_j^n; 0 \leq j \leq N(n)\}$ を

$$u_0^n = u_0,\ u_1^n = u_0^n + (\tau_1^n - \tau_0^n) f(\tau_0^n, u_0^n) = u_0 + (\tau_1^n - t_0) f(t_0, u_0),$$

以下帰納的に

$$u_{j+1}^n = u_j^n + (\tau_{j+1}^n - \tau_j^n) f(\tau_j^n, u_j^n),\ j = 1, \cdots, N(n) - 1$$

と定める。ここに

$$\begin{aligned}
\|u_1^n - u_0\| &= (\tau_1^n - t_0)\|f(t_0, u_0)\| \leq (\tau_1^n - t_0)M, \\
\|u_2^n - u_0\| &\leq \|u_2^n - u_1^n\| + \|u_1^n - u_0\| \\
&= (\tau_2^n - \tau_1^n)\|f(\tau_1^n, u_1^n)\| + (\tau_1^n - t_0)M \leq (\tau_2^n - t_0)M, \\
\|u_{j+1}^n - u_0\| &\leq \sum_{k=0}^{j} \|u_{k+1}^n - u_k^n\| = \sum_{k=0}^{j} (\tau_{k+1}^n - \tau_k^n)\|f(\tau_k^n, u_k^n)\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{j} (\tau_{k+1}^n - \tau_k^n)M = (\tau_{j+1}^n - t_0)M
\end{aligned}$$

なる事により $0 \leq j \leq N(n)$ なる任意の $j$ に対し

$$\|u_{j+1}^n - u_0\| \leq TM \leq b$$

即ち $(\tau_j^n, u_j^n) \in D$ である事に注意する。

さて、点列 $\{u_j^n; 0 \leq j \leq N(n)\}$ を線分で繋いで折線 $u_n : I \to X$ を定める：

$$u_n(t) = \frac{\tau_{j+1}^n - t}{\tau_{j+1}^n - \tau_j^n} u_j^n + \frac{t - \tau_j^n}{\tau_{j+1}^n - \tau_j^n} u_{j+1}^n,\ \ t \in [\tau_j^n, \tau_{j+1}^n],\ j = 0, \cdots, N(n) - 1$$

ここで右辺の $u_{j+1}^n$ に $u_j^n$ による定義を代入すると

$$u_n(t) = u_j^n + (t - \tau_j^n) f(\tau_j^n, u_j^n),\ t \in [\tau_j^n, \tau_{j+1}^n],\ j = 0, \cdots, N(n) - 1$$

が得られる。

**第三段**：近似解 $u_n \in C(I; X)$ は任意の $t, s \in I$ に対し次の不等式を満たす：

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \leq M|t - s|$$

特に、任意の $t \in I$ に対し $(t, u_n(t)) \in D$ となる。

(証明)　$t > s$ の場合を示せば充分である。$0 \leq j \leq k \leq N(n) - 1$ なる $j, k$ が存在し $t \in [\tau_k^n, \tau_{k+1}^n], s \in [\tau_j^n, \tau_{j+1}^n]$ を満たす。このとき $j > k$ ならば

$$\begin{aligned}
&u_n(t) - u_n(s) = (u_k^n + (t - \tau_k^n) f(\tau_k^n, u_k^n)) - (u_j^n + (s - \tau_j^n) f(\tau_j^n, u_j^n)) \\
=&\ (t - \tau_k^n) f(\tau_k^n, u_k^n) + \sum_{\ell=j}^{k-1} (u_{\ell+1}^n - u_\ell^n) - (s - \tau_j^n) f(\tau_j^n, u_j^n) \\
=&\ (t - \tau_k^n) f(\tau_k^n, u_k^n) + \sum_{\ell=j}^{k-1} (\tau_{\ell+1}^n - \tau_\ell^n) f(\tau_\ell^n, u_\ell^n) - (s - \tau_j^n) f(\tau_j^n, u_j^n) \\
=&\ (t - \tau_k^n) f(\tau_k^n, u_k^n) + \sum_{\ell=j+1}^{k-1} (\tau_{\ell+1}^n - \tau_\ell^n) f(\tau_\ell^n, u_\ell^n) + (\tau_{j+1}^n - s) f(\tau_j^n, u_j^n)
\end{aligned}$$

となるので $M$ の定義を用いて

$$
\begin{aligned}
\|u_n(t)-u_n(s)\| &\le M((t-\tau_k^n)+\sum_{\ell=j+1}^{k-1}(\tau_{\ell+1}^n-\tau_\ell^n)+(\tau_{j+1}^n-s)) \\
&= M(t-s)
\end{aligned}
$$

を得る。但し $j=k-1$ の場合は和の記号の部分は $0$ と見做す。$j=k$ ならば

$$
\begin{aligned}
u_n(t)-u_n(s) &= (t-\tau_k^n)f(\tau_k^n,u_k^n)-(s-\tau_k^n)f(\tau_k^n,u_k^n) \\
&= (t-s)f(\tau_k^n,u_k^n)
\end{aligned}
$$

より同じ不等式を得る。
特に $s=t_0$ とすると $\|u_n(t)-u_0\|\le M|t-t_0|\le MT\le b$ となるので $(t,u_n(t))\in D$ が従う。

**第四段**：各 $t\in I$ に対し $\{u_n(t)\}\subset X$ は弱収束部分列を持つ。

(証明)　第三段の議論に於いて $t\in[\tau_k^n,\tau_{k+1}^n], s=t_0\in[\tau_0^n,\tau_1^n]$ の場合を考えると $u_n(s)=u_n(t_0)=u_0$ であるから等式

$$
\begin{aligned}
u_n(t)-u_0 = &\ (t-\tau_k^n)f(\tau_k^n,u_k^n)+\sum_{j=1}^{k-1}(\tau_{j+1}^n-\tau_j^n)f(\tau_j^n,u_j^n)+(\tau_1^n-t_0)f(t_0,u_0) \\
= &\ (t-\tau_k^n)f(\tau_k^n,u_k^n)+\sum_{j=0}^{k-1}(\tau_{j+1}^n-\tau_j^n)f(\tau_j^n,u_j^n)
\end{aligned}
$$

が成立つ。故に

$$
\frac{u_n(t)-u_0}{t-t_0}=\frac{t-\tau_k^n}{t-t_0}f(\tau_k^n,u_k^n)+\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\tau_{j+1}^n-\tau_j^n}{t-t_0}f(\tau_j^n,u_j^n)
$$

となり $(u_n(t)-u_0)/(t-t_0)$ は $f(D)$ の凸包に属す事が分かる。
$f(D)$ は弱相対点列コンパクトなので $f(D)$ の凸包もそうである。従って各 $t\in I$ に対し $\{(u_n(t)-u_0)/(t-t_0)\}_n$ は弱収束部分列を持ち、故に $\{u_n(t)\}_n$ も弱収束部分列を持つ。

**第五段**：近似解の列 $\{u_n\}\subset C(I;X)$ に対し狭義単調増加な $\rho:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{Z}_{>0}$ による部分列 $\{u_{\rho(n)}\}$ 及び $u\in C(I;X)$ が存在し各 $t\in I$ に対し $\{u_{\rho(n)}(t)\}$ は $u(t)$ に弱収束する。特に $u(t_0)=u_0$ であり任意の $t,s\in I$ に対し $u$ は次の不等式を満たす：

$$
\|u(t)-u(s)\|\le M|t-s|
$$

(証明)　$I\cap\mathbb{Q}$ は可算なので全単射 $\sigma:\mathbb{Z}_{>0}\to I\cap\mathbb{Q}$ が存在する。第四段により $X$ の点列 $\{u_n(\sigma(1))\}_n$ は弱収束部分列を持つので狭義単調増加な $\rho_1:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{Z}_{>0}$ が存在して $\{u_{\rho_1(n)}(\sigma(1))\}_n$ は弱収束列となる。このとき $\{u_{\rho_1(n)}(\sigma(2))\}_n$ は第四段により再び弱収束部分列を持つので狭義単調増加な $\rho_2:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{Z}_{>0}$ が存在して $\{u_{\rho_1(\rho_2(n))}(\sigma(2))\}_n$ は弱収束列となる。このとき

$\{u_{\rho_1(\rho_2(n))}(\sigma(1))\}_n$ は収束列 $\{u_{\rho_1(n)}(\sigma(1))\}_n$ の部分列なので収束する。以下同様にして任意の $m \geq 1$ 及び任意の $1 \leq k \leq m$ に対し狭義単調増加な $\rho_k : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ が存在し任意の $1 \leq j \leq k$ に対し $\{u_{(\rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k)(n)}(\sigma(j))\}_n$ は弱収束列となる。そこで $t \in I \cap \mathbb{Q}$ に対し $\{u_{(\rho_1 \circ \cdots \circ \rho_n)(n)}(t)\}_n$ を考える。任意の $t \in I \cap \mathbb{Q}$ に対し唯一つの $m \geq 1$ が存在し $t = \sigma(m)$ となる。$k \geq m$ とすると $\{u_{(\rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k)(n)}(\sigma(m))\}_n$ は弱収束列となるので $\{u_{(\rho_1 \circ \cdots \circ \rho_n)(n)}(\sigma(m))\}_n$ も弱収束列である。従って任意の $t \in I \cap \mathbb{Q}$ に対し $\{u_{(\rho_1 \circ \cdots \circ \rho_n)(n)}(t)\}_n$ は弱収束列である。$\rho(n) = (\rho_1 \circ \cdots \circ \rho_n)(n)$ と置くと $\rho : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ は狭義単調増加であり $\{u_{\rho(n)}\}$ は $\{u_n\}$ の部分列となる。

さて任意の $t \in I$ に対し $\{u_{\rho(n)}(t)\}$ は $X$ の弱収束列である事を示そう。その為には任意の $\ell \in X'$ に対し $\{\langle \ell, u_{\rho(n)}(t) \rangle\}_n$ は $\mathbb{C}$ のコーシー列である事を示せば充分である。$I \cap \mathbb{Q}$ は $I$ で稠密なので任意の $\varepsilon > 0$ に対し $k \geq 1$ を取って

$$|t - \sigma(k)| < \varepsilon/(3(M\|\ell\|_{X'} + 1))$$

とする事が出来る。この $k$ に対し $\{\langle \ell, u_{\rho(n)}(\sigma(k)) \rangle\}_n$ は収束列を成すので $N \geq 1$ を取って $m, n \geq N$ なる任意の $m, n$ に対し

$$|\langle \ell, u_{\rho(m)}(\sigma(k)) \rangle - \langle \ell, u_{\rho(n)}(\sigma(k)) \rangle| < \varepsilon/3$$

とする事が出来る。従って $m, n \geq N$ に対し

$$\begin{aligned}
& |\langle \ell, u_{\rho(m)}(t) \rangle - \langle \ell, u_{\rho(n)}(t) \rangle| \\
= \ & |\langle \ell, u_{\rho(m)}(t) - u_{\rho(m)}(\sigma(k)) \rangle + \langle \ell, u_{\rho(n)}(\sigma(k)) - u_{\rho(n)}(t) \rangle \\
& + \langle \ell, u_{\rho(m)}(\sigma(k)) \rangle - \langle \ell, u_{\rho(n)}(\sigma(k)) \rangle| \\
\leq \ & \|\ell\|_{X'} \|u_{\rho(m)}(t) - u_{\rho(m)}(\sigma(k))\| + \|\ell\|_{X'} \|u_{\rho(n)}(\sigma(k)) - u_{\rho(n)}(t)\| \\
& + |\langle \ell, u_{\rho(m)}(\sigma(k)) \rangle - \langle \ell, u_{\rho(n)}(\sigma(k)) \rangle| \\
\leq \ & 2M\|\ell\|_{X'} |t - \sigma(k)| + \varepsilon/3 < \varepsilon
\end{aligned}$$

と評価される。これが示すべき事であった。
各 $t \in I$ に対する $\{u_{\rho(n)}(t)\}$ の弱収束極限を $u(t)$ と定める。これより

$$u : I \ni t \mapsto u(t) \in X$$

が定まる。

さて、任意の $t, s \in I$ を取る。$X$ の元 $u(t) - u(s)$ に対しハーン・バナッハの定理により $\ell \in X'$ が存在し

$$\langle \ell, u(t) - u(s) \rangle \ = \|\ell\|^2 = \|u(t) - u(s)\|^2$$

を満たす。$u_{\rho(n)}(t) - u_{\rho(n)}(s)$ は $u(t) - u(s)$ に弱収束するので任意の $\varepsilon > 0$ に対し $N \geq 1$ が存在し $n \geq N$ なる任意の $n$ に対し

$$|\langle \ell, u_{\rho(n)}(t) - u_{\rho(n)}(s) \rangle - \langle \ell, u(t) - u(s) \rangle| < \varepsilon$$

となる。以上と第三段より

$$\begin{aligned}
\|u(t) - u(s)\|^2 &= \langle \ell, u(t) - u(s) \rangle \\
&\leq \langle \ell, u_{\rho(n)}(t) - u_{\rho(n)}(s) \rangle + \varepsilon \\
&\leq \|\ell\| \ \|u_{\rho(n)}(t) - u_{\rho(n)}(s)\| + \varepsilon \\
&\leq \|\ell\| M |t - s| + \varepsilon \\
&= M\|u(t) - u(s)\| \ |t - s| + \varepsilon
\end{aligned}$$

を得る。$\varepsilon > 0$ は任意であったので

$$\|u(t) - u(s)\| \leq M|t - s|$$

が従う。これより $u \in C(I;X)$ を得る。

第六段：$X$ の部分集合

$$K = u(I) \cup \bigcup_{n \geq 1} u_n(I)$$

は弱点列コンパクトである。

(証明)　$I \subset \mathbb{R}$ は点列コンパクトで $u : I \to X$ は $X$ に弱位相を入れて考えても連続であるから $u(I)$ は弱点列コンパクトである。そこで任意の点列 $\{y_j\} \subset \bigcup_{n \geq 1} u_n(I)$ は $K$ の或る点に収束するような部分列を持つ事を示せば良い。任意の $j \geq 1$ に対し $n(j) \geq 1$ 及び $t_j \in I$ が存在し $y_j = u_{n(j)}(t_j)$ となる。このとき次の場合のどちらかが成立する。

$$\text{(i) } \sharp\{n(j); j \geq 1\} < \infty \quad \text{(ii) } \sharp\{n(j); j \geq 1\} = \infty$$

**(i)** の場合：或る $n_0 \geq 1$ に対し $\sharp\{j \geq 1; n_0 = n(j)\} = \infty$ となる。（もしそうでなければ任意の $m$ に対し $m = n(j)$ を与える $j$ は有限個となる。仮定 $\sharp n(\mathbb{Z}_{>0}) < \infty$ により有限個の $m_1, \cdots, m_k$ で $n(\mathbb{Z}_{>0}) = \{m_1, \cdots, m_k\}$ と表される。従って、それらを実現する $j$ は有限個しかないことになり矛盾を生ずる。) 従って、狭義単調増加 $\rho_1 : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ が存在し任意の $j \geq 1$ に対し $n_0 = n(\rho_1(j))$ と表される。このとき点列 $\{t_{\rho_1(j)}\}$ はコンパクト集合 $I$ の列であるから $t^* \in I$ 及び狭義単調増加 $\rho_2 : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ によって $t_{\rho_1(\rho_2(j))} \to t^* (j \to \infty)$ とする事が出来る。$\rho = \rho_1 \circ \rho_2$ とすると　$y_{\rho(j)} = u_{n(\rho(j))}(t_{\rho(j)}) = u_{n_0}(t_{\rho(j)})$ と表され $u_{n_0}$ の連続性より $X$ のノルムで $y_{\rho(j)} \to u_{n_0}(t^*) \in K$ となる。

**(ii)** の場合：任意の $j \geq 1$ に対し $n(k) > n(j)$ を満たす $k > j$ が存在する。（もしそうでなければ或る $j_0 \geq 1$ に対し $n(k) > n(j_0)$ を満たす $k > j_0$ は存在しない事となり $\{n(j); j \geq 1\} \subset \{n(j); 1 \leq j \leq j_0\}$ が成立つが共に有限集合となる為矛盾を生ずる。）従って狭義単調増加 $\rho_1 : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ が存在し $n \circ \rho_1 : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ も狭義単調増加となる。(i) と同様に $t^* \in I$ 及び狭義単調増加 $\rho_2 : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ を取り $t_{\rho_1(\rho_2(j))} \to t^* (j \to \infty)$ とする事が出来る。$\rho = \rho_1 \circ \rho_2$ とすると $y_{\rho(j)} = u_{n(\rho(j))}(t_{\rho(j)})$ は任意の $\ell \in X'$ に対し

$$\begin{aligned}
&|\langle \ell, y_{\rho(j)} \rangle - \langle \ell, u(t^*) \rangle| \\
&= |\langle \ell, u_{n(\rho(j))}(t_{\rho(j)}) - u_{n(\rho(j))}(t^*) \rangle + \ell, \langle u_{n(\rho(j))}(t^*) - u(t^*) \rangle| \\
&\leq \|\ell\| M |t_{\rho(j)} - t^*| + |\langle \ell, u_{n(\rho(j))}(t^*) - u(t^*) \rangle| \\
&\to 0 \ (j \to \infty)
\end{aligned}$$

となり $u(t^*) \in K$ に弱収束する。

**第七段**：第五段で定まる $u$ は弱微分可能であり、その弱導函数 $u'$ は弱連続で任意の $t \in I$ に対し $u'(t) = f(t, u(t))$ を満たす。

(証明)　以下では簡単の為、第五段で定まった部分列 $\{u_{\rho(n)}\}$ を改めて $\{u_n\}$ と表す事にする。第六段により $I \times K$ は $\mathbb{R} \times X$ の弱点列コンパクト集合である。よって任意の $\ell \in X'$ に対し $I \times K \ni (t,y) \mapsto \langle \ell, f(t,y) \rangle \in \mathbb{C}$ は一様連続である。即ち任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ 及び有限個の $\{\ell_i; 1 \leq i \leq m\} \subset X'$ が存在し $|t-s| < \delta$ なる任意の $t, s \in I$ 及び $\max_{1 \leq i \leq m} |\langle \ell_i, y-z \rangle| < \delta$ なる任意の $y, z \in K$ に対し $|\langle \ell, f(t,y) - f(s,z) \rangle| < \varepsilon$ が成立つ。また $N \geq 1$ が存在し任意の $n \geq N$ に対し

$$|\Delta_n| < \delta/(1 + M \max_{1 \leq i \leq m} \|\ell_i\|)$$

と出来る。

第四段の議論より $t \in [\tau_k^n, \tau_{k+1}^n]$ なるとき

$$\begin{aligned}
&u_n(t) - u_0 - \int_{t_0}^t f(t', u_n(t'))dt \\
&= (t - \tau_k^n) f(\tau_k^n, u_k^n) + \sum_{j=0}^{k-1} (\tau_{j+1}^n - \tau_j^n) f(\tau_j^n, u_j^n) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\tau_j^n}^{\tau_{j+1}^n} f(t', u_n(t'))dt' - \int_{\tau_k^n}^t f(t', u_n(t'))dt' \\
&= \int_{\tau_k^n}^t (f(\tau_k^n, u_k^n) - f(t', u_n(t'))dt' + \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\tau_j^n}^{\tau_{j+1}^n} (f(\tau_j^n, u_j^n) - f(t' u_n(t')))dt' \\
&= \int_{\tau_k^n}^t (f(\tau_k^n, u_n(\tau_k^n)) - f(t', u_n(t')))dt' + \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\tau_j^n}^{\tau_{j+1}^n} (f(\tau_j^n, u_n(\tau_j^n)) - f(t', u_n(t')))dt'
\end{aligned}$$

と表される。ここで $0 \leq j \leq k$ なる任意の $j$ に対し

$$\begin{aligned}
&\sup\{|\tau_j^n - t'|; \tau_j^n \leq t' \leq \tau_{j+1}^n\} = \tau_{j+1}^n - \tau_j^n \leq |\Delta_n| < \delta, \\
&\max_{1 \leq i \leq m} \sup\{|\langle \ell_i, u_n(\tau_j^n) - u_n(t') \rangle|; \tau_j^n \leq t' \leq \tau_{j+1}^n\} \\
&\leq \max_{1 \leq i \leq m} \|\ell_i\| \sup\{\|u_n(\tau_j^n) - u_n(t')\|; \tau_j^n \leq t' \leq \tau_{j+1}^n\} \\
&\leq \max_{1 \leq i \leq m} \|\ell_i\| \sup\{M|\tau_j^n - t'|; \tau_j^n \leq t' \leq \tau_{j+1}^n\} \\
&= \max_{1 \leq i \leq m} \|\ell_i\| M |\tau_{j+1}^n - \tau_j^n| \\
&\leq \max_{1 \leq i \leq m} \|\ell_i\| M |\Delta_n| < \delta
\end{aligned}$$

となるので任意の $n \geq N$ に対し

$$
\begin{aligned}
& |\langle \ell, u_n(t) - u_0 - \int_{t_0}^{t} f(t', u_n(t'))dt' \rangle| \\
&= |\int_{\tau_k^n}^{t} \langle \ell, f(\tau_k^n, u_n(\tau_k^n)) - f(t', u_n(t')) \rangle dt' \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\tau_j^n}^{\tau_{j+1}^n} \langle \ell, f(\tau_j^n, u_n(\tau_j^n)) - f(t', u_n(t')) \rangle dt' | \\
&\leq \sum_{j=0}^{k} \int_{\tau_j^n}^{\tau_{j+1}^n} |\langle \ell, f(\tau_j^n, u_n(\tau_j^n)) - f(t', u_n(t')) \rangle| dt' \\
&\leq \sum_{j=0}^{k} \int_{\tau_j^n}^{\tau_{j+1}^n} \varepsilon \, dt' = \varepsilon(\tau_{k+1}^n - \tau_0^n) \leq \varepsilon T
\end{aligned}
$$

なる評価を得る。右辺は $t \in I$ について一様である。

一方、各 $t \in I$ に対し

$$\langle \ell, u_n(t) \rangle \ \to \ \langle \ell, u(t) \rangle$$

であり $f$ の弱連続性より各 $t \in I$ に対し

$$\langle \ell, f(t, u_n(t)) \rangle \ \to \ \langle \ell, f(t, u(t)) \rangle$$

及び

$$|\langle \ell, f(t, u_n(t)) \rangle| \leq \|\ell\| M$$

となるから有界収束定理を用いて $n \to \infty$ なる極限を取る事により

$$|\langle \ell, u(t) - u_0 - \int_{t_0}^{t} f(t', u(t'))dt' \rangle| \leq \varepsilon T$$

を得る。$\varepsilon > 0$ は任意であり $\ell \in X'$ も任意であるから

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(t', u(t'))dt', \ t \in I$$

が成立つ。$f$ の弱連続性より $u$ の弱可微分性が従い

$$u'(t) = f(t, u(t)), \ t \in I$$

を得る。

**定理２の系**　　$X$ を反射的バナッハ空間とし $t_0 \in \mathbb{R}$ 及び $u_0 \in X$ を与える。$a, b > 0$ に対し $D = [t_0, t_0 + a] \times \overline{B(u_0; b)}$ と置く。写像 $f : D \to X$ は弱連続であるとする。このとき $f(D)$ は有界であり

$$M = \sup\{\|f(t, u)\|; (t, u) \in D\}$$

と置く。$I = [t_0, t_0 + T]$, $T = \min(a, b/M)$ とする。このとき $u \in (C \cap C_w^1)(I; X)$ が存在して $u(t_0) = u_0$ 及び任意の $t \in I$ に対して

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

を満たす。ここに $u'$ は $u$ の弱導函数である。

（証明）　$f(D)$ が弱相対点列コンパクト集合である事を示せば充分である。$D$ は反射的バナッハ空間 $\mathbb{R}\times X$ の有界閉であるから弱点列コンパクトである。$f:D\to X$ は弱連続であるから弱点列コンパクト集合 $D$ の像 $f(D)$ は弱相対点列コンパクトである。

**定理３（コンパクト相速度ベクトル場の下での解の存在）**　$X$ をバナッハ空間とし $t_0\in\mathbb{R}$ 及び $u_0\in X$ を与える。$a,b>0$ に対し $D=[t_0,t_0+a]\times\overline{B(u_0;b)}$ と置く。写像 $f:D\to X$ は連続で $f(D)$ は $X$ の相対点列コンパクト集合であるとし

$$M=\sup\{\|f(t,u)\|;(t,u)\in D\}$$

と置く。$I=[t_0,t_0+T]$, $T=\min(a,b/M)$ とする。このとき $u\in C^1(I;X)$ が存在して $u(t_0)=u_0$ 及び任意の $t\in I$ に対して

$$u'(t)=f(t,u(t))$$

を満たす。

（証明）　定理２と同様に近似解の列 $\{u_n\}\subset C(I;X)$ を定める。任意の $t,s\in I$ に対し $\|u_n(t)-u_n(s)\|\leq M|t-s|$ が成立ち、任意の $t\in I$ に対して $(t,u_n(t))\in D$ となる。狭義単調増加 $\rho:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{Z}_{>0}$ による部分列 $\{u_{\rho(n)}\}$ 及び $u\in C(I;X)$ が存在し各 $t\in I$ に対し $\{u_{\rho(n)}(t)\}$ は $u(t)$ に $X$ で収束する。特に $u(t_0)=u_0$ であり任意の $t,s\in I$ に対し $u$ は不等式 $\|u(t)-u(s)\|\leq M|t-s|$ を満たす。$X$ の部分集合 $K=u(I)\cup\bigcup_{n\geq 1}u_n(I)$ はコンパクトであるから $I\times K\ni(t,y)\mapsto f(t,y)\in X$ は一様連続となる。以下では簡単の為に $\{u_{\rho(n)}\}$ を改めて $\{u_n\}$ と表す。このとき $t\in[\tau_k^n,\tau_{k+1}^n]$ なる $0\leq k\leq N(n)-1$ に対し

$$\begin{aligned}
&u(t)-u_0-\int_{t_0}^t f(t',u(t'))\,dt'\\
&=(u(t)-u_n(t))+(u_n(t)-u_0-\int_{t_0}^t f(t',u_n(t'))\,dt')+\int_{t_0}^t (f(t',u_n(t'))-f(t',u(t')))\,dt'\\
&=u(t)-u_n(t)\\
&\quad+\int_{\tau_k^n}^t (f(\tau_k^n,u_n(\tau_k^n))-f(t',u_n(t')))\,dt'+\sum_{j=0}^{k-1}\int_{\tau_j^n}^{\tau_{j+1}^n}(f(\tau_j^n,u_n(\tau_j^n))-f(t',u_n(t')))\,dt'\\
&\quad+\int_{t_0}^t (f(t',u_n(t'))-f(t',u(t')))\,dt'
\end{aligned}$$

と表せば

$$
\begin{aligned}
&\|u(t)-u_0-\int_{t_0}^{t} f(t',u(t'))\,dt'\| \\
&\le \|u(t)-u_n(t)\| + \sum_{j=0}^{k}\int_{\tau_j^n}^{\tau_{j+1}^n} \|f(\tau_j^n,u_n(\tau_j^n))-f(t',u_n(t'))\|\,dt' \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \|f(t',u_n(t'))-f(t',u(t'))\|\,dt' \\
&\le \|u(t)-u_n(t)\| + \sup_{|t'-t''|\le|\Delta_n|} \|f(t',u_n(t'))-f(t'',u_n(t''))\|\cdot\sum_{j=0}^{k}(\tau_{j+1}^n-\tau_j^n) \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \|f(t',u_n(t'))-f(t',u(t'))\|\,dt' \\
&\le \|u(t)-u_n(t)\| + \sup_{\substack{|t'-t''|\le|\Delta_n| \\ |y'-y''|\le M|\Delta_n|}} \|f(t',y')-f(t'',y'')\|\cdot T \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \|f(t',u_n(t'))-f(t',u(t'))\|\,dt' \\
&\to 0 \ \ (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

が従う。ここに $f: I\times K\to X$ の一様連続性と有界収束定理を用いた。よって $u$ は積分方程式の解となる。

参考文献：

新井朝雄、物理現象の数学的諸原理 －現代数理物理学入門－、共立出版

増田久弥、非線型数学、朝倉書店

増田久弥、応用解析ハンドブック、シュプリンガージャパン

S. Kato, On existence and uniqueness conditions for nonlinear ordinary differential equations in Banach spaces, Funkcialaj Ekvacioj **19**(1976) 239-245.

A. Szép, Existence theorem for weak solutions of ordinary differetial equations in reflexive Banach spaces, Studia Sci. Math. Hungar. **6**(1971) 197-203.