論理と集合

平成 20 年 12 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

1. 命題論理

論理的に**正しい**か**正しくない** (間違っている) か判定可能な叙述を「命題」という。命題は**正しい**か**正しくない** (間違っている) かのどちらか一方しか起こらない。形式論理とは論理的な推論の構造を議論するもので

同一律 (law of identity)
A は A である

矛盾律 (law of contradiction)
一つの命題「A は B である」とその否定命題「A は B でない」は
共に成立する事も共に成立しない事も出来ない。

排中律 (law of excluded middles)
命題は成立するか成立しないかのどちらか以外は起こらない。

の三大原則を基礎としている。命題は正しいとき**真** (true)、正しくないとき**偽** (false) であるという (狭義では正しい命題のみを命題と呼ぶ)。命題に対して基本的な操作は次の通りである。

否定 命題 P に対し「P でない」も命題であり
P は偽のとき「P でない」は真
P は真のとき「P でない」は偽と定める。
「P でない」を $\neg P$ と書く。

且つ 二つの命題 P と Q に対し
P と Q 共に真であるとき「P かつ Q」は真
それ以外 (P と Q のうち少なくとも一方が偽) のとき「P かつ Q」は偽と定める。
「P かつ Q」を $P \wedge Q$ と書く。

又は 二つの命題 P と Q に対し
P と Q のうち少なくとも一方が真であるとき「P または Q」は真
それ以外 (P と Q 共に偽) のとき「P または Q」は偽と定める。
「P または Q」を $P \vee Q$ と書く。

ならば 二つの命題 P と Q に対し
P と Q 共に真であるとき「P ならば Q」は真

P は真で Q は偽であるとき「P ならば Q」は偽
P が偽であるとき「P ならば Q」は真と定める。
「P ならば Q」を $P \Rightarrow Q$ と書く。
$P \Rightarrow Q$ が真の場合 P を Q の**充分条件**、Q を P の**必要条件**という。

同値 二つの命題 P と Q に対し
「$P \Rightarrow Q$ かつ $Q \Rightarrow P$」が真であるとき「P と Q は同値」は真
それ以外のとき「P と Q は同値」は偽と定める。
「P と Q は同値」を $P \Leftrightarrow Q$ と書く。

以上を纏めると次の表になる。

表 1:

P	Q	$\neg P$	$\neg\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
真	真	偽	真	真	真	真	真	真
真	偽	偽	真	偽	真	偽	真	偽
偽	真	真	偽	偽	真	真	偽	偽
偽	偽	真	偽	偽	偽	真	真	真

- 矛盾律とは「$P \wedge (\neg P)$ は偽」の事である。
- 排中律とは「$P \vee (\neg P)$ は真」の事である。

- 「$P \Rightarrow Q$」と「$(\neg P) \vee Q$」とは同値である。
- 「$P \Rightarrow Q$」とその**対偶**「$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$」とは同値である。

実際、次の表のようにこれらの真偽は一致する。

表 2:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	真
偽	偽	真

表 3:

P	Q	$\neg P$	$(\neg P) \vee Q$
真	真	偽	真
真	偽	偽	偽
偽	真	真	真
偽	偽	真	真

表 4:

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
真	真	偽	偽	真
真	偽	真	偽	偽
偽	真	偽	真	真
偽	偽	真	真	真

- 「$P \Rightarrow Q$」とその対偶「$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$」との同値性を仮定すると

  「真 $\Rightarrow$ 真」は真

  と

  「偽 $\Rightarrow$ 偽」は真

  との同値性が従う。

- 「$\neg(P \Rightarrow Q)$」と「$P \wedge (\neg Q)$」とは同値である。

実際、次の表のようにこれらの真偽は一致する。

表 5:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$
真	真	真	偽
真	偽	偽	真
偽	真	真	偽
偽	偽	真	偽

表 6:

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge (\neg Q)$
真	真	偽	偽
真	偽	真	真
偽	真	偽	偽
偽	偽	真	偽

- 「$P \Leftrightarrow Q$」と「P, Q 共に真　または　P, Q 共に偽」とは同値である。
  これは表 1 から従う。

- 「$P \Rightarrow Q$　かつ　$(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$」は「$P \Leftrightarrow Q$」と同値である。
  これは「$(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$」の対偶が「$Q \Rightarrow P$」であることから従う。

- 「$\neg(P \wedge Q)$」と「$(\neg P) \vee (\neg Q)$」は同値である (de Morgan の法則)。

実際、次の表のようにこれらの真偽は一致する。

表 7:

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$
真	真	真	偽
真	偽	偽	真
偽	真	偽	真
偽	偽	偽	真

表 8:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
真	真	偽	偽	偽
真	偽	偽	真	真
偽	真	真	偽	真
偽	偽	真	真	真

- 「$\neg(P \vee Q)$」と「$(\neg P) \wedge (\neg Q)$」は同値である (de Morgan の法則)。

実際、次の表のようにこれらの真偽は一致する。

表 9:

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$
真	真	真	偽
真	偽	真	偽
偽	真	真	偽
偽	偽	偽	真

表 10:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
真	真	偽	偽	偽
真	偽	偽	真	偽
偽	真	真	偽	偽
偽	偽	真	真	真

2. 述語論理

変数 x を含む命題 P について「x は P を満たす」「x は性質 P を持つ」と云った形で変数 x に注目して考える場合、P を x についての述語といい $P(x)$ と表す事がある。

任意の 「任意の x に対し $P(x)$ が成立する」「全ての x に対し $P(x)$ が成立する」と云う命題を

$$\forall x,\ P(x)$$

と書く。

或る 「或る x について $P(x)$ が成立する」「或る x に対し $P(x)$ が成立する」「$P(x)$ が成立するような x が存在する」と云う命題を

$$\exists x : P(x)$$

と書く。

「全ての x に対し $P(x)$ が成立する」の否定は「$P(x)$ が成立しないような例外 x がある」「或る x について $P(x)$ は成立しない」と云う事だから

$$\neg(\forall x,\ P(x)) \Leftrightarrow \exists x;\ \neg P(x)$$

「或る x に対し $P(x)$ が成立する」の否定は「$P(x)$ が成立するような例外 x は存在しない」「例外無く $P(x)$ は成立しない」「全ての x に対し $P(x)$ は成立しない」と云う事だから

$$\neg(\exists x;\ P(x)) \Leftrightarrow \forall x,\ \neg P(x)$$

3. 集合と論理

数学的対象の集まりを**集合**、その構成要素をその集合の**元**または**要素**という。集合 A は元 x を持つとき x は A に属するといい

$$x \in A \quad \text{或いは} \quad A \ni x$$

と書く。この否定命題「x は A に属さない」「x は A の元でない」を

$$x \notin A \quad \text{或いは} \quad A \not\ni x$$

と書く。

変数 x に関する述語 $P(x)$ を満たす x の全体を

$$\{x; P(x)\}$$

と表す。集合 X の元のうち $P(x)$ を満たす x の全体を

$$\{x \in X; P(x)\}$$

と表す。

集合 A に対し

$$x \in A \Leftrightarrow P(x) \text{ は真}$$

とすれば任意の集合はこの形で表される。

集合の相等 二つの集合 A と B が等しいとは元が一致している事とする：
$A = B \Leftrightarrow [\forall a \in A,\ a \in B \quad \text{かつ} \quad \forall b \in B,\ b \in A]$

空集合 要素を持たない集合を**空集合**といい $\emptyset$ と表す。

部分集合 二つの集合 A と B に対し A は B の部分集合であるとは

$$\forall a \in A,\ a \in B$$

である事をいう。A は B の部分集合である事を $A \subset B$ 或いは $B \supset A$ と表す。よって

$$A = B \Leftrightarrow \text{「}A \subset B \quad \text{かつ} \quad B \subset A\text{」}$$

真部分集合 A は B の部分集合であり A と B は等しくないとき A は B の真部分集合といい $A \underset{\neq}{\subset} B$ 或いは $B \underset{\neq}{\supset} A$ と表す。よって

$$A \underset{\neq}{\subset} B \Leftrightarrow \text{「}A \subset B \quad \text{かつ} \quad A \neq B\text{」}$$

任意の集合は空集合を部分集合として持つと考える：$\emptyset \subset A$

$P \Rightarrow Q$ と集合の包含関係

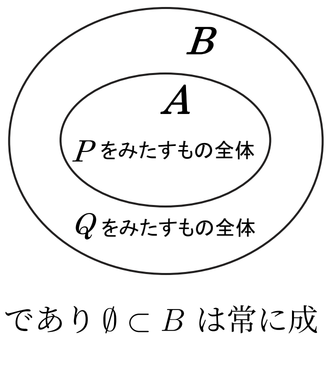
P や Q が変数を含む形で表されている場合

$$A = \{x; P(x)\}, \quad B = \{x; Q(x)\}$$

と置けば

$$P \Rightarrow Q \quad \text{と} \quad A \subset B$$

は同値である。充分条件と必要条件は集合の包含関係に置き換えて考えると理解し易くなる事がある。仮定 P が偽ならば $A = \emptyset$ であり $\emptyset \subset B$ は常に成立するので $P \Rightarrow Q$ は常に成立する事になる。



参考文献： 杉浦光夫、解析入門 I、 東京大学出版会
小室直樹、数学嫌いな人のための数学、東洋経済