環上の行列

平成 19 年 12 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

環 R、$m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $M(m, n; R)$ を $([1, m] \cap \mathbb{Z}) \times ([1, n] \cap \mathbb{Z})$ から R への写像の全体とする。$A, B \in M(m, n; R),\ a \in R$ に対し

$$\begin{aligned} (A+B)(i,j) &= A(i,j) + B(i,j), \qquad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n, \\ (aA)(i,j) &= aA(i,j), \qquad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \end{aligned}$$

と定めると $M(m, n; R)$ は R-加群となる。$A \in M(m, n; R)$ に対し $a_{ij} = A(i, j)$ と置いて矩形 (長方形) に並べたものを行列と謂う。$A \in M(\ell, m; R),\ B \in M(m, n; R)$ に対し

$$(AB)(i,j) = \sum_{k=1}^{m} A(i,k)B(k,j), \quad 1 \le i \le \ell,\ 1 \le j \le n,$$

と定めると A と B の積 $AB \in M(\ell, n; R)$ が定まる。特に $\ell = m = n$ の場合 $M(n; R) \equiv M(m, n; R)$ は環となり、$a \in R$ に対し

$$(\iota(a))(i,j) = \begin{cases} a, & i = j, \\ 0, & i \ne j, \end{cases}$$

と定めると $\iota(a) \in M(n; R)$ となり $\iota : R \to M(n; R)$ は準同型単射であり自然な埋め込みを与える。R が単位元 e を持つ環の場合 $\iota(e)$ を単位行列と謂う。

参考文献： 彌永昌吉、小平邦彦、現代数学概説、岩波書店