作用素の族の極大作用素

平成 20 年 8 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

$\mathbb{R}^n$ 上の局所可積分函数に対する極大函数の方法は、様々な積分作用素の L^p 有界性や (殆ど至る所の) 各点収束を証明する為に有効である。ここでは極大函数の方法を用いて各点収束を示す一般的な枠組を考えてみよう。

(X,μ) を測度空間とし $\mathrm{Meas}(X,\mu)$ を X 上の μ-可測複素数値函数の成す空間とする。$0<p<\infty$ に対し $L^p(X,\mu)\subset \mathrm{Meas}\ (X,\mu)$ を、その絶対値の p 乗が可積分である函数の成す空間、$L^\infty(X,\mu)\subset$ Meas (X,μ) を本質的有界な函数の成す空間とする。測度 μ に関する零集合を除いて等しい函数は $L^p(X,\mu)(0<p\le\infty)$ では等しいものと考える。$L^p(X,\mu)$ の準ノルムは

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}, & 0<p<\infty \\ \inf\{m>0; \mu(|f|^{-1}(m,\infty))=0\}, & p=\infty \end{cases}$$

で定義される。$1\le p\le\infty$ ならば $L^p(X,\mu)$ はバナッハ空間、$0<p<1$ ならば $L^p(X,\mu)$ は準バナッハ空間を成す。$0<p<\infty$ に対し弱 $L^p(X,\mu)$ 空間 ($L^{p,\infty}(X,\mu)$ 空間) を

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} = \sup_{t>0} t(\mu(|f|^{-1}(t,\infty)))^{1/p}$$

が有限な $f\in$ Meas (X,μ) の成す空間とする。$(X,\mu),(Y,\nu)$ を二つの測度空間、$0<p\le\infty,\ 0<q<\infty$ とし $L^p(X,\mu)$ から $\mathrm{Meas}(Y,\nu)$ への準線型作用素の族 $\{T_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ を考える。ここで写像 $T: L^p(X,\mu)\to$ Meas (Y,ν) が準線型であるとは定数 $K>0$ が在って $f,g\in L^p(X,\mu)$ に対し $T(f+g)\in$ Meas (Y,ν) は Y 上

$$|T(f+g)| \le K(|Tf|+|Tg|)$$

を満たす事を謂う。さて $f\in L^p(X,\mu),\ y\in Y$ に対し

$$\left(\sup_{\varepsilon>0}|T_\varepsilon f|\right)(y) = \sup_{\varepsilon>0}|(T_\varepsilon f)(y)|$$

と置いて $\sup\limits_{\varepsilon>0}|T_\varepsilon f|\in$ Meas (Y,ν) が定まるものとする。

命題１． $0<p\le\infty, 0<q<\infty$ とし $L^p(X,\mu)$ から $L^{q,\infty}(Y,\nu)$ への準線型有界作用素の族 $\{T_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ は次の条件 (a),(b) を満たすものとする：

(a) 準線型性を示す定数 K は $\varepsilon>0$ に対して一様に取れる。

(b) 極大作用素は弱 (p,q) 型である。即ち定数 $C>0$ が在って任意の $f\in L^p(X,\mu)$ に対し次の評価が成立つ：

$$\|\sup_{\varepsilon>0}|T_\varepsilon f|\|_{L^{q,\infty}(Y,\nu)}\le C\|f\|_{L^p(X,\mu)}$$

このとき次は同値である。

(1) $L^p(X,\mu)$ で稠密な集合 $\mathscr{D}$ が存在して任意の $f\in\mathscr{D}$ に対し殆ど至る所 $\lim_{\varepsilon\to0}T_\varepsilon f=0$ 即ち

$$\nu(\{y\in Y;\limsup_{\varepsilon\to0}|(T_\varepsilon f)(y)|>0\})=0$$

(2) 任意の $f\in L^p(X,\mu)$ に対し殆ど至る所 $\lim_{\varepsilon\to0}T_\varepsilon f=0$

(証明) (1)⇒(2) を示せば良い。$f\in L^p(X,\mu),n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$P_n=\{y\in Y;\limsup_{\varepsilon\to0}|(T_\varepsilon f)(y)|>1/n\}$$

と置く。このとき $\nu(P_n)=0$ を示せば充分である。実際

$$\begin{aligned}&\nu(\{y\in Y;\limsup_{\varepsilon\to0}|(T_\varepsilon f)(y)|>0\})\\&=\nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty P_n\right)\le\sum_{n=1}^\infty\nu(P_n)=0\end{aligned}$$

となるからである。仮定 (1) により任意の $\delta>0$ に対し $g\in\mathscr{D}$ を取って $\|f-g\|_{L^p(X,\mu)}<\delta$ 且つ $\nu(P)=0$ と出来る。ここに

$$P=\{y\in Y;\limsup_{\varepsilon\to0}|(T_\varepsilon g)(y)|>0\}$$

とする。さて $P_n=(P_n\setminus P)\cup(P_n\cap P)$ より

$$\begin{aligned}\nu(P_n)&=\nu(P_n\setminus P)+\nu(P_n\cap P)\\&\le\nu(P_n\setminus P)+\nu(P)=\nu(P_n\setminus P)\end{aligned}$$

となるので $\nu(P_n\setminus P)=0$ を示せば充分である。
　仮定 (1) により任意の $\varepsilon>0$ に対し Y 上

$$|T_\varepsilon f|\le K(|T_\varepsilon(f-g)|+|T_\varepsilon g|)$$

であり $y\notin P\Leftrightarrow\lim_{\varepsilon\to0}|(T_\varepsilon g)(y)|=0$ であるから仮定 (2) を用いて

$$\begin{aligned}&\nu(P_n\setminus P)\\&=\nu(\{y\in Y\setminus P;\limsup_{\varepsilon\to0}|(T_\varepsilon f)(y)|>1/n\})\\&\le\nu(\{y\in Y\setminus P;\limsup_{\varepsilon\to0}K|(T_\varepsilon(f-g))(y)|>1/n\})\\&\le\nu(\{y\in Y\setminus P;\sup_{\varepsilon>0}|(T_\varepsilon(f-g))(y)|>1/nK\})\\&\le(CnK\|f-g\|_{L^p(X,\mu)})^q<(C_nK\delta)^q\end{aligned}$$

を得る。$\delta>0$ は任意故 $\nu(P_n \setminus P)=0$ が従う。

命題１を応用してハーディ・リトルウッドの極大函数の弱 (1,1) 型有界性からルベーグの微分定理を導こう。

命題２．(ルベーグの微分定理) $1 \le p < \infty,\ f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ とすると殆ど全ての $x \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|} \int_{B(x,\varepsilon)} |f(y)-f(x)|^p dy = 0$$

が成り立つ。ここに $B(x,\varepsilon)=\{y\in\mathbb{R}^n; |x-y|<\varepsilon\},\ |B(x,\varepsilon)|$ は $B(x,\varepsilon)$ のルベーグ測度とする。

(証明) $X=\mathbb{R}^n$ とする。$f \in L^p_{\mathrm{loc}}(X),\ \varepsilon>0, x\in X$ に対し

$$(S_\varepsilon f)(x) = \sup_{x'\in B(x,\varepsilon)} \left(\frac{1}{|B(x',\varepsilon)|} \int_{B(x',\varepsilon)} |f(y)-f(x)|^p dy \right)^{1/p}$$

と置く。$S_\varepsilon(f+g) \le S_\varepsilon f + S_\varepsilon g$ より S_ε は劣線型である。$x\in X$ に対し、三角不等式とヘルダーの不等式より

$$\begin{aligned}
(S_\varepsilon f)(x) &\le \sup_{x'\in B(x,\varepsilon)} \frac{1}{|B(x',\varepsilon)|^{1/p}} (\|f\|_{L^p(B(x',\varepsilon))} + |f(x)||B(x',\varepsilon)|^{1/p}) \\
&= \sup_{x'\in B(x,\varepsilon)} \left(\frac{1}{|B(x',\varepsilon)|} \int_{B(x',\varepsilon)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} + |f(x)| \\
&\le (M(|f|^p)(x))^{1/p} + |f(x)|
\end{aligned}$$

を得る。ここに M はハーディ・リトルウッドの極大作用素

$$(Mf)(x) = \sup_{\varepsilon>0} \sup_{y\in B(x,\varepsilon)} \frac{1}{|B(y,\varepsilon)|} \|f\|_{L^1(B(y,\varepsilon))}$$

とする。よって

$$\sup_{\varepsilon>0} |S_\varepsilon f_N| \le (M(|f|^p))^{1/p} + |f|$$

となる。さて $N\ge 1,\ \varepsilon>0$ に対し $T_\varepsilon^{(N)} = \chi_N S_\varepsilon \chi_N,\ \chi_N = \chi_{B(0,N)}$ と置く。上記の議論により $T_\varepsilon^{(N)}$ は劣線型であり $\sup\limits_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon^{(N)} f| \le \chi_N (M\chi_N |f|^p)^{1/p} + |\chi_N f|$ が成立つ。よって

$$\begin{aligned}
\|\sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon^{(N)} f|\|_{L^{p,\infty}(X)} &= \sup_{t>0} t|\{x\in X; \sup_{\varepsilon>0} |(T_\varepsilon^{(N)} f)(x)| > t\}|^{1/p} \\
&\le \sup_{t>0} t|\{x\in X; (M(|f|^p)(x))^{1/p} > t/2\}|^{1/p} \\
&\quad + \sup_{t>0} t|\{x\in X; |\chi_N f(x)| > t/2\}|^{1/p} \\
&= 2\left(\sup_{s>0} s|\{x\in X; M(|f|^p)(x) > s\}| \right)^{1/p} \\
&\quad + 2\sup_{s>0} s|\{x\in X; |\chi_N f(x)| > s\}|
\end{aligned}$$

となり、最右辺に M の弱 (1,1) 有界性とチェビシェフとヘルダーの不等式を用いると

$$
\begin{aligned}
\|\sup_{\varepsilon>0}|T_\varepsilon^{(N)}f|\|_{L^{p,\infty}(X)} &\leq C\||f|^p\|_{L^1(X)}^{1/p} + C\|\chi_N f\|_{L^1(X)} \\
&\leq C\|f\|_{L^p(X)} + CN^{n/p'}\|f\|_{L^p(X)}
\end{aligned}
$$

を得る。よって命題１の (a)(b) は $L^p(X), L^{p,\infty}(X)$ に対し成立し命題１の (1) は $\mathscr{D} = C(X)$ に対して成立するので $P_N = \{x \in X; \limsup_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon^{(N)}f)(x) > 0\}$ と置くとき $|P_N| = 0$ である。

$$
P = \{x \in X; \lim_{\varepsilon\to 0}(S_\varepsilon f)(x) > 0\} = \bigcup_{N=1}^{\infty} P_N
$$

であるから $|P| = 0$ が従う。

参考文献： 宮島静雄、ソボレフ空間の基礎と応用、共立出版
L. Grafakos, Classical and Modern Fourier Analysis, Pearson
E.M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton