実数値連続函数の最大値・最小値の存在

平成 20 年 11 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

X を集合、$f : X \to \mathbb{R}$ を函数とする。

定義 1. $f : X \to \mathbb{R}$ は**最大値**を持つとは $x_0 \in X$ が存在して任意の $x \in X$ に対し $f(x) \leq f(x_0)$ となる事を謂う。

定義 2. $f : X \to \mathbb{R}$ は**最小値**を持つとは $x_0 \in X$ が存在して任意の $x \in X$ に対し $f(x) \geq f(x_0)$ となる事を謂う。

例 1. $X = \mathbb{R}, f(x) = \cos x$ は最大値も最小値も持つ。最大値は 1 で最大値を与える点の集合は $\{2m\pi; m \in \mathbb{Z}\}$ であり最小値は -1 で最小値を与える点の集合は $\{(2m-1)\pi; m \in \mathbb{Z}\}$ である。

例 2. $X = \mathbb{R}, f(x) = 1/(1+x^2)$ は最大値を持つが最小値を持たない。最大値は 1 で最大値を与える点の集合は一点のみから成る $\{0\}$ である。

例 3. $X = \mathbb{R}, f(x) = x^2$ は最小値を持つが最大値を持たない。最小値は 0 で最小値を与える点の集合は一点のみから成る $\{0\}$ である。

例 4. $X = \mathbb{R}, f(x) = e^x$ は最大値も最小値も持たない。

例 5. $X = (0, 1],\ f(x) = 1/x$ は最小値を持つが最大値を持たない。最小値は 1 で最小値を与える点の集合は一点のみから成る $\{1\}$ である。

例 6. $X = (-1, 1),\ f(x) = -1/(1-x^2)$ は最大値を持つが最小値を持たない。最大値は -1 で最大値を与える点の集合は一点のみから成る $\{0\}$ である。

例 7. $X = \mathbb{R}, f(x) = \exp(-1/(1-x^2))\chi_{(-1,1)}(x)$ は最大値も最小値も持つ。最大値は 1 で最大値を与える点の集合は一点のみから成る $\{0\}$ であり最小値は 0 で最小値を与える点の集合は $\mathbb{R} \setminus (-1, 1) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ である。

例 8. $X = (0, 1)\ f(x) = \sin(1/x)$ は最大値も最小値も持つ。最大値は 1 で最大値を与える点の集合は $\{1/((2m + \frac{1}{2})\pi); m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ であり最小値は -1 で最小値を与える点の集合は $\{1/((2m + \frac{3}{2})\pi); m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ である。

上記の例では函数は全て連続である。空間 X は例 1,2,3,4,7 では非有界、例 6,8 では有界開集合、例 5 では有界だが開でも閉でもない。これらは「有界閉区間上の実数値連続函数は最大値及び最小値を持つ」と云う微分積分学で良く知られた定理に於いて「有界閉区間」なる仮定を外した場合に起こる具体例である。ここでは X を一般化した場合を考えよう。

定理１　コンパクト集合上の連続函数は最大値及び最小値を持つ。

定理２　点列コンパクト集合上の連続函数は最大値及び最小値を持つ。

定理１の証明 (その１)　$x \in X$ に対し $V_x = f^{-1}((-\,|f(x)|-1,\ |f(x)|+1))$ と置くと $(-\,|f(x)|+1, |f(x)|+1) \subset \mathbb{R}$ は $f(x)$ を含む開区間であり $f : X \to \mathbb{R}$ は連続であるから V_x は x を含む X の開集合である。よって $\{V_x \subset X; x \in X\}$ は X の開被覆となる。X のコンパクト性により有限集合 I が在って $\{x_i; i \in I\} \subset X,\ \{V_{x_i}; i \in I\}$ は X の有限開被覆となる：$X = \displaystyle\bigcup_{i \in I} V_{x_i}$

$$
\text{これより}\quad F(X) = \bigcup_{i \in I} f(V_{x_i}) \;\subset\; \bigcup_{i \in I}(-\,|f(x_i)|-1,\ |f(x_i)|+1) \;=\; (-\max_{i \in I}|f(x_i)|-1,\ \max_{i \in I}|f(x_i)|+1)
$$

となり $f(X)$ は $\mathbb{R}$ の有界集合となる。ワイエルストラスの上限及び下限の存在定理により $\sup f(X)(\equiv M)$ 及び $\inf f(X)(\equiv m)$ が実数として定まる。そこで M 及び m が夫々f の最大値及び最小値として実現する事を示そう。$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $F_n = f^{-1}([M - 1/n,\ M])$ と置くと、上限の性質より任意の n に対し $x_n \in X$ が存在して $M - 1/n < f(x_n) \le M$ となるから $F_n \neq \emptyset$ である。f の連続性より F_n は X の閉集合であり、定義により $\{F_n\}$ は単調減少列である：$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \cdots$
X のコンパクト性により $\displaystyle\bigcap_{n \ge 1} F_n \neq \emptyset$ となるので $x \in \displaystyle\bigcap_{n \ge 1} F_n$ を取ると定義により x は任意の n に対し $M - 1/n \le f(x) \le M$ を満たす。故に $f(x) = M$ となる。即ち M は f の最大値となり、それは x によって実現する。同様の論法により m は f の最小値でありそれを実現する点が存在する事も分かる。

定理１の証明 (その２)　$f(X)$ の有界性を証明その１と別な方法で示そう。$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $V_n = f^{-1}((-n, n))$ と置くと f の連続性により V_n は X の開集合であり $\mathbb{R} = \displaystyle\bigcup_{n \ge 1}(-n, n)$ により $X = f^{-1}(\mathbb{R}) = \displaystyle\bigcup_{n \ge 1} f^{-1}((-n, n)) = \bigcup_{n \ge 1} V_n$ となるので $\{V_n; n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ は X の開被覆である。X のコンパクト性により $\{V_n; n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ の有限部分被覆で X を覆う事が出来る。その様な n の最大値を N とすれば $f(X) \subset (-N, N)$ となる。

定理１の証明 (その３)　$M \equiv \sup f(X)$ 及び $m \equiv \inf f(X)$ が夫々f の最大値及び最小値として実現する事を証明その１と別の方法で示そう。M が最大値でないと仮定して矛盾を導く。仮定により任意の $x \in X$ に対し $f(x) < M$ となるので $0 < \varepsilon_x < M - f(x)$ なる ε_x を選ぶ事が出来る。この時 f の連続性により x の開近傍 U_x を取り $f(U_x) \subset (f(x) - \varepsilon_x, f(x) + \varepsilon_x)$ とする事が出来る。こうして出来た $\{U_x \subset X; x \in X\}$ は X の開被覆なので X のコンパ

クト性より有限集合 I を取って $\{x_i; i \in I\} \subset X,\ \{U_{x_i}; i \in I\}$ は X の有限開被覆とする事が出来る：$X = \bigcup_{i \in I} U_{x_i}$

$$
\begin{aligned}
\text{これより} \quad f(X) = \bigcup_{i \in I} f(U_{x_i}) \quad &\subset \quad \bigcup_{i \in I} (f(x_i) - \varepsilon_{x_i},\ f(x_i) + \varepsilon_{x_i}) \\
&= \quad (\min_{i \in I}(f(x_i) - \varepsilon_{x_i}),\ \max_{i \in I}(f(x_i) + \varepsilon_{x_i}))
\end{aligned}
$$

となる。即ち $M' \equiv \max_{i \in I}(f(x_i) + \varepsilon_{x_i})$ は $f(X)$ の一つの上界となる。一方、任意の $x \in X$ に対し $f(x) + \varepsilon_x < M$ であったから $M' < M$ となり M の最小性即ち $M = \sup f(X)$ なる事に反する。f の最小値が m で実現する事も同様にして従う。

定理１の証明 (その４)　連続写像によるコンパクト集合の像はコンパクトであり $\mathbb{R}$ のコンパクト部分集合は有界閉集合となる。$f(X)$ は有界であるからワイエルストラスの上限及び下限の存在定理より $\sup f(X)$ 及び $\inf f(X)$ が実数として定まる。これらは $f(X)$ の触点であり $f(X)$ は閉集合であるから $\sup f(X) \in \overline{f(X)} = f(X),\ \inf f(X) \in \overline{f(X)} = f(X)$ となる。よって $\sup f(X)$ は最大値で $\inf f(X)$ は最小値である。

定理２の証明 (その１)　先ず $f(X)$ の有界性を示そう。もしそうでないとすると任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $x_n \in X$ が在って $|f(x_n)| \geq n$ となる。X の点列コンパクト性より部分列 $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ 及び $x_0 \in X$ を取って

$$
\begin{aligned}
&1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_j \to \infty \ (j \to \infty) \\
&x_{n_j} \to x_0 \ (j \to \infty)
\end{aligned}
$$

と出来る。f の連続性より $|f(x_{n_j})| \to |f(x_0)| (j \to \infty)$ となる。一方 $|f(x_{n_j})| \geq n_j \to \infty (j \to \infty)$ より矛盾。従って $f(X)$ は $\mathbb{R}$ の有界集合である。ワイエルストラスの上限及び下限の存在定理により $\sup f(X) (\equiv M)$ 及び $\inf f(X) (\equiv m)$ が実数として定まる。そこで M 及び m が夫々 f の最大値及び最小値として実現する事を示そう。上限の性質により任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $x_n \in X$ が存在し $M - 1/n < f(x_n) \leq M$ となる。X の点列コンパクト性より部分列 $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ 及び $x_0 \in X$ を取って

$$
\begin{aligned}
&1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_j \to \infty \ (j \to \infty) \\
&x_{n_j} \to x_0 \ (j \to \infty)
\end{aligned}
$$

と出来る。f の連続性により $f(x_{n_j}) \to f(x_0) (j \to \infty)$ となるので不等式 $M - 1/n_j < f(x_{n_j}) \leq M$ に於いて $j \to \infty$ とする事により $M = f(x_0)$ を得る。即ち M は f の最大値となり、それは x_0 によって実現する。同様の論法により m は f の最小値でありそれを実現する点が存在する事も分かる。

定理２の証明 (その２)　連続写像による点列コンパクト集合の像は点列コンパクトであり $\mathbb{R}$ の点列コンパクト部分集合は有界閉集合となる。$f(X)$ は有界であるからワイエルストラスの上限及び下限の存在定理より $\sup f(X)$ 及び $\inf f(X)$ が実数として定まる。これ

らは $f(X)$ の触点であり $f(X)$ は閉集合であるから $\sup f(X) \in \overline{f(X)} = f(X),\ \inf f(X) \in \overline{f(X)} = f(X)$ となる。よって $\sup f(X)$ は最大値で $\inf f(X)$ は最小値である。

注　開集合族の基底が可算個のものから成る空間を第二可算空間、任意の点の基本近傍系が可算個のものから成る空間を第一可算空間と謂う。第二可算空間は第一可算空間である。距離空間は第一可算空間となり可分な距離空間は第二可算空間となる。距離空間または第二可算空間に於いてコンパクト部分集合と点列コンパクト部分集合の概念は同値である。ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に於いてコンパクト部分集合、点列コンパクト部分集合、有界閉部分集合の概念は同値である。

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{\text{ユークリッド空間 }\mathbb{R}^n} & \Rightarrow & \boxed{\text{可分距離空間}} & \Rightarrow & \boxed{\text{距離空間}} \\ & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & & \boxed{\text{第二可算空間}} & \Rightarrow & \boxed{\text{第一可算空間}} \\ & & \Downarrow & & \\ & & \boxed{\text{可分空間}} & & \end{array}$$

参考文献：　松坂和夫、集合・位相入門、岩波書店
L. Schwartz, *Analyse I*, Hermann