

# 平均値の定理

平成 20 年 11 月

小澤 徹

<http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html>

有界区間  $I = [a, b]$  上で連続、その内部  $(a, b)$  で微分可能な実数値函数に対する一連の平均値の定理の関係を纏めて置こう。

定理 次の命題は同値である。

- (1) (Rolle の定理) 有界閉区間上で連続、その内部で微分可能な実数値函数は両端点で同じ値を取れば内部に導函数の零点を持つ。即ち  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  は連続、 $(a, b)$  上微分可能で  $f(a) = f(b)$  ならば  $f'(c) = 0$  なる  $c \in (a, b)$  が存在する。
- (2) (Lagrange の平均値の定理) 有界閉区間上で連続、その内部で微分可能な実数値函数の導函数は内部で平均勾配の値を取る。即ち  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  は連続で  $(a, b)$  上微分可能ならば  $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$  なる  $c \in (a, b)$  が存在する。
- (3) (Cauchy の平均値の定理) 有界閉区間上で連続、その内部で微分可能な実数値函数  $f, g$  に対し、 $g$  は両端点で異なる値を取り、 $f$  と  $g$  の導函数は共通の零点を持たないとすれば、 $g'(c) \neq 0$  及び

$$f'(c)/g'(c) = (f(b) - f(a))/(g(b) - g(a))$$

を満たす  $c \in (a, b)$  が存在する。

証明 (2)  $\Rightarrow$  (1): (1) は (2) の特別な場合 ( $f(a) = f(b)$ ) である。

(3)  $\Rightarrow$  (2):  $g(x) = x$  とすれば良い。

(1)  $\Rightarrow$  (2):  $k \in \mathbb{R}$  に対し  $\varphi(x) = f(x) - kx$ ,  $x \in I$ , と置くと  $\varphi$  は  $I$  上連続、 $I$  の内部で微分可能である。さて

$$\begin{aligned}\varphi(a) = \varphi(b) &\Leftrightarrow f(a) - ka = f(b) - kb \\ &\Leftrightarrow k(b - a) = f(b) - f(a) \\ &\Leftrightarrow k = (f(b) - f(a))/(b - a)\end{aligned}$$

であるから  $k = (f(b) - f(a))/(b - a)$  と定めると  $\varphi$  に対して (1) の仮定が成立ち  $\varphi'(c) = 0$  なる点  $c$  が  $I$  の内部に存在する。 $\varphi'(x) = f'(x) - k$  より

$$\varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = k = (f(b) - f(a))/(b - a)$$

(1)  $\Rightarrow$  (3):  $k \in \mathbb{R}$  に対し  $\varphi(x) = f(x) - kg(x)$ ,  $x \in I$  と置くと  $\varphi$  は  $I$  上連続、 $I$  の内部で微分可能である。さて  $g(a) \neq g(b)$  なる仮定の下

$$\begin{aligned}\varphi(a) = \varphi(b) &\Leftrightarrow f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \\ &\Leftrightarrow k(g(b) - g(a)) = f(b) - f(a) \\ &\Leftrightarrow k = (f(b) - f(a))/(g(b) - g(a))\end{aligned}$$

であるから  $k = (f(b) - f(a))/(g(b) - g(a))$  と定めると  $\varphi$  に対して (1) の仮定が成立ち  $\varphi'(c) = 0$  なる点  $c$  が  $I$  の内部に存在する。

$\varphi' = f' - kg'$  より

$$\varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = kg'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c)$$

となる。ここで  $g'(c) = 0$  ならば  $f'(c) = 0$  となり仮定に反するので  $g'(c) \neq 0$  である。

注 1: (1) $\Rightarrow$ (2) の別証明

$f$  のグラフ  $\{(x, f(x)); x \in I\}$  の端点  $(a, f(a))$  と  $(b, f(b))$  を結ぶ直線の方程式は

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

で与えられる。この直線と  $f$  のグラフの水準の差は

$$\psi(x) = f(x) - \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right]$$

で与えられる。両者は両端点を共有するので  $\psi(a) = \psi(b)$  である (直接計算しても容易に確かめられる)。(1) により  $\psi'(c) = 0$  なる点  $c$  が  $I$  の内部に存在する。

$$\psi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

より (2) が従う。

注 2: (1) $\Rightarrow$ (3) の別証明

$uv$  平面に於いて二点  $(g(a), f(a))$ ,  $(g(b), f(b))$  を結ぶ直線の方程式は

$$v = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(u - g(a)) + f(a)$$

で与えられる。この直線を  $u = g(x)$  で媒介変数表示した  $v$  のレベルと  $f(x)$  ( $uv$  平面に  $I \ni x \mapsto (g(x), f(x)) \in \mathbb{R}^2$  と表示した曲線の  $v$  座標) との差は

$$\psi(x) = f(x) - \left[ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) + f(a) \right]$$

で与えられる。両者は両端点を共有するので  $\psi(a) = \psi(b)$  である (直接計算しても容易に確かめられる)。(1) により  $\psi'(c) = 0$  なる点  $c$  が  $I$  の内部に存在する。

$$\psi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x)$$

より (3) が従う。

注 3: Rolle の定理の証明

有界閉集合上の連続関数は最大値及び最小値を取る。最大値を取る点と最小値を取る点がどちらも端点の時は定数函数の場合で微分係数は常に零となり  $c$  は  $I$  の内部の任意の点で良い。定数函数の場合でなければ最大値または最小値を取る点が  $I$  の内部に存在する。その点に於ける微分係数を右極限と左極限に分けて計算すると、一方が非負ならもう一方は非正となるが微分可能性より両者は零に等しい。

参考文献：藤原松三郎、數學解析第一編、微分積分學 第一巻、内田老鶴圃、1934  
杉浦光夫、解析入門 I、東京大学出版会