多重指数

平成 20 年 12 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

多重指数とは $\mathbb{Z}^n_{\geq 0} = (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ の元の事である。ここに $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は非負整数の全体である。$\mathbb{R}^n$ 上の微分積分の記述は多重指数を用いると著しく簡潔になる。ここではその標準的な記法を纏めて置こう。

多重指数は通常 α, β, γ 等のギリシャ文字で表し成分表示には

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n),\ \beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$$

なる記法を用いる。

多重指数の相等

$\alpha = \beta$ とは任意の $j \in \{1, \cdots, n\}$ に対し $\alpha_j = \beta_j$ である事と定める。

多重指数の加法

$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n),\ \beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ に対し $\alpha + \beta$ を $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \cdots, \alpha_n + \beta_n)$ で定める。多重指数の零元 0 を $0 = (0, \cdots, 0)$ と定めれば加法に関する零元となる。

多重指数のスカラー倍

$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n),\ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $k\alpha$ を $k\alpha = (k\alpha_1, \cdots, k\alpha_n)$ で定める。

多重指数の順序

$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n),\ \beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ に対し $\alpha \leq \beta$ とは任意の $j \in \{1, \cdots, n\}$ に対し $\alpha_j \leq \beta_j$ である事と定める。$\alpha \leq \beta$ は $\beta \geq \alpha$ とも表す。従って一般的に $\alpha \geq 0$ である。$\alpha \leq \beta$ である時に限り多重指数 $\beta - \alpha$ が $\beta - \alpha = (\beta_1 - \alpha_1, \cdots, \beta_n - \alpha_n)$ で定まる。よって次の関係が成立つ：

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha \geq 0$$

多重指数の長さ

$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ に対し全成分の和

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$$

を α の長さと定める。これは ($\mathbb{Z}^n_{\geq 0} \subset \mathbb{R}^n$ と見做した) ユークリッド的長さと同じ記号で表されるので注意を要する。

多重指数の階乗

　$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ に対し各成分の階乗の積

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n! = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j!$$

を α の階乗と定める。$0! = 1$ より $0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対しても $0! = 1$ が従う。

多重指数の二項係数

　$\alpha \geq \beta$ なる多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n), \beta = (\beta_1 \cdots, \beta_n)$ に対し各成分の二項係数の積

$$\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{j=1}^{n} \binom{\alpha_j}{\beta_j} = \prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j!}{\beta_j!(\alpha_j - \beta_j)!} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}$$

を二項係数と定める ($\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の元 n 個の組から見れば多項係数)。$\alpha \geq \beta$ でない時は

$$\binom{\alpha}{\beta} = 0$$

と定める。

数ベクトルの多重指数による冪

　$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ の多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ による冪 x^α を

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}$$

で定める。$0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対しては $x^0 = 1$ となる。

勾配作用素の多重指数による冪

　勾配作用素 $\partial = \nabla = \mathrm{grad} = (\partial_1, \cdots, \partial_n),\ \partial_j = \partial/\partial x_j$ の多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ による冪 ∂^α を

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} = \prod_{j=1}^{n} \partial_j^{\alpha_j}$$

で定める。

　以上の準備の下で多重指数を用いる基本的な命題を纏めて置こう。

命題 1　次は同値である。

(1)**(二項定理)**

　$x, y \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$(x+y)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{k-j} y^j = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ i+j=k}} \frac{k!}{i!j!} x^i y^j$$

(2)**(多項定理)**

$n, k \in \mathbb{Z}_{>0}, x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^k = (x_1 + \cdots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha$$

(3)**(ユークリッド空間に於ける二項定理)**

$n \in \mathbb{Z}_{>0},\ \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0},\ x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$(x+y)^\alpha = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} y^\beta = \sum_{\substack{(\beta,\gamma) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \times \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \\ \beta+\gamma=\alpha}} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} x^\beta y^\gamma$$

(4)**(ユークリッド空間に於ける内積の冪の展開)**

$n, k \in \mathbb{Z}_{>0}, x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$(x \cdot y)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha y^\alpha$$

注 1. (1) は成立するので命題 1 の (1) から (4) は全て成立する。

注 2. (2) の別証明　$t \in \mathbb{R}$ に対し

$$\exp\left(t \sum_{j=1}^{n} x_j\right) = \prod_{j=1}^{n} \exp(tx_j) = \prod_{j=1}^{n} \sum_{\alpha_j \geq 0} \frac{1}{\alpha_j!} (tx_j)^{\alpha_j} = \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} (tx)^\alpha$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} x^\alpha\right) t^k$$

となるので両辺を t に就いて k 回微分し $t = 0$ とすれば (2) を得る。

(証明)(1)⇒(2): (2) を n に関する次の命題と見做す：
$(P)_n$: 任意の $k \in \mathbb{Z}_{>0},\ x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^k = \sum_{\substack{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k}} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

$(P)_n$ が全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して成立つ事を n に関する帰納法で示そう。
$(P)_1$ は $\alpha_1 = k$ 故両辺共に x_1^k となり成立する。$n \geq 2$ とし $(P)_{n-1}$ が成立すると仮定し $(P)_n$ を導こう。
$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n-1} x_j + x_n$ として (1) を用いると

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^k = \sum_{\substack{\ell+m=k\\ \ell,m\geq 0}} \frac{k!}{\ell!m!}\left(\sum_{j=1}^{n-1} x_j\right)^\ell x_n^m$$

そこで $(P)_{n-1}$ を用いると

$$\left(\sum_{j=1}^{n-1} x_j\right)^\ell = \sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}=\ell\\ \alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}\geq 0}} \frac{\ell!}{\alpha_1!\cdots\alpha_{n-1}!} x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$$

となるから m を α_n と書き換える事により

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^k &= \sum_{\substack{\ell+m=k\\ \ell,m\geq 0}} \sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}=\ell\\ \alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}\geq 0}} \frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_{n-1}!m!} x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^m \\ &= \sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k\\ \alpha_1,\cdots,\alpha_n\geq 0}} \frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_{n-1}!\alpha_n!} x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n}\end{aligned}$$

を得る。これが示すべき事であった。

(2)⇒(1):　(2) の $n=2$ の場合が (1) である。

(1)⇒(3):　定義により

$$(x+y)^\alpha = \prod_{j=1}^{n}(x_j+y_j)^{\alpha_j}$$

となる。ここで $\alpha_j = 0$ なる j が存在する (自明な) 場合も含めて右辺に (1) を用いると次の様に (3) が従う。

$$\begin{aligned}(x+y)^\alpha &= \prod_{j=1}^{n} \sum_{0\leq\beta_j\leq\alpha_j} \binom{\alpha_j}{\beta_j} x_j^{\alpha_j-\beta_j} y_j^{\beta_j} \\ &= \sum_{0\leq\beta_1\leq\alpha_1} \cdots \sum_{0\leq\beta_n\leq\alpha_n} \binom{\alpha_1}{\beta_1}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n} x_1^{\alpha_1-\beta_1}\cdots x_n^{\alpha_n-\beta_n}\cdot y_1^{\beta_1}\cdots y_n^{\beta_n} \\ &= \sum_{0\leq\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta}y^\beta\end{aligned}$$

(3)⇒(1):　(3) の $n=1$ の場合が (1) である。

(2)⇒(4):　$x=(x_1,\cdots,x_n),\ y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ に対し

$$x\cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

であるから (2) の x_j の代わりに $x_j y_j$ として (2) を適用すると

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^n x_j y_j\right)^k &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}(x_1y_1)^{\alpha_1}\cdots(x_ny_n)^{\alpha_n} \\ &= \sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}\cdot y_1^{\alpha_1}\cdots y_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}x^\alpha y^\alpha\end{aligned}$$

となり (4) を得る。

(4)⇒(2):　(4) に於いて $y=(1,\cdots,1)\in\mathbb{R}^n$ とすれば $y^\alpha=1$ により (2) を得る。

命題 2　$n,k\in\mathbb{Z}^n_{>0}$ に対し次の等式が成立する：

(1)　$\sharp\{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}; |\alpha|=k\} = \displaystyle\sum_{|\alpha|=k} 1 = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$

(2)　$\sharp\{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}; |\alpha|\leq k\} = \displaystyle\sum_{|\alpha|\leq k} 1 = \frac{(n+k)!}{n!k!}$

(証明)　$t\in(0,1)$ に対し $\varphi(t)=(1-t)^{-n}$ と置くと

$$\begin{aligned}\varphi(t)=(1-t)^{-n} &= \left(\sum_{\alpha_1=0}^\infty t^{\alpha_1}\right)\cdots\left(\sum_{\alpha_n=0}^\infty t^{\alpha_n}\right) \\ &= \sum_{\alpha\geq 0} t^{|\alpha|} = \sum_{j=0}^\infty\sum_{|\alpha|=j} t^{|\alpha|} \\ &= \sum_{k=0}^\infty\left(\sum_{|\alpha|=k}1\right)t^k\end{aligned}$$

よって

$$\sum_{|\alpha|=k}1 = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$

これより (1) が従う。さてこの右辺は $k=0$ なら 1 に等しく $k\geq 1$ なら

$$\begin{aligned}\frac{(n+k-1)!}{(n-1)k!} &= \frac{(n+k-1)!}{n!k!}\cdot n \\ &= \frac{(n+k-1)!}{n!k!}((n+k)-k) \\ &= \frac{(n+k)!}{n!k!} - \frac{(n+(k-1))!}{n!(k-1)!}\end{aligned}$$

と表されるので

$$
\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|\le k} 1 &= \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\alpha|=j} 1 \\
&= \sum_{j=1}^{k} \sum_{|\alpha|=j} 1 + \sum_{|\alpha|=0} 1 \\
&= \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{(n+j)!}{n!j!} - \frac{(n+(j-1))!}{n!(j-1)!} \right) + 1 \\
&= \left(\frac{(n+k)!}{n!k!} - 1 \right) + 1 = \frac{(n+k)!}{n!k!}
\end{aligned}
$$

となり (2) が従う。

命題 3　$n, k \in \mathbb{Z}_{>0},\ x \in \mathbb{R}^n$ に対し次の不等式が成立つ。

(1)　$(k!)^{-1/2}|x|^k \le \left(\sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|^2 \right)^{1/2} \le |x|^k$

(2)　$(k!)^{-1/2}|x|^k \le \left(\sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|^2 \right)^{1/2} \le \sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha| \le \sqrt{\binom{n+k-1}{k}} \left(\sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|^2 \right)^{1/2} \le \sqrt{\binom{n+k-1}{k}} |x|^k$

(3)　$(k!)^{-1/2}(1+|x|^2)^{k/2} \le \left(\sum_{|\alpha|\le k} |x^\alpha|^2 \right)^{1/2} \le (1+|x|^2)^{k/2}$

(4)　
$$
\begin{aligned}
(k!)^{-1/2}(1+|x|^2)^{k/2} \le \left(\sum_{|\alpha|\le k} |x^\alpha|^2 \right)^{1/2} \le \sum_{|\alpha|\le k} |x^\alpha| &\le \sqrt{\binom{n+k}{k}} \left(\sum_{|\alpha|\le k} |x^\alpha|^2 \right)^{1/2} \\
&\le \sqrt{\binom{n+k}{k}} (1+|x|^2)^{k/2}
\end{aligned}
$$

注 3. この形の不等式はフーリエ変数で用いられる事が多い。

(証明)　命題 1 の (4) を $x = y$ に適用し展開に現れる係数は全て正の整数である事に注意すると

$$
|x|^{2k} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^{2\alpha} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |x^\alpha|^2 \ge \sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|^2
$$

が得られる。一方、

$$
\begin{aligned}
|x|^{2k} &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |x^\alpha|^2 \\
&\le k! \sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|^2
\end{aligned}
$$

となるので (1) が示された。さて

$$\left(\sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|\right)^2 = \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=k} |x^{\alpha+\beta}|$$

の右辺の和の取り方に於いて $\alpha = \beta$ の場合はその一部であるから

$$\sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=k} |x^{\alpha+\beta}| \geq \sum_{|\alpha|=k} |x^{2\alpha}| = \sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|^2$$

となり (2) の二番目の不等式が従う。また命題 2 の (1) より

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|^2\right)^2 &= \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=k} |x^\alpha||x^\beta| \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=k} |x^\alpha|^2 + \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=k} |x^\beta|^2 \\
&= \binom{n+k-1}{k} \sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|^2
\end{aligned}$$

となるので (2) の三番目の不等式が得られる。(2) の最初と最後の不等式は (1) より従う。以上で (2) が示された。(3) の二つの不等式は上と同様に

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha|^2 &= \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\alpha|=j} |x^{2\alpha}| \\
&\leq \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} |x^{2\alpha}| = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} |x|^{2j} = (1+|x|^2)^k \\
&\leq \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!} \sum_{|\alpha|=j} |x^{2\alpha}| \\
&\leq k! \sum_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha|^2
\end{aligned}$$

として得られる。(4) は (3) と次の不等式より従う：

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha|^2 &\leq \sum_{|\alpha|\leq k} \sum_{|\beta|\leq k} |x^{\alpha+\beta}| = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha|\right)^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|\leq k} \sum_{|\beta|\leq k} |x^\alpha|^2 + \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|\leq k} \sum_{|\beta|\leq k} |x^\beta|^2 \\
&= \binom{n+k}{k} \sum_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha|^2
\end{aligned}$$

命題 4　(テイラーの公式)　$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合、$f \in C^{k+1}(U;\mathbb{C}),\ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ a \in U$ とする。$h \in \mathbb{R}^n$ を $\{a+th \in \mathbb{R}^n; t \in [0,1]\} \subset U$ を満たすものとすると次のテイラーの公式が成立つ。

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha f)(a)h^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{k+1}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)^k(\partial^\alpha f)(a+th)h^\alpha dt$$

(証明)　一変数函数のテイラーの公式

$$\varphi(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\varphi^{(j)}(0) + \frac{1}{k!}\int_0^1 (1-t)^k \varphi^{(k+1)}(t)dt$$

を考える。$\varphi(t) = f(a+th)$ とすれば

$$\varphi'(t) = (\nabla f)(a+th)\cdot h = \sum_{\ell=1}^{n}(\partial_\ell f)(a+th)h_\ell = \sum_{|\alpha|=1}(\partial^\alpha f)(a+th)h^\alpha,$$

$$\varphi^{(j)}(t) = \sum_{|\alpha^{(1)}|=1}\cdots\sum_{|\alpha^{(j)}|=1}(\partial^{\alpha^{(1)}+\cdots+\alpha^{(j)}}f)(a+th)h^{\alpha^{(1)}+\cdots+\alpha^{(j)}}$$

$$= \sum_{|\alpha|=j}(\sharp M(j,\alpha))(\partial^\alpha f)(a+th)h^\alpha$$

となる。ここに

$$M(j,\alpha) = \{(\alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(j)}) \in (\mathbb{Z}^n_{\geq 0})^j; |\alpha^{(1)}| = \cdots = |\alpha^{(j)}| = 1,\ \alpha^{(1)}+\cdots+\alpha^{(j)} = \alpha\}$$

とする。

$$N(j,\alpha) = \{(\ell_1,\cdots,\ell_j) \in \{1,\cdots,n\}^j; \alpha_i = \sharp\{m; \ell_m = i\},\ 1 \leq i \leq n\}$$

とすると $\sharp M(j,\alpha) = \sharp N(j,\alpha)$ であり

$$\left(\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell\right)^j = \sum_{|\alpha|=j}(\sharp N(j,\alpha))x^\alpha$$

となるから命題 1 の (2) より

$$\sharp M(j,\alpha) = \sharp N(j,\alpha) = \frac{j!}{\alpha!}$$

が従う。故に $1 \leq j \leq k$ なる j に対し

$$\varphi^{(j)}(0) = \sum_{|\alpha|=j}\frac{j!}{\alpha!}(\partial^\alpha f)(a)h^\alpha$$

及び

$$\varphi^{(k+1)}(t) = \sum_{|\alpha|=k+1}\frac{(k+1)!}{\alpha!}(\partial^\alpha f)(a+th)h^\alpha$$

となり $\varphi(1) = f(a+h), \varphi(0) = f(a)$ であるから一変数のテイラーの公式より命題 4 が従う。

参考文献：　G.B. Folland, *Real Analysis*, Pure and Applied Mathematics.
島倉紀夫、楕円型偏微分作用素、紀伊国屋書店