一変数のリーマン積分

平成 28 年 10 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

必ずしも有界閉区間とは限らない区間上の実一変数実数値函数のリーマン積分に就いて纏めて置こう。積分論を単函数の列を基礎として構築する立場から眺めると、リーマン積分の理論体系は、一様収束の概念の枠組で閉じているコーシー積分の理論体系と概収束（殆んど至る所の各点収束）の概念の枠組で閉じているルベーグ積分の理論体系の中間に位置し、この対立軸で比較検討する限り、ディユドネの指摘を引用する迄も無く、理論的には如何にも中途半端な体系であるが、積分概念の素朴な認識方法の一つとして有効である以上、より一層の整備と明確化は今後も必要となるであろう。

１．有界閉区間上のリーマン積分

１．１　定義と基本的性質

（一点でない）有界閉区間 $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ 上の実数値函数 $f : I \to \mathbb{R}$ の I 上のリーマン積分を定義しよう。I の**分割** (partition) とは I の部分集合を成す閉区間（**小区間** (subintervals) I_j）の有限個の集合 $\Delta = \{I_j ; j \in \mathscr{I}(\Delta)\}$（有限集合 $\mathscr{I}(\Delta)$ を Δ の**添字集合** (index set of Δ) と謂う。）で

$$I = \bigcup_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} I_j,\ \mathrm{Int} I_j \neq \emptyset\ (\forall j \in \mathscr{I}(\Delta)),\ \mathrm{Int} I_j \cap \mathrm{Int} I_k = \emptyset\ (j \neq k)$$

なるものとする。通常 $(n + 1)$ 個の点を

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \tag{1}$$

と取り n 個の小区間を $I_j = [x_{j-1}, x_j],\ j \in \mathscr{I}(\Delta) = \{1, \cdots, n\}$ とする事で Δ を構成する。このとき $(n + 1)$ 個の点 x_j を Δ の**分点**と謂う。区間 $J = [c, d]$ の**長さ** (length) $|J|$ を $|J| = d - c$ と定義し、分割 Δ の**幅** (width) を最大の小空間の長さ

$$|\Delta| = \max\ \{|I_j| ; j \in \mathscr{I}(\Delta)\}$$

と定義する。(1) の場合、分割の幅は

$$|\Delta| = \max\ \{|I_j|;\ 1 \leq j \leq n\} = \max_{1\leq j\leq n} (x_j - x_{j-1})$$

に外ならない。

I の二つの分割 $\Delta = \{I_j ; j \in \mathscr{I}(\Delta)\}, \Delta' = \{I'_k ; k \in \mathscr{I}(\Delta')\}$ に対し Δ' は Δ の**細分** (refinement) であるとは任意の $j \in \mathscr{I}(\Delta)$ に対し $k \in \mathscr{I}(\Delta')$ が存在して $I'_k \subset I_j$ と出来る事を謂い $\Delta \subset \Delta'$ と表す。これは Δ の分点がどれも Δ' の分点となっている事を意味する。

即ち

$$\Delta \subset \Delta' \iff \forall j \in \mathscr{I}(\Delta)\ \exists k \in \mathscr{I}(\Delta') : I'_k \subset I_j$$
$$\iff \bigcup_{i\in\mathscr{I}(\Delta)} \partial I_j \subset \bigcup_{k\in\mathscr{I}(\Delta')} \partial I'_k$$

I の二つの分割 $\Delta = \{I_j\ ;\ j\in\mathscr{I}(\Delta)\},\ \Delta' = \{I'_k\ ;\ k\in\mathscr{I}(\Delta')\}$ に対し

$$\Delta \cup \Delta' = \{I_j \cap I'_k\ ;\ (j,k) \in \mathscr{I}(\Delta)\times\mathscr{I}(\Delta')\}$$

を Δ と Δ' の**共通部分** (common refinement) と謂う。これは二つの分割の分点を合わせて出来る分割である。定義より

$$\Delta \subset \Delta \cup \Delta' \text{ 及び } \Delta' \subset \Delta \cup \Delta' \text{ が従う。}$$

区間 I の分割全体の成す集合を $\mathscr{P}(I)$ と表そう：

$$\mathscr{P}(I) = \{\Delta; \Delta \text{は} I \text{の分割}\}$$

$\mathscr{P}(I)$ は包含関係 $\subset$ に拠って**半順序集合** (partially ordered set) を成す：

(PO 1) $\Delta \subset \Delta$

(PO 2) $\Delta \subset \Delta', \Delta' \subset \Delta \implies \Delta = \Delta'$

(PO 3) $\Delta \subset \Delta', \Delta' \subset \Delta'' \implies \Delta \subset \Delta''$

上に見た様に共通細分を取ると云う操作は $\mathscr{P}(I)$ に於ける包含関係に就いて次の著しい性質を持つ：

$$\Delta, \Delta' \in \mathscr{P}(I) \implies \Delta \cup \Delta' \in \mathscr{P}(I),\ \Delta \subset \Delta \cup \Delta',\ \Delta' \subset \Delta \cup \Delta'$$

I の分割 $\Delta = \{I_j; j\in\mathscr{I}(\Delta)\}$ の各小区間 I_j から任意に一点 ξ_j を選んで出来る点列 $\xi = (\xi_j; j\in\mathscr{I}(\Delta))$ を**代表点** (representative points) の列と謂う。I 上の実数値函数 $f : I \to \mathbb{R}$ に対し I の分割 Δ と代表点の列 ξ を与える事に因って定まる有限和

$$R(f; \Delta, \xi) = \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} f(\xi_j)|I_j|$$

を f の (Δ, ξ) に関する**リーマン和** (Riemann sum) と謂う。函数 $f : I \to \mathbb{R}$ が I **上リーマン可積分** (Riemann integrable over I) であるとは実数 S が存在し代表点の取り方に依らず極限として定まる事

$$\lim_{|\Delta|\to 0} R(f; \Delta, \xi) = S$$

と定義する。即ち任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在し $|\Delta| < \delta$ なる任意の I の分割 Δ 及びそれに伴う任意の代表点の列 ξ に対し

$$|R(f; \Delta, \xi) - S| < \varepsilon$$

なる評価が常に成立つ事を謂う。実数 S を

$$\int_I f,\ \int_a^b f,\ \int_I f dx,\ \int_a^b f dx,\ \int_I f(x) dx,\ \int_a^b f(x) dx$$

等と表す。

命題 1.1　有界閉区間上のリーマン可積分函数は有界である。

（証明）$\varepsilon = 1$ として対応する $\delta > 0$ を取って固定する。このとき $|\Delta| < \delta$ なる任意の I の分割 Δ 及びそれに伴う任意の代表点の列 ξ に対し評価

$$|R(f;\Delta,\xi) - S| < 1$$

が常に成立つ。以下、分割 Δ は一つ取って固定し

$$\begin{aligned} &a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \\ &I_j = [x_{j-1}, x_j],\ j \in \mathscr{I}(\Delta) = \{1, \cdots, n\} \end{aligned}$$

として考える。
さて $1 \leq j \leq n$ なる j を一つ取り代表点の列 ξ を $k \neq j$ ならば、$\xi_k = x_k$ と小区間 I_k の右端点に揃え $\xi_j \in I_j$ のみ任意の点と取る事にしても上の評価は変らない。故に

$$\begin{aligned} &|\ f(\xi_j)|I_j|\ | \\ &= |\ R(f;\Delta,\xi) - \sum_{k \neq j} f(x_k)|I_k|\ | \\ &\leq |\ R(f;\Delta,\xi) - S| + |S - \sum_{k \neq j} f(x_k)|I_k|\ | \\ &\leq 1 + S + \sum_{k \neq j} |f(x_k)||I_k| \\ &\leq 1 + S + |\Delta| \sum_{k \in \mathscr{I}(\Delta)} |f(x_k)| \end{aligned}$$

これより

$$|f(\xi_j)| \leq (1 + S + |\Delta| \sum_{k \in \mathscr{I}(\Delta)} |f(x_k)|)\ /\ |I_j|$$

$\xi_j \in I_j$ は任意であったので

$$\sup_{\xi_j \in I_j} |f(\xi_j)| \leq (1 + S + |\Delta| \sum_{k \in \mathscr{I}(\Delta)} |f(x_k)|)\ /\ |I_j|$$

これより次の評価

$$\|f\|_\infty \equiv \sup_{x \in I} |f(x)| \leq (1 + S + |\Delta| \sum_{k \in \mathscr{I}(\Delta)} |f(x_k)|)\ /\ (\min_{j \in \mathscr{I}(\Delta)} |I_j|)$$

が成立ち f の有界性が従う。

記号　有界閉集合 I 上のリーマン可積分実数値函数全体の成す集合を $\mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ と表す。

定理 1.1　(1) $\mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ は I 上有界な実数値函数全体の成す実ベクトル空間 $L^\infty(I;\mathbb{R})$ の部分空間である。但し加法とスカラー倍の概念は実数から（各点に於ける操作を通じて）導入されるものとする。即ち

$$f,g \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R}), a,b \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ af+bg \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$$

(2) I 上の積分から導かれる写像

$$\int_I : \mathscr{R}(I;\mathbb{R}) \ni f \ \longmapsto \ \int_I f \in \mathbb{R}$$

は正値（非負値）線型汎函数 (positive (nonnegative) linear functional) である。即ち

- $f \geq 0$（任意の $x \in I$ に対し $f(x) \geq 0$）$\Rightarrow$ $\int_I f \geq 0$
- $f,g \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R}),\ a,b \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \int_I (af+bg) = a\int_I f + b\int_I g$

（証明）命題 1.1 は函数空間としての包含関係 $\mathscr{R}(I;\mathbb{R}) \subset L^\infty(I;\mathbb{R})$ を主張するものに外ならない。$f,g \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R}),\ a,b \in \mathbb{R}$ は I の任意の分割 Δ 及び任意の代表点の列 ξ に対し

$$\begin{aligned}
R(af+bg;\Delta,\xi) &= \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} (af+bg)(\xi_j)|I_j| \\
&= \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} (af(\xi_j)+bg(\xi_j))|I_j| \\
&= a\sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} f(\xi_j)|I_j| + b\sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} g(\xi_j)|I_j| \\
&= aR(f;\Delta,\xi) + bR(g;\Delta,\xi)
\end{aligned}$$

を満たすので $|\Delta| \to 0$ なるとき $f,g \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ 故右辺は代表点の取り方に依らず $a\int_I f + b\int_I g$ に収束する。これより $af+bg \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ であり $\int_I : \mathscr{R}(I;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ の線型性

$$\int_I (af+bg) = a\int_I f + b\int_I g$$

が従う。また、その正値性は極限 ($|\Delta| \to 0$) の単調性：

$$R(f;\Delta,\xi) \geq 0 \ \Rightarrow \ \lim_{|\Delta|\to 0} R(f;\Delta,\xi) \geq 0$$

から直ちに導かれる。

さて $f \in L^\infty(I;\mathbb{R})$ と I の分割 Δ に対し $\underline{S}(f;\Delta)$ 及び $\bar{S}(f;\Delta)$ を

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f;\Delta) &= \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} \inf\,\{f(x); x \in I_j\}\ |I_j| \\
\bar{S}(f;\Delta) &= \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} \sup\,\{f(x); x \in I_j\}\ |I_j|
\end{aligned}$$

と定義し夫々Δに関するfの**不足和** (lower sum of f with respect to Δ) 及び**過剰和** (upper sum of f with respect to Δ) と謂う。

fのI上の**下積分** (lower integral of f over I) 及び**上積分** (upper integral of f over I) を

$$\underline{\int_I} f = \sup\,\{\underline{S}(f;\Delta);\Delta\in\mathscr{P}(I)\}$$

$$\overline{\int_I} f = \inf\,\{\bar{S}(f;\Delta);\Delta\in\mathscr{P}(I)\}$$

で定義する。

命題 1.2 (1) Iの分割Δに伴う任意の代表点の列ξに対し

$$\inf\{f(x);x\in I\}\ |I| \le \underline{S}(f;\Delta) \le R(f;\Delta,\xi) \le \bar{S}(f;\Delta) \le \sup\{f(x);x\in I\}\ |I|$$

(2) $\Delta\subset\Delta'$ならば$\underline{S}(f;\Delta)\le\underline{S}(f;\Delta')\le\bar{S}(f;\Delta')\le\bar{S}(f;\Delta)$

(3) 任意の二つの分割Δ,Δ'に対し$\underline{S}(f;\Delta)\le\bar{S}(f;\Delta')$

(4) $\displaystyle\underline{\int_I} f \le \overline{\int_I} f$

(5) $f\le g$ならば

$$\underline{S}(f;\Delta)\le\underline{S}(g;\Delta),\ \ \bar{S}(f;\Delta)\le\bar{S}(g;\Delta),$$
$$\underline{\int_I} f \le \underline{\int_I} g,\ \ \overline{\int_I} f \le \overline{\int_I} g$$

（証明）(1) 各$j\in\mathscr{I}(\Delta)$に対する不等式

$$\begin{aligned}\inf\{f(x);x\in I\}|I_j| &\le \inf\{f(x);x\in I_j\}|I_j| \le f(\xi_j)|I_j| \\ &\le \sup\{f(x);x\in I_j\}|I_j| \le \sup\{f(x);x\in I\}|I_j|\end{aligned}$$

に就いて$j\in\mathscr{I}(\Delta)$で和を取れば良い。

(2) $\Delta'=\{I'_k;k\in\mathscr{I}(\Delta')\}$が$\Delta=\{I_j;j\in\mathscr{I}(\Delta)\}$の細分ならば各$j\in\mathscr{I}(\Delta)$に対し

$$\mathscr{I}_j(\Delta)=\{k\in\mathscr{I}(\Delta');I'_k\subset I_j\}$$

と置くと

$$\mathscr{I}(\Delta')=\coprod_{j\in\mathscr{I}(\Delta)}\mathscr{I}_j(\Delta)$$
$$I_j=\bigcup_{k\in\mathscr{I}_j(\Delta)} I'_k,\ \ \mathrm{Int}I'_l\cap\mathrm{Int}I'_m=\emptyset\ \ (l\ne m)$$

となるので

$$
\begin{aligned}
\underline{S}(f;\Delta) &= \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} \inf\{f(x);x\in I_j\}|I_j| \\
&= \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} \inf\{f(x);x\in I_j\} \sum_{k\in\mathscr{I}_j(\Delta)} |I'_k| \\
&= \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} \sum_{k\in\mathscr{I}_j(\Delta)} \inf\{f(x);x\in I_j\}|I'_k| \\
&\leq \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} \sum_{k\in\mathscr{I}_j(\Delta)} \inf\{f(x);x\in I'_k\}|I'_k| \\
&= \sum_{k\in\mathscr{I}(\Delta')} \inf\{f(x);x\in I'_k\}|I'_k| \\
&= \underline{S}(f;\Delta') \leq \bar{S}(f;\Delta') \\
&\qquad\qquad = \sum_{k\in\mathscr{I}(\Delta')} \sup\{f(x);x\in I'_k\}|I'_k| \\
&\qquad\qquad = \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} \sum_{k\in\mathscr{I}_j(\Delta)} \sup\{f(x);x\in I'_k\}|I'_k| \\
&\qquad\qquad \leq \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} \sum_{k\in\mathscr{I}_j(\Delta)} \sup\{f(x);x\in I_j\}|I'_k| \\
&\qquad\qquad = \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} \sup\{f(x);x\in I_j\} \sum_{k\in\mathscr{I}_j(\Delta)} |I'_k| \\
&\qquad\qquad = \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} \sup\{f(x);x\in I_j\}|I_j| = \bar{S}(f;\Delta)
\end{aligned}
$$

が従う。

(3) (2) より

$$\underline{S}(f;\Delta) \leq \underline{S}(f;\Delta\cup\Delta') \leq \bar{S}(f;\Delta\cup\Delta') \leq \bar{S}(f;\Delta')$$

(4) (3) より直ちに従う。

(5) 各 $j\in\mathscr{I}(\Delta)$ に対する不等式

$$
\begin{aligned}
\inf\{f(x);x\in I_j\}|I_j| \leq \inf\{g(x);x\in I_j\}|I_j|, \\
\sup\{f(x);x\in I_j\}|I_j| \leq \sup\{g(x);x\in I_j\}|I_j|
\end{aligned}
$$

に就いて $j\in\mathscr{I}(\Delta)$ で和を取れば初めの二つの不等式が得られる。更に $\mathscr{P}(I)$ 上で上限・下限を取れば最後の二つの不等式が得られる。

定理 1.2　$f\in L^\infty(I;\mathbb{R})$ に対し

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \underline{S}(f;\Delta) = \underline{\int_I} f,\ \lim_{|\Delta|\to 0} \bar{S}(f;\Delta) = \overline{\int_I} f$$

（証明）　任意に $\varepsilon > 0$ を取る。I の分割 $\Delta = \{I_i; i\in\mathscr{I}(\Delta)\}$ が存在し

$$0 \leq \underline{\int_I} f - \underline{S}(f;\Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立つ。$\delta_0 = \min\{|I_i|; i\in\mathscr{I}(\Delta)\}$ 更に $\delta = \min\left(\delta_0, \dfrac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty \sharp\mathscr{I}(\Delta)}\right)$ と置く。$|\Delta'| < \delta$ なる任意の I の分割 $\Delta' = \{I'_j; j\in\mathscr{I}(\Delta')\}$ を考える。$|\Delta'| < \delta_0$ であるから任意の $j \in \mathscr{I}(\Delta')$ に対し I'_j が含む Δ の分点は高々一個である。即ち

$$n_j = \sharp\{i \in I; \partial I_i \subset I'_j\}$$

と置くと $n_j = 0$ または 1 のどちらか一方が成立つ。さて $\Delta'' = \Delta \cup \Delta'$ とし
$\Delta'' = \{I''_l; l \in \mathscr{I}(\Delta'')\}$ と表す事にすると $\mathscr{I}(\Delta'')$ は

$$\mathscr{I}(\Delta'') = \coprod_{j\in\mathscr{I}(\Delta')} \mathscr{I}_j(\Delta')$$

と分割される。ここに $\mathscr{I}_j(\Delta')$ は

$$\begin{aligned} I'_j &= \bigcup_{l\in\mathscr{I}(\Delta')} I''_l, \\ \mathrm{Int} I''_l \cap \mathrm{Int} I''_m &= \emptyset \quad (l \neq m) \end{aligned}$$

なる性質を持つものとする。このとき

$$\begin{aligned} 0 &\leq \underline{S}(f;\Delta'') - \underline{S}(f;\Delta') \\ &= \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta')} \sum_{l\in\mathscr{I}_j(\Delta')} (\inf_{I''_l} f - \inf_{I'_j} f)|I''_l| \\ &= \sum_{\substack{j\in\mathscr{I}(\Delta') \\ n_j\neq 0}} \sum_{l\in\mathscr{I}_j(\Delta')} (\inf_{I''_l} f - \inf_{I'_j} f)|I''_l| \\ &\leq 2\|f\|_\infty \sum_{\substack{j\in\mathscr{I}(\Delta') \\ n_j=1}} \sum_{l\in\mathscr{I}_j(\Delta')} |I''_l| \\ &= 2\|f\|_\infty \sum_{\substack{j\in\mathscr{I}(\Delta') \\ n_j=1}} |I'_j| \\ &\leq 2\|f\|_\infty |\Delta'| \ \sharp\{j\in\mathscr{I}(\Delta'); n_j = 1\} \\ &\leq 2\|f\|_\infty |\Delta'| \ \sharp\mathscr{I}(\Delta) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned}
0 &\leq \underline{\int_I} f - \underline{S}(f;\Delta') \\
&= (\underline{\int_I} f - \underline{S}(f;\Delta)) + (\underline{S}(f;\Delta) - \underline{S}(f;\Delta'')) + (\underline{S}(f;\Delta'') - \underline{S}(f;\Delta')) \\
&\leq (\underline{\int_I} f - \underline{S}(f;\Delta)) + (\underline{S}(f;\Delta'') - \underline{S}(f;\Delta')) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

と評価される。これより前半の主張が従う。後半も同様にして示される。

１．２　リーマン可積分性の特徴付け

定理 1.2 を基礎として有界閉区間上の有界函数に対するリーマン可積分性の特徴付けを纏めて置こう。その為、函数の変動を記述する概念を導入する。

定義　$f \in L^\infty(I;\mathbb{R}), J \subset I$ に対し F の J 上の**振幅** (oscillation of f over J) $\omega(f;J)$ を

$$\omega(f;J) = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in J\}$$

で定義する。

　このとき

$$\omega(f;J) = \sup\{f(x); x \in J\} - \inf\{f(x); x \in J\}$$

が成立つ。実際、任意の $x, y \in J$ に対し

$$\begin{aligned}
f(x) - f(y) \leq \sup\{f(\xi); \xi \in J\} - \inf\{f(\eta); \eta \in J\} \\
f(y) - f(x) \leq \sup\{f(\xi); \xi \in J\} - \inf\{f(\eta); \eta \in J\}
\end{aligned}$$

であるから

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup\{f(\xi); \xi \in J\} - \inf\{f(\eta); \eta \in J\}$$

となり

$$\omega(f;J) \leq \sup\{f(\xi); \xi \in J\} - \inf\{f(\xi); \xi \in J\}$$

が従う。一方、任意の $x, y \in J$ に対し

$$f(x) - f(y) \leq |f(x) - f(y)| \leq \omega(f;J)$$

となるから $x \in J$ に就いて上限を取り $y \in J$ に就いて下限を取る事に因り

$$\sup\{f(x); x \in J\} - \inf\{f(y); y \in J\} \leq \omega(f;J)$$

を得る。

定義　$f \in L^\infty(I;\mathbb{R}), x \in I$ に対し

$$\begin{aligned}\omega(f;x) &= \lim_{\delta\downarrow 0}\omega_\delta(f;x),\\ \omega_\delta(f;x) &= \sup\{|f(y)-f(x)|; y\in I, |x-y|<\delta\}\\ &= \sup\{|f(y)-f(x)|; y \in B(x;\delta)\cap I\}\end{aligned}$$

を f の点 x に於ける**振幅** (oscillation of f at x) と謂う。

註.　f は x で連続

$\iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall y\in B(x;\delta)\cap I,\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \omega_\delta(f;x)<\varepsilon$

$\iff \lim_{\delta\downarrow 0}\omega_\delta(f;x)=0 \iff \omega(f;x)=0$

定義　$f \in L^\infty(I;\mathbb{R}), J\subset I$ に対し

$$\omega_\delta(f;J)=\sup\{|f(x)-f(y)|; x,y\in J, |x-y|<\delta\}$$

を f の J 上の δ-**連続率** (δ-modulus of continuity of f over J) と謂う。

註.　f は J 上一様連続

$\iff [\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : x,y\in J, |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon\ ]$

$\iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \omega_\delta(f;x)<\varepsilon$

$\iff \lim_{\delta\downarrow 0}\omega_\delta(f;J)=0$

定理 1.3　$f\in L^\infty(I;\mathbb{R})$ に対し次は同値である。

(1) $f\in\mathscr{R}(I;\mathbb{R})$

(2) $\lim_{|\Delta|\to 0}(\bar{S}(f;\Delta)-\underline{S}(f;\Delta))=0$

(3) $\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)}\omega(f;I_j)|I_j|=0$

(4) $\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$

(5) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\Delta \in \mathscr{P}(I)$ が存在し $\bar{S}(f;\Delta) - \underline{S}(f;\Delta) < \varepsilon$

（証明）　(1) $\Rightarrow$ (2)：任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在し $|\Delta| < \delta$ なる任意の分割 $\Delta = \{I_j; j \in \mathscr{I}(\Delta)\}$ 及びそれに伴う任意の代表点の列 $\xi = (\xi_j; j \in \mathscr{I}(\Delta))$ に対し

$$-\varepsilon < R(f;\Delta,\xi) - \int_I f < \varepsilon$$

と出来る。いま Δ を一つ固定する。$\xi_1 \in I_1$ に就いて上限・下限を取る。その際 $j \geq 2$ に対し $\xi_j \in I_j$ の取り方は任意のままである。次に $\xi_2 \in I_2$ に就いて上限・下限を取る。以下同様に $j = \sharp\mathscr{I}(\Delta)$ まで進む。これらの手続きに依り

$$-\varepsilon < \bar{S}(f;\Delta) - \int_I f \leq \varepsilon, \quad -\varepsilon \leq \underline{S}(f;\Delta) - \int_I f < \varepsilon$$

を得る。これより

$$\begin{aligned} 0 &\leq \bar{S}(f;\Delta) - \underline{S}(f;\Delta) \\ &= (\bar{S}(f;\Delta) - \int_I f) - (\underline{S}(f;\Delta) - \int_I f) \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

が従う。故に (2) が成立つ。

(2) $\Leftrightarrow$ (3)：次の等式により従う。$\bar{S}(f;\Delta) - \underline{S}(f;\Delta) = \sum_{j \in \mathscr{I}(\Delta)} \omega(f;I_j)|I_j|$

(2) $\Leftrightarrow$ (4)：定理 1.2 より従う。

(2) $\Leftrightarrow$ (5)：(2) は (5) の特別な場合である。

(5) $\Leftrightarrow$ (4)：任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$0 \leq \overline{\int_I} f - \underline{\int_I} f \leq \bar{S}(f;\Delta) - \underline{S}(f;\Delta) < \varepsilon$$

となるから (4) が従う。

(4) $\Leftrightarrow$ (1)：任意の分割 Δ 及びそれに伴う代表点の列 ξ に対し成立する不等式

$$\underline{S}(f;\Delta) \leq R(f;\Delta;\xi) \leq \bar{S}(f;\Delta)$$

に於いて $|\Delta| \to 0$ とすると定理 1.2 により左辺は $\underline{\int_I} f$, 右辺は $\overline{\int_I} f$ に収束し仮定 (4) に因りそれらは一致する。故に (1) が成立つ。

定理 1.3 の系 1　　$f \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ に対し次が成立つ。

任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在し $|\Delta| < \delta$ なる任意の I の分割 Δ 及びそれに伴う任意の代表点の列 ξ に対し

$$\sum_{j \in \mathscr{I}(\Delta)} \left| \int_{I_j} f - f(\xi_j)|I_j| \right| < \varepsilon$$

（証明）　次の評価

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)}\left|\int_{I_j}f-f(\xi_j)|I_j|\right|=\sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)}\left|\int_{I_j}(f-f(\xi_j))\right|\\&\le\sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)}\int_{I_j}|f-f(\xi_j)|\\&\le\sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)}\int_{I_j}\omega(f;I_j)=\sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)}\omega(f;I_j)|I_j|\end{aligned}$$

に定理 1.3 の (3) を用いれば良い。

定理 1.3 の系 2　$f\in\mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ に対し次が成立つ。

$|\Delta_n|\to 0(n\to\infty)$ なる I の分割の列 $(\Delta_n;n\ge 1)$ を一つ取り Δ_n に伴う代表点の列 ξ_n を任意に選んでおく。このとき

$$\lim_{n\to\infty}R(f;\Delta_n,\xi_n)=\int_I f$$

（証明）定理 1.3 の (2) を用いれば良い。

例　$f\in\mathscr{R}([a,b];\mathbb{R})$ に対し

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}f(a+(b-a)\frac{k}{n})\frac{b-a}{n}\\=&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(a+(b-a)\frac{k}{n})\frac{b-a}{n}\\=&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(a+(b-a)\frac{k}{n})\frac{b-a}{n}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(f(a+\frac{b-a}{n}(k-1))+f(a+\frac{b-a}{n}k))\frac{b-a}{n}\\=&\int_a^b f\end{aligned}$$

定理 1.3 の系 3　$f\in L^\infty(I;\mathbb{R})$ に対し次は同値である。

(1) $f\in\mathscr{R}(I;\mathbb{R})$

(2) $J\subsetneqq I$ なる任意の有界閉区間 J に対し $f|J\in\mathscr{R}(J;\mathbb{R})$

（証明）(1) $\Rightarrow$ (2)：　次の評価

$$\begin{aligned}0&\le\bar{S}(f|J;\Delta|J)-\underline{S}(f|J;\Delta|J)\\&\le\bar{S}(f;\Delta)-\underline{S}(f;\Delta)\end{aligned}$$

より $f|J \in \mathscr{R}(J;\mathbb{R})$ が従う。

(2) $\Rightarrow$ (1) : 任意に $\varepsilon > 0$ を与える。$J = [a+\varepsilon, a-\varepsilon]$ として定理 1.3 の (5) を $f|J$ に適用し対応する $\Delta|J$ を一つ取り a と b を分点に加え Δ とすれば

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \bar{S}(f;\Delta) - \underline{S}(f|J;\Delta) \\
&\leq \bar{S}(f|J;\Delta|J) + \varepsilon\|f\|_\infty - (\underline{S}(f|J;\Delta|J) - \varepsilon\|f\|_\infty) \\
&\leq \bar{S}(f|J;\Delta|J) - \underline{S}(f|J;\Delta|J) + 2\varepsilon\|f\|_\infty \\
&< (1+2\|f\|_\infty)\varepsilon
\end{aligned}
$$

を得る。定理 1.3 を再び I 上で用いれば (1) が従う。

定義　有界閉区間上の実数値函数 $\varphi : I \to \mathbb{R}$ が**階段函数** (step function) であるとは I の分割 $\Delta = \{I_j; j \in \mathscr{I}(\Delta)\}$ が存在し各 $j \in \mathscr{I}(\Delta)$ に対し $\varphi|\mathrm{Int}I_j$ は定数函数である事と定義する。

従って I から小区間の端点 $\displaystyle\bigcup_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} \partial I_j$ を除いた集合 $\tilde{I} = I \setminus \displaystyle\bigcup_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} \partial I_j$ 上で

$$
\varphi|\tilde{I} = \sum_{k\in\mathscr{I}(\Delta)} (\varphi|\mathrm{Int}I_k)\chi_{I_k}|\tilde{I}
$$

が成立つ。I 上の階段函数全体の成す集合を $\mathrm{Step}(I;\mathbb{R})$ と表す。

命題 1.3　$\mathrm{Step}(I;\mathbb{R})$ は $\mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ の部分空間を成し $\varphi \in \mathrm{Step}(I;\mathbb{R})$ の I 上の積分は

$$
\int_I \varphi = \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} (\varphi|\mathrm{Int}I_j)|I_j|
$$

で与えられる。

（証明）　各 $I_j = [a_j, b_j]$ を n 等分し端点を含むものを

$$
I'_{j,n} = [a_j, a_j + 1/n],\ I''_{j,n} = [b_j - 1/n, b_j]
$$

とし、残りを $I_{j,l} (1 \leq l \leq n-2)$ と表し、これらで作られる分割を $\Delta_n = (\tilde{I}_k; k \in \mathscr{I}(\Delta_n))$ とする。ここに n は

$$
0 < \frac{2}{n} < \min\{|I_j|; j \in \mathscr{I}(\Delta)\}
$$

となる様に取っておく。このとき

$$
\begin{aligned}
\omega(\varphi; I_{j,l})|I_{j,l}| &= 0 \\
\omega(\varphi; I'_{j,n})|I'_{j,n}| &= |\varphi(a_j) - (\varphi|\mathrm{Int}I_j)| \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n}\|\varphi\|_\infty \\
\omega(\varphi; I''_{j,n})|I''_{j,n}| &= |\varphi(b_j) - (\varphi|\mathrm{Int}I_j)| \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n}\|\varphi\|_\infty
\end{aligned}
$$

より

$$\sum_{k\in\mathscr{I}(\Delta_n)}\omega(\varphi;\tilde{I}_k)|\tilde{I}_k|\leq\frac{4}{n}\|\varphi\|_\infty\sharp\mathscr{I}(\Delta)$$

となり $|\Delta_n|\leq|\Delta|/n$ となるから定理 1.3 より $\varphi\in\mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ であり $J_n=\bigcup_{j\in\mathscr{I}(\Delta)}(I'_{j,n}\cup I''_{j,n})$ として

$$\int_I\varphi=\int_{I\setminus J_n}\varphi+\sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)}(\int_{I'_{j,n}}\varphi+\int_{I''_{j,n}}\varphi),$$

$$\Big|\int_{I'_{j,n}}\varphi\Big|\leq\frac{2}{n}\|\varphi\|_\infty,\ \Big|\int_{I''_{j,n}}\varphi\Big|\leq\frac{2}{n}\|\varphi\|_\infty,$$

$$\int_{I\setminus J_n}\varphi=\sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)}(\varphi|\mathrm{Int}I_j)(|I_j|-\frac{2}{n})$$

より $n\to\infty$ として

$$\int_I\varphi=\sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)}(\varphi|\mathrm{Int}I_j)|I_j|$$

を得る。

命題 1.4　$f\in L^\infty(I;\mathbb{R})$ に対し次が成立つ。

(1) $$\overline{\int_I}f=\inf\{\int_I\psi;\ \psi\in\mathrm{Step}(I;\mathbb{R}),f\leq\psi\}$$
$$=\inf\{\int_I\psi;\ \psi\in C(I;\mathbb{R}),f\leq\psi\}$$

(2) $$\underline{\int_I}f=\sup\{\int_I\varphi;\ \varphi\in\mathrm{Step}(I;\mathbb{R}),\varphi\leq f\}$$
$$=\sup\{\int_I\psi;\ \varphi\in C(I;\mathbb{R}),\varphi\leq f\}$$

（証明）　$f\in L^\infty(I;\mathbb{R})$ を一つ取る。任意の $\Delta\in\mathscr{P}(I)$ に対し
$M_j=\sup\{f(x);x\in I_j\},\ m_j=\inf\{f(x);x\in I_j\},\ \psi_0=\sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)}M_j\chi_{I_j},\ \varphi_0=\sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)}m_j\chi_{I_j}$
と置くと $\psi_0,\varphi_0\in\mathrm{Step}(I;\mathbb{R}),\ \varphi_0\leq f\leq\psi_0$ となるので

$$\underline{S}(f;\Delta)=\sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)}m_j|I_j|=\int_I\varphi_0$$
$$\leq\sup\{\int_I\varphi;\ \varphi\in\mathrm{Step}(I;\mathbb{R}),\varphi\leq f\},$$
$$\bar{S}(f;\Delta)=\sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)}M_j|I_j|=\int_I\psi_0$$
$$\geq\inf\{\int_I\psi;\ \psi\in\mathrm{Step}(I;\mathbb{R}),f\leq\psi\}$$

が従う。これより

$$\underline{\int_I} f = \sup\{\underline{S}(f;\Delta); \Delta \in \mathscr{P}(I)\} \le \sup\{\int_I \varphi;\ \varphi \in \mathrm{Step}(I;\mathbb{R}), \varphi \le f\},$$

$$\overline{\int_I} f = \inf\{\bar{S}(f;\Delta); \Delta \in \mathscr{P}(I)\} \ge \inf\{\int_I \psi;\ \psi \in \mathrm{Step}(I;\mathbb{R}), f \le \psi\}$$

を得る。一方 $\varphi \le f \le \psi$ なる $\psi, \psi \in \mathrm{Step}(I;\mathbb{R})$ に対し

$$\int_I \varphi = \underline{\int_I} \varphi \le \underline{\int_I} f \le \overline{\int_I} f \le \overline{\int_I} \psi = \int_I \psi$$

であるから

$$\begin{aligned}\sup\{\int_I \varphi;\ \varphi \in \mathrm{Step}(I;\mathbb{R}), \varphi \le f\} \le &\ \underline{\int_I} f \\ &\le \overline{\int_I} f \le \inf\{\int_I \psi;\ \psi \in \mathrm{Step}(I;\mathbb{R}), f \le \psi\}\end{aligned}$$

を得る。以上より (1) (2) の初めの等式が従う。

次に (1) の第 2 の等式を示そう。第 1 の等式より任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\psi \in \mathrm{Step}(I;\mathbb{R})$ が存在し $f \le \psi$ 且つ

$$\int_I \psi < \overline{\int_I} f + \varepsilon$$

が成立つ。ψ に付随する分割 $\Delta = \{I_j; j \in \mathscr{I}(\Delta)\}$ によって ψ は $I \setminus \bigcup_{j \in \mathscr{I}(\Delta)} \partial I_j$ 上

$$\psi = \sum_{j \in \mathscr{I}(\Delta)} (\psi|\mathrm{Int} I_j)\chi_{I_j}$$

と表される。各 $j \in \mathscr{I}(\Delta)$ に対する小区間 I_j を $[a_j, b_j]$ と表し n を
$0 < \frac{2}{n} < \min\{|I_k|; k \in \mathscr{I}(\Delta)\}$ となる様に充分大きく取って $I'_j = [a_j, a_j + \frac{1}{n}],\ I''_j = [b_j - \frac{1}{n}, b_j]$
として $\psi_n|I_j : I_j \to \mathbb{R}$ を

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \|\psi\|_\infty - (\|\psi\|_\infty - (\psi|\mathrm{Int} I_j))n(x - a_j), & x \in I'_j, \\ \psi|\mathrm{Int} I_j, & x \in I_j \setminus (I'_j \cup I''_j), \\ \|\psi\|_\infty - (\|\psi\|_\infty - (\psi|\mathrm{Int} I_j))n(b_j - x), & x \in I''_j \end{cases}$$

と定める事で $\psi_n \in C(I;\mathbb{R})$ が定まる。この時 $f \le \psi \le \psi_n$,

$$\begin{aligned}\int_I \psi_n &= \sum_{j \in \mathscr{I}(\Delta)} (\psi|\mathrm{Int} I_j)|I_j| + \sum_{j \in \mathscr{I}(\Delta)} (\|\psi\|_\infty - (\psi|\mathrm{Int} I_j))\frac{1}{n} \\ &= \int_I \psi + \sum_{j \in \mathscr{I}(\Delta)} (\|\psi\|_\infty - (\psi|\mathrm{Int} I_j))\frac{1}{n}\end{aligned}$$

となるから $N \geq 1$ が存在し任意の $n \geq N$ に対し

$$\int_I \psi_n < \int_I \psi + \varepsilon$$

が成立つ。故に

$$\int_I \psi_n < \overline{\int_I} f + 2\varepsilon$$

更には

$$\inf\{\int_I \psi;\ \psi \in C(I;\mathbb{R}),\ f \leq \psi\} < \overline{\int_I} f + 2\varepsilon$$

が成立つ。$\varepsilon > 0$ は任意であったから

$$\inf\{\int_I \psi;\ \psi \in C(I;\mathbb{R}),\ f \leq \psi\} < \overline{\int_I} f$$

が従う。一方 $f \leq \psi$ なる任意の $\psi \in C(I;\mathbb{R})$ に対し

$$\overline{\int_I} f \leq \overline{\int_I} \psi = \int_I \psi$$

となるから

$$\overline{\int_I} f \leq \inf\{\int_I \psi;\ \psi \in C(I;\mathbb{R}),\ f \leq \psi\}$$

が従う。故に (1) の第 2 の等式が成立つ。

最後に (2) の第 2 の等式を示そう。任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\varphi \in \mathrm{Step}(I;\mathbb{R})$ が存在し $\varphi \leq f$ 且つ

$$\underline{\int_I} f - \varepsilon < \int_I \varphi$$

が成立つ。φ に付随する分割 $\Delta = \{I_j; j \in \mathscr{I}(\Delta)\}$ によって φ は $I \setminus \bigcup_{j \in \mathscr{I}(\Delta)} \partial I_j$ 上

$$\varphi = \sum_{j \in \mathscr{I}(\Delta)} (\varphi|\mathrm{Int} I_j)\chi_{I_j}$$

と表される。上と同様 $I_j = [a_j, b_j]$ に対し n を充分大きく取って $I_j' = [a_j, a_j + \frac{1}{n}]$, $I_j'' = [b_j - \frac{1}{n}, b_j]$ として $\varphi_n|I_j : I_j \to \mathbb{R}$ を

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} -\|\varphi\|_\infty + ((\varphi|\mathrm{Int} I_j) + \|\varphi\|_\infty) n(x - a_j), & x \in I_j', \\ \varphi|\mathrm{Int} I_j, & x \in I_j \setminus (I_j' \cup I_j''), \\ -\|\varphi\|_\infty + ((\varphi|\mathrm{Int} I_j) + \|\varphi\|_\infty) n(b_j - x), & x \in I_j'' \end{cases}$$

と定める事で $\varphi_n \in C(I;\mathbb{R})$ が定まる。この時 $\varphi_n \leq \varphi \leq f$,

$$\begin{aligned}\int_I \varphi_n &= \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} (\varphi|\mathrm{Int}I_j)|I_j| + \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} ((\varphi|\mathrm{Int}I_j) - \|\varphi\|_\infty)\frac{1}{n} \\ &= \int_I \varphi + \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} (\|\varphi\|_\infty - (\varphi|\mathrm{Int}I_j))\frac{1}{n}\end{aligned}$$

となるから $N \geq 1$ が存在し任意の $n \geq N$ に対し

$$\int_I \varphi_n > \int_I \varphi - \varepsilon$$

が成立つ。故に

$$\int_I \varphi_n > \underline{\int}_I f - 2\varepsilon$$

更には

$$\sup\{\int_I \varphi;\ \varphi \in C(I;\mathbb{R}),\ \varphi \leq f\} > \underline{\int}_I f - 2\varepsilon$$

が成立つ。$\varepsilon > 0$ は任意であったから

$$\sup\{\int_I \varphi;\ \varphi \in C(I;\mathbb{R}),\ \varphi \leq f\} \geq \underline{\int}_I f$$

が従う。一方 $\varphi \leq f$ なる任意の $\varphi \in C(I;\mathbb{R})$ に対し

$$\int_I \varphi = \underline{\int}_I \varphi = \underline{\int}_I f$$

となるから

$$\sup\{\int_I \varphi;\ \varphi \in C(I;\mathbb{R}),\ \varphi \leq f\} \leq \underline{\int}_I f$$

が従う。故に (2) の第 2 の等式が成立つ。

命題 1.5　有界閉区間上の連続函数はリーマン積分可能である。

(証明)　命題は

$$\begin{aligned}0 &\leq \bar{S}(f;\Delta) - \underline{S}(f;\Delta) \\ &= \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} \sup\{|f(x)-f(y)|; x, y \in I_j\}|I_j| \\ &\leq \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} \sup\{|f(x)-f(y)|; x, y \in I, |x-y| < \delta\}|I_j| \\ &= \omega_\delta(f;I) \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} |I_j| \\ &= \omega_\delta(f;I)|I|\end{aligned}$$

なる評価及び有界閉区間上の連続函数の一様連続性から従う。

定義　$f \in L^\infty(I;\mathbb{R})$ が I 上**有界変動** (bounded variation on I) であるとは

$$V(f) = \sup\{V(f;\Delta); \Delta \in \mathscr{P}(I)\}$$

が有限である事を謂う。ここに

$$V(f;\Delta) = \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|$$

は分割 Δ に対する f の**変動**であり $I = [a,b]$ の分割 Δ は $(n+1)$ 個の分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

で与えられるものとする。

命題 1.6　有界閉区間上の有界変動函数はリーマン積分可能である。

(証明)　任意に $\varepsilon > 0$ を取る。$|\Delta| < \frac{\varepsilon}{2V(f)}$ なる $\Delta = \{I_j; j \in \mathscr{I}(\Delta)\} \in \mathscr{P}(I)$ を一つ固定する。$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2|I|}$ なる δ に対し $\{(\xi_j, \eta_j) \in I_j \times I_j; j \in \mathscr{I}(\Delta)\}$ が存在し各 $j \in \mathscr{I}(\Delta)$ に対し

$$\sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in I_j\} - \delta < |f(\xi_j) - f(\eta_j)|$$

を満たす。$\{\xi_j; j \in \mathscr{I}(\Delta)\} \cup \{\eta_j; j \in \mathscr{I}(\Delta)\} \cup \{a\} \cup \{b\}$ を分点として出来る I の分割を Δ' とする。このとき

$$\begin{aligned}
0 &\leq \bar{S}(f;\Delta) - \underline{S}(f;\Delta) \\
&= \sum_{j \in \mathscr{I}(\Delta)} \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in I_j\}|I_j| \\
&\leq \sum_{j \in \mathscr{I}(\Delta)} (\delta + |f(\xi_j) - f(\eta_j)|)|I_j| \\
&\leq \delta \sum_{j \in \mathscr{I}(\Delta)} |I_j| + |\Delta| \sum_{j \in \mathscr{I}(\Delta)} |f(\xi_j) - f(\eta_j)| \\
&= \delta|I| + |\Delta| V(f;\Delta') \\
&\leq \delta|I| + |\Delta| V(f) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

となり f のリーマン可積分性が従う。

　リーマン可積分函数の空間 $\mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ は一様収束の概念で閉じている。即ち次の定理が成立つ。

定理 1.4　$\mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ の列 (f_n) は $f \in L^\infty(I;\mathbb{R})$ に一様収束しているとする：

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

このとき $f \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ であり次の等式が成立つ：

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n = \int_I f$$

（証明）　先ず $\|f\|_\infty \le \|f-f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty$ より $f \in L^\infty(I;\mathbb{R})$ なる事に注意する。
（証明その 1）　任意の $\varepsilon > 0$ を取る。評価

$$\|f_n - f\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{4|I|}$$

を満たす n を取る。$f_n \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ 故 $\Delta \in \mathscr{P}(I)$ が存在し

$$\bar{S}(f_n;\Delta) - \underline{S}(f_n;\Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる。任意の $\delta > 0$ に対し $\{(\xi_j,\eta_j) \in I_j \times I_j; j \in \mathscr{I}(\Delta)\}$ が存在し各 $j \in \mathscr{I}(\Delta)$ に対し

$$\sup\{|f(x)-f(y)|; x,y \in I_j\} - \delta < |f(\xi_j) - f(\eta_j)|$$

が成立つ。一方

$$\begin{aligned}
|f(\xi_j) - f(\eta_j)| &\le |f(\xi_j) - f_n(\xi_j)| + |f_n(\xi_j) - f_n(\eta_j)| + |f_n(\eta_j) - f(\eta_j)| \\
&\le 2\|f - f_n\|_\infty + |f_n(\xi_j) - f_n(\eta_j)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2|I|} + \sup\{|f_n(x) - f_n(y)|; x,y \in I_j\}
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
&\sup\{|f(x)-f(y)|; x,y \in I_j\} - \delta \\
&< \frac{\varepsilon}{2|I|} + \sup\{|f_n(x) - f_n(y)|; x,y \in I_j\}
\end{aligned}$$

が従い $\delta > 0$ は任意だったので

$$\sup\{|f(x)-f(y)|; x,y \in I_j\} \le \frac{\varepsilon}{2|I|} + \sup\{|f_n(x) - f_n(y)|; x,y \in I_j\}$$

を得る。これより直ちに

$$\begin{aligned}
\bar{S}(f;\Delta) - \underline{S}(f;\Delta) &= \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} \sup\{|f(x)-f(y)|; x,y \in I_j\}|I_j| \\
&\le \frac{\varepsilon}{2|I|}\sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)}|I_j| + \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)}\sup\{|f_n(x)-f_n(y)|; x,y \in I_j\}|I_j| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \bar{S}(f_n;\Delta) - \underline{S}(f_n;\Delta) < \varepsilon
\end{aligned}$$

を得るので $f \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ が従う。後半は

$$\left|\int_I f_n - \int_I f\right| = \left|\int_I (f_n - f)\right| \le \int_I |f_n - f| \le \|f_n - f\|_\infty \to 0$$

より従う。

（証明その 2）　任意の $x \in I$ に対し成立する評価

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \|f - f_n\|_\infty$$

は

$$-\|f - f_n\|_\infty + f_n(x) \leq f(x) \leq f_n(x) + \|f - f_n\|_\infty$$

と同値である。I 上の下積分・上積分・リーマン積分を取る事に依って

$$-\|f - f_n\|_\infty |I| + \int_I f_n \leq \underline{\int_I} f \leq \overline{\int_I} f \leq \int_I f_n + \|f - f_n\|_\infty |I|$$

を得る。更に、これより次の評価

$$0 \leq \overline{\int_I} f - \underline{\int_I} f \leq 2|I| \; \|f - f_n\|_\infty$$

が従い、右辺の極限を取ることで

$$\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$$

を得るので $f \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ が従う。

定義　$f \in L^\infty(I;\mathbb{R})$ に対し $f^\pm \in L^\infty(I;\mathbb{R})$ を

$$f^\pm = \frac{1}{2}(|f| \pm f) : I \ni x \longmapsto \frac{1}{2}(|f(x)| \pm f(x)) \in \mathbb{R}$$

と定義し夫々 f の**正の部分**及び**負の部分**と謂う。定義より次の性質が従う。

- $f^\pm = (\pm f) \vee 0 \; (= \max(\pm f, 0))$
- $f^\pm \geq 0$
- $f = f_+ - f_-$
- $|f| = f_+ + f_-$

命題 1.7　$f \in L^\infty(I;\mathbb{R})$ に対し次は同値である。

(1) $f \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$

(2) $f^\pm \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$

このとき $|f| \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ であり次の評価が成立つ：

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$$

（証明） (1) $\Rightarrow$ (2) ： $\big||f(x)|-|f(y)|\big| \leq |f(x)-f(y)|$ より任意の分割 $\Delta = \{I_j; j \in \mathscr{I}(\Delta)\}$ に対し

$$\omega(|f|;I_j) \leq \omega(f;I_j)$$

が従い、定理 1.3 より $|f| \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ を得る。これより直ちに $f^{\pm} = \frac{1}{2}(|f| \pm f) \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ が従う。

(2) $\Rightarrow$ (1) ： $f = f_+ - f_-$ より (2) から (1) を得る。

最後の評価は $|f| \pm f \geq 0$ に定理 1.1 を用いれば良い。

註　$f \in L^\infty(I;\mathbb{R})$ に対して（上の命題に拠り）

$$f \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R}) \ \Rightarrow \ |f| \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$$

であるが逆は成立たない。実際

$$f = \chi_{I\cap\mathbb{Q}} - \chi_{I\setminus\mathbb{Q}}$$

は $|f| = 1 \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ であるが $f^+ = \chi_{I\cap\mathbb{Q}} \notin \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ 且つ $f^- = -\chi_{I\setminus\mathbb{Q}} \notin \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$

命題 1.8　$\mathbb{R}$ の部分集合 M に対し次は同値である。

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し有界開区間の列 $(I_n; n \geq 1)$ が存在し

$$M \subset \bigcup_{n\geq 1} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$$

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し有界閉区間の列 $(K_n; n \geq 1)$ が存在し

$$M \subset \bigcup_{n\geq 1} K_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |K_n| < \varepsilon$$

（証明） (1) $\Rightarrow$ (2) ：$K_n = \overline{I}_n$ とすれば良い。

(2) $\Rightarrow$ (1) ： 任意に $\varepsilon > 0$ を取る。(2) を $\varepsilon/2$ に適用すれば

$$M \subset \bigcup_{n\geq 1} K_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |K_n| < \varepsilon/2$$

なる有界閉区間の列 $(K_n; n \geq 1)$ の存在が従う。各 n に対し K_n は $K_n = [a_n, b_n]$ と表されているものとする。このとき $I_n = \left(\dfrac{3a_n - b_n}{2}, \dfrac{3b_n - a_n}{2}\right)$ と置けば $\dfrac{3a_n - b_n}{2} < a_n < b_n <$

$\dfrac{3b_n - a_n}{2}$ より $K_n \subset I_n$ であり $|I_n| = 2(b_n - a_n) = 2|K_n|$ となるので $(I_n; n \geq 1)$ は (1) を満たす。

定義　命題 1.8 の同値な条件の一つ（従って両方）を満たす $M \subset \mathbb{R}$ を**零集合** (null set) と謂う。

定理 1.5　$f \in L^\infty(I;\mathbb{R})$ に対し次は同値である。

(1) $f \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$

(2) f の不連続点の成す集合は零集合

（証明） (1) $\Rightarrow$ (2) ：f の不連続点全体の集合を D とすると連続点全体は $I \setminus D$ であり、それは

$$I \setminus D = \{x \in I; \omega(f;x) = 0\}$$

と特徴付けられるので D は

$$D = \{x \in I; \omega(f;x) > 0\} = \bigcup_{n\geq 1} D_n$$
$$D_n = \{x \in I; \omega(f;x) \geq 1/n\}$$

と表される。よって各 n に対し D_n が零集合である事を示せば良い。任意に $\varepsilon > 0$ を取る。リーマン可積分性の特徴付け（定理 1.3）より $\Delta \in \mathscr{P}(I)$ が存在し

$$\bar{S}(f;\Delta) - \underline{S}(f;\Delta) < \varepsilon$$

が成立つ。この $\Delta = \{I_j; j \in \mathscr{I}(\Delta)\}$ に対し

$$\mathscr{J} = \{j \in \mathscr{I}(\Delta); D_n \cap \mathrm{Int} I_j \neq \emptyset\}$$
$$\mathscr{J}' = \{j \in \mathscr{I}(\Delta); D_n \cap \partial I_j \neq \emptyset\}$$

と置く。任意の $j \in \mathscr{J}$ に対し $x \in D_n \cap \mathrm{Int} I_j$ が存在する。$x \in \mathrm{Int} I_j$ 故 $\delta > 0$ を取って $(x-\delta, x+\delta) \subset I_j$ とする事が出来る。このとき ω_δ の単調性より

$$\omega(f;I_j) \geq \omega_\delta(f;x) \geq \omega(f;x) \geq 1/n$$

が従うので

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{j\in\mathscr{J}} |I_j| \leq \sum_{j\in\mathscr{J}} \omega(f;I_j)|I_j| &\leq \sum_{j\in\mathscr{I}(\Delta)} \omega(f;I_j)|I_j| \\ &= \bar{S}(f;\Delta) - \underline{S}(f;\Delta) < \varepsilon\end{aligned}$$

を得る。さて

$$D_n \subset \left(\bigcup_{j\in\mathscr{J}} I_j\right) \cup \left(\bigcup_{j\in\mathscr{J}'} \partial I_j\right)$$

であり $\bigcup_{j\in\mathscr{I}'}\partial I_j$ は（Δ の分点の部分集合として）有限個の I の点から成る集合であるので長さの総和が ε 未満の（有限個の）有界閉区間列 $(I'_j; j\in\mathscr{I}')$ で覆う事が出来る：

$$\bigcup_{j\in\mathscr{I}'}\partial I_j \subset \bigcup_{j\in\mathscr{I}'} I'_j,\ \sum_{j\in\mathscr{I}'}|I'_j| < \varepsilon$$

従って

$$\begin{aligned} D_n &\subset \left(\bigcup_{j\in\mathscr{I}} I_j\right) \cup \left(\bigcup_{j\in\mathscr{I}'} I'_j\right) \\ \sum_{j\in\mathscr{I}}|I_j| &+ \sum_{j\in\mathscr{I}'}|I'_j| < n\varepsilon + \varepsilon = (n+1)\varepsilon \end{aligned}$$

となり D_n は零集合となる。これが示すべき事であった。

(2) $\Rightarrow$ (1) ： 任意に $\varepsilon > 0$ を取る。仮定より有界開区間の列 $(J_n; n\geq 1)$ が存在し

$$D \subset \bigcup_{n\geq 1} J_n,\ \sum_{n\geq 1}|J_n| < \varepsilon$$

が成立つ。一方、任意の $x\in I\setminus D$ に対し（f の x に於ける連続性に拠り）$\delta(x) > 0$ が存在し $\omega(f; (x-\delta(x), x+\delta(x)) < \varepsilon$ が成立つ。以上より I は

$$I \subset \left(\bigcup_{n\geq 1} J_n\right) \cup \bigcup_{x\in I\setminus D}(x-\delta(x), x+\delta(x))$$

なる開被覆を持つ。I のコンパクト性より、この開被覆は有限部分被覆を持つ。それらを

$$(J_{n_i}; 1\leq i\leq N),\ ((x_j-\delta(x_j), x_j+\delta(x_j)); 1\leq j\leq N')$$

として改めて夫々

$$(J'_k; 1\leq k\leq N'),\ (J''_l; 1\leq l\leq N'')$$

と表す事にする。この時 I の細分 $\Delta = \{I_j; j\in\mathscr{I}(\Delta)\}$ を取って

$$\begin{aligned} &\mathscr{I}(\Delta) = \mathscr{J}' \sqcup \mathscr{I}'', \\ &\mathscr{I}' = \{j\in\mathscr{I}(\Delta);\ \exists k: I_j\subset J'_k\},\ \mathscr{I}'' = \{j\in\mathscr{I}(\Delta);\ \exists l: I_j\subset J''_l\} \end{aligned}$$

とする事が出来る。さて

$$\begin{aligned} \sum_{j\in\mathscr{I}'}\omega(f; I_j)|I_j| &\leq 2\|f\|_\infty \sum_{j\in\mathscr{I}'}|I_j| \\ &\leq 2\|f\|_\infty \sum_{k=1}^{N}|J'_k| \\ &\leq 2\|f\|_\infty \sum_{n\geq 1}|J_n| \leq 2\|f\|_\infty\varepsilon \\ \sum_{j\in\mathscr{I}''}\omega(f; I_j)|I_j| &\leq \varepsilon \sum_{j\in\mathscr{I}''}|I_j| \leq \varepsilon|I| \end{aligned}$$

より

$$\sum_{j \in \mathscr{I}(\Delta)} \omega(f; I_j)|I_j| \leq (2\|f\|_\infty + |I|)\varepsilon$$

を得るので定理 3 より f は I 上リーマン可積分となる。

１．３　リーマン積分に対する収束定理

この節ではルベーグ積分論に於ける各種の収束定理をリーマン積分に対して与えよう。次の補題が重要である。

補題 1.1　$(f_n) \subset L^\infty(I; \mathbb{R})$ は次の条件を満たすものとする：

(a) (f_n) は非負単調減少列である (即ち任意の $x \in I$ と $n \geq 1$ に対し $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq 0$)

(b) (f_n) は 0 に各点収束する (即ち任意の $x \in I$ に対し $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$)

このとき

$$\lim_{n\to\infty} \underline{\int_I} f_n = 0$$

（証明）　任意に $\varepsilon > 0$ を与える。命題 1.4 より任意の $n \geq 1$ に対し $\varphi_n \in C(I; \mathbb{R})$ が存在し $\varphi_n \leq f_n$, $\underline{\int_I} f_n < \int_I \varphi_n + \varepsilon/2^n$ とする事が出来る。このとき $\varphi_n \vee 0 \leq f_n \vee 0 = f_n$, $\underline{\int_I} f_n < \int_I \varphi_n + \varepsilon/2^n \leq \int_I (\varphi_n \vee 0) + \varepsilon/2^n$ となるから φ_n を $\varphi_n \vee 0$ に置き換える事に因り初めから $\varphi_n \geq 0$ として良い事が分かる。そこで

$$\psi_1 = \varphi_1,\ \psi_n = \varphi_n \wedge \psi_{n-1},\ n \geq 2$$

として帰納的に $(\psi_n) \subset C(I; \mathbb{R})$ を定める。このとき $\psi_{n+1} = \varphi_{n+1} \wedge \psi_n \leq \psi_n$ より (ψ_n) は単調減少列であり $\psi_1 = \varphi_1 \geq 0, \varphi_n \geq 0$ より帰納的に $\psi_n = \varphi_n \wedge \psi_{n-1} \geq 0$ が従い (ψ_n) は非負である事が分かる。また $0 \leq \psi_n \leq \varphi_n \leq f_n$ より (ψ_n) は 0 に各点収束する事が分かる。さて

$$\begin{aligned}
\psi_n + \varphi_n \vee \psi_{n-1} &= \varphi_n \wedge \psi_{n-1} + \varphi_n \vee \psi_{n-1} = \varphi_n + \psi_{n-1} \\
\varphi_n \vee \psi_{n-1} &\leq \varphi_{n-1} \leq f_{n-1}
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\underline{\int_I} f_n - \int_I \psi_n &< \int_I \varphi_n + \varepsilon/2^n - \int_I \psi_n \\
&= \int_I \varphi_n + \varepsilon/2^n + \int_I (\varphi_n \vee \psi_{n-1} - \varphi_n - \psi_{n-1}) \\
&\leq \varepsilon/2^n + \underline{\int_I} f_{n-1} - \int_I \psi_{n-1}
\end{aligned}$$

を得るので

$$\begin{aligned}\underline{\int_I} f_n - \int_I \psi_n &< \underline{\int_I} f_1 - \int_I \psi_1 + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon/2^k \\ &= \underline{\int_I} f_1 - \int_I \varphi_1 + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon/2^k < \sum_{k=1}^{n} \varepsilon/2^k < \varepsilon,\end{aligned}$$

即ち

$$\underline{\int_I} f_n < \int_I \psi_n + \varepsilon$$

を得る。$(\psi_n) \subset C(I;\mathbb{R})$ は 0 に各点収束する単調減少列であるからディニの定理より 0 に一様収束する。よって

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \psi_n = 0$$

となり

$$\limsup_{n\to\infty} \underline{\int_I} f_n \leq \varepsilon$$

が従う。$\varepsilon > 0$ は任意であったので

$$\limsup_{n\to\infty} \underline{\int_I} f_n \leq 0$$

一方 f_n は非負であるから

$$\liminf_{n\to\infty} \underline{\int_I} f_n \geq 0$$

これより極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \underline{\int_I} f_n$ は存在し 0 に等しい。

定理 1.6（リーマン積分に対するアルツェラの有界収束定理） $f, f_n \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ は次の条件を満たすものとする：

(a) (f_n) は f に各点収束する (即ち任意の $x \in I$ に対し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$)

(b) (f_n) は一様有界である (即ち $M \geq 0$ が存在し $\displaystyle\sup_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty \leq M$)

このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_I |f_n - f| = 0$$

特に

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n = \int_I f$$

（証明）$g_n = f_n - f$ と置くと $g_n \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ であり (g_n) は 0 に各点収束する。$g_n^{\pm} = \frac{1}{2}(|g_n| \pm g_n)$ と置くと $g_n^{\pm} \geq 0$, $g_n = g_n^{+} - g_n^{-}$, $|g_n| = g_n^{+} + g_n^{-}$ であり (g_n^{+}) も (g_n^{-}) も共に 0 に各点収束し

$$\|g_n^{\pm}\|_\infty \leq \|g_n\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty + \|f\|_\infty \leq \sup_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty + \|f\|_\infty$$

より $(g_n^{\pm})$ は一様有界である。$h_n^{\pm} = \sup\{g_m^{\pm};\ m \geq n\}$ と置くと $(h_n^{\pm})$ は I 上の非負有界函数の単調減少列であり 0 に各点収束する。補題 1.1 より

$$\lim_{n\to\infty} \underline{\int}_I h_n^{\pm} = 0$$

となり $g_n^{\pm} \leq h_n^{\pm}$, $g_n^{\pm} \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ であるので

$$\lim_{n\to\infty} \int_I g_n^{\pm} = \lim_{n\to\infty} \underline{\int}_I g_n^{\pm} \leq \lim_{n\to\infty} \underline{\int}_I h_n^{\pm} = 0$$

が従う。これより

$$\lim_{n\to\infty} \int_I |f_n - f| = \lim_{n\to\infty} \int_I |g_n| = \lim_{n\to\infty} \int_I (g_n^{+} + g_n^{-}) = \lim_{n\to\infty} \int_I g_n^{+} + \lim_{n\to\infty} \int_I g_n^{-} = 0$$

が従う。

定理 1.7　（リーマン積分に対する単調収束定理）　$f, f_n \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ は次の条件を満たすものとする：

(a) (f_n) は単調増加列である (即ち任意の $x \in I$ 及び $n \geq 1$ に対し $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$)

(b) (f_n) は f に各点収束する (即ち任意の $x \in I$ に対し $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$)

このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_I |f_n - f| = 0$$

特に

$$\sup_{n\geq 1} \int_I |f_n| < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n = \int_I f$$

（証明）　仮定より函数列 $(f - f_n) \subset \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ は 0 に各点収束する非負単調減少列である。補題 3.1 より

$$\lim_{n\to\infty} \underline{\int}_I (f - f_n) = 0$$

となる。$f, f_n \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ 及び $|f - f_n| = f - f_n$ より

$$\lim_{n\to\infty} \int_I |f - f_n| = \lim_{n\to\infty} \int_I (f - f_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{\int}_I (f - f_n) = 0$$

を得る。また

$$f_1 \le f_n \le f$$

より

$$\begin{aligned}&|f_n| \le |f| \vee |f_1|,\\ &\sup_{n\ge 1}\int_I |f_n| \le \left(\int_I |f|\right) \vee \left(\int_I |f_1|\right)\end{aligned}$$

が従う。

定理 1.8　（リーマン積分に対するファトゥの補題）　$f, f_n \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ は次の条件を満たすとする：

(a) (f_n) は非負であり I 上の積分値から成る実数列の下極限は有限である。即ち

$$f_n \ge 0, \quad \liminf_{n\to\infty}\int_I f_n < \infty$$

(b) f は (f_n) の下極限函数である。即ち任意の $x \in I$ に対し

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

このとき

$$\int_I f = \int_I \liminf_{n\to\infty} f_n \le \liminf_{n\to\infty}\int_I f_n$$

（証明）　各 $n \ge 1$ に対し $g_n = \inf_{j\ge n} f_j$ と置く。$g_n \ge 0$ 故 $f - g_n \le f$ であり

$$(f-g_n)^+ = (f-g_n) \vee 0 \le f \vee 0 = f$$

となる。$(f-g_n)^+$ は I 上 0 に各点収束し f は I 上有界であるからアルツェラの定理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_I (f-g_n)^+ = 0$$

が従う。さて

$$f = (f-g_n) + g_n \le (f-g_n)^+ + g_n \le (f-g_n)^+ + f_n$$

を積分し

$$\int_I f \le \int_I (f-g_n)^+ + \int_I f_n$$

を得る。右辺の下極限を取ると

$$\begin{aligned}\int_I f &\le \liminf_{n\to\infty}\left(\int_I (f-g_n)^+ + \int_I f_n\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_I (f-g_n)^+ + \liminf_{n\to\infty}\int_I f_n\\ &= \liminf_{n\to\infty}\int_I f_n\end{aligned}$$

定理 1.8 の系 1　$f, g, f_n \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ は次の条件を満たすとする：

(a) (f_n) は下から g で評価され I 上の積分値から成る実数列の下極限は有限である。即ち

$$f_n \geq g, \quad \liminf_{n\to\infty} \int_I f_n < \infty$$

(b) f は (f_n) の下極限函数である。

このとき

$$\int_I f = \int_I \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_I f_n$$

（証明）　函数列 $(f_n - g)$ に定理 1.8 を適用すれば良い。

$$\begin{aligned}
\int_I f &= \int_I (f-g) + \int_I g \\
&= \int_I \liminf_{n\to\infty} (f_n - g) + \int_I g \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_I (f_n - g) + \int_I g \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(\int_I f_n + \int_I g \right) + \int_I g \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int_I f_n - \int_I g + \int_I g = \liminf_{n\to\infty} \int_I f_n
\end{aligned}$$

定理 1.8 の系 2　$f, g, f_n \in \mathscr{R}(I; \mathbb{R})$ は次の条件を満たすとする：

(a) (f_n) は上から g で評価され I 上の積分値から成る実数列の上極限は有限である。即ち

$$f_n \leq g, \quad \limsup_{n\to\infty} \int_I f_n > -\infty$$

(b) f は (f_n) の上極限函数である。

このとき

$$\limsup_{n\to\infty} \int_I f_n \leq \limsup_{n\to\infty} f_n = \int_I f$$

（証明）　函数列 $(g - f_n)$ に定理 1.8 を適用すれば良い。

$$\begin{aligned}
\int_I f &= -\int_I (g-f) + \int_I g = -\int_I (g - \limsup_{n\to\infty} f_n) + \int_I g \\
&= -\int_I (g + \liminf_{n\to\infty}(-f_n)) + \int_I g \\
&= -\int_I \liminf_{n\to\infty} (g - f_n) + \int_I g \\
&\geq -\liminf_{n\to\infty} \int_I (g - f_n) + \int_I g \\
&= -\liminf_{n\to\infty} \left(\int_I g - \int_I f_n \right) + \int_I g \\
&= -\int_I g - \liminf_{n\to\infty} \left(-\int_I f_n \right) + \int_I g = \limsup_{n\to\infty} \int_I f_n
\end{aligned}$$

１．４　濾過に依るリーマン可積分性の特徴付け

網 (net) に依るリーマン可積分性の特徴付けが Bear,“A premier of Lebesgue Integration” に与えられている。ここでは濾過 (filter) の言葉で定式化しよう。

定義　(空でない) 集合 X の部分集合の族 $\mathscr{F}$ は次の条件 (F1)-(F4) を満たすとき X 上の**濾過** (filter) と謂う。

(F1) $\mathscr{F} \neq \emptyset$

(F2) $\emptyset \notin \mathscr{F}$

(F3) $M, N \in \mathscr{F}$ ならば $M \cap N \in \mathscr{F}$

(F4) $M \in \mathscr{F}, M \subset N \subset X$ ならば $N \in \mathscr{F}$

例 1　一点 $x \in X$ に対し x を含む集合から成る族 $\mathscr{F}(x) = \{M \subset X; x \in M\}$ は X 上の濾過であり x の**主濾過** (principal filter at x) と謂う。

例 2　X の点列 $a : \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow X$ に対し

$$\mathscr{F}(a) = \{M \subset X;\ n_0 \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ が存在し } \{a(n);\ n \geq n_0\} \subset M\}$$

は X 上の濾過であり点列 a の**素濾過** (elementary filter) であると謂う。

例 3　位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の一点 $x \in X$ に対し x の近傍系 $\mathscr{V}(x) = \{V \subset X;\ O \in \mathscr{O}$ が存在し $x \in O \subset V\}$ は X 上の濾過であり x の**近傍濾過** (neighborhood filter at x) と謂う。

定義　X 上の二つの濾過 $\mathscr{F}, \mathscr{F}'$ に対し $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$ なるとき $\mathscr{F}$ は $\mathscr{F}'$ より**弱い** (又は**粗い**) と謂い $\mathscr{F}'$ は $\mathscr{F}$ より**強い** (又は**細かい**) と謂う。特に $\mathscr{F} \subsetneqq \mathscr{F}'$ なるとき $\mathscr{F}$ は $\mathscr{F}'$ より**真に弱い** (又は**真に粗い**) と謂い $\mathscr{F}'$ は $\mathscr{F}$ より**真に強い** (又は**真に細かい**) と謂う。

註.　(空でない) 集合 X 上の濾過全体の集合は上の定義の強弱関係 (包含関係) に依り半順序集合を成す。

定義　位相空間 X 上の濾過 $\mathscr{F}$ は点 $x \in X$ の近傍濾過よりも強い ($\mathscr{V}(x) \subset \mathscr{F}$) とき x に**収束する**と謂い $\mathscr{F} \longrightarrow x$ と表す。このとき x を濾過 $\mathscr{F}$ の**極限**と謂う。極限を持つ濾過を**収束する濾過**と謂う。

註.　位相空間 X の点列 $a : \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow X$ が点 $x \in X$ に収束する為の必要充分条件は $\mathscr{F}(a) \longrightarrow x$(点列 a の素濾過が x に収束する事) である。

命題 1.9　(空でない) 集合 X の部分集合の (空でない) 族 $\mathscr{G}$ に対し次は同値である。

(1) $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ なる X 上の濾過 $\mathscr{F}$ が存在する。

(2) $\mathscr{G}$ の任意の有限個の集合の交わりは空でない。即ち

$$(M_\lambda; \lambda \in \Lambda) \subset \mathscr{G}, \sharp\Lambda < \infty \implies \bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \neq \emptyset$$

（証明）　(1) ⇒ (2) ：$M_\lambda \in \mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ 故 (F3) より $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \in \mathscr{F}$ であり (F2) より $\emptyset \notin \mathscr{F}$ 故 (2) が従う。

(2) ⇒ (1) ：$\mathscr{G}_0 = \{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \subset X;\ (M_\lambda; \lambda \in \Lambda) \subset \mathscr{G}, \sharp\Lambda < \infty\}$,

$$\mathscr{F} = \{M \subset X;\ \exists N \in \mathscr{G}_0 : N \subset M\}$$

と置く。任意の $M \in \mathscr{G}$ に対し $M \in \mathscr{G}_0$ であり $M \subset M$ であるから $M \in \mathscr{F}$ 即ち $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ が従う。$\mathscr{G} \neq \emptyset$ 故 $M \in \mathscr{G}$ が存在し $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ 故 $M \in \mathscr{F}$ 即ち $\mathscr{F} \neq \emptyset$ が従う。(2) より $\emptyset \notin \mathscr{G}_0$ となるが $\emptyset \in \mathscr{F}$ なら $\emptyset \in \mathscr{G}_0$ となって矛盾する。即ち $\emptyset \notin \mathscr{F}$ が従う。$M, N \in \mathscr{F}$ なら $M', N' \in \mathscr{G}_0$ が存在し $M' \subset M, N' \subset N$ となり $M' \cap N' \in \mathscr{G}_0$ 且つ $M' \cap N' \subset M \cap N$ となるので $M \cap N \in \mathscr{F}$ が従う。$M \in \mathscr{F}, M \subset N \subset X$ なら $\mathscr{F}$ の定義より $N \in \mathscr{F}$ が従う。以上より $\mathscr{F}$ は $\mathscr{G}$ を含む X 上の濾過である。

定義　上の命題に於ける $\mathscr{F}$ を $\mathscr{G}$ より**生成された濾過**、$\mathscr{G}$ を濾過 $\mathscr{F}$ の**生成元の系** (system of generators) と謂う。

命題 1.10　（空でない) 集合 X の部分集合 $\mathscr{B}$ に対し次は同値である。

(1) $\mathscr{F} = \{M \subset X;\ \exists B \in \mathscr{B} : B \subset M\}$ は X 上の濾過である。

(2) $\mathscr{B}$ は次の三つの条件 (B1)-(B3) を満たす。

(B1) $\mathscr{B} \neq \emptyset$

(B2) $\emptyset \notin \mathscr{B}$

(B3) 任意の $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ に対し $B \in \mathscr{B}$ が存在し $B \subset B_1 \cap B_2$

（証明）　(1) ⇒ (2) ：$\mathscr{B} = \emptyset$ ならば $\mathscr{B}$ の元を含む集合は存在しない。即ち $\mathscr{F} = \emptyset$ となって矛盾を生じる。従って $\mathscr{B} \neq \emptyset$ が成立つ。$\emptyset \notin \mathscr{B}$ ならば $\emptyset \subset \emptyset$ 故 $\emptyset \in \mathscr{F}$ となって矛盾。従って $\emptyset \notin \mathscr{B}$ が成立つ。$B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ に対し $B_1, B_2 \in \mathscr{F}$ となるから $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{F}$ が成立つ。故に $B \in \mathscr{B}$ が存在し $B \subset B_1 \cap B_2$ が成立つ。

(2) ⇒ (1) ：$\mathscr{F} = \emptyset$ なら $\mathscr{B}$ の元を含む集合は存在しない。よって $M \in \mathscr{B}$ が存在したとすると $M \subset M$ 故 $M \in \mathscr{F}$ となり矛盾を生ずる。よって $\mathscr{B} = \emptyset$ となるがこれは (B1) に矛盾。従って (F1) が成立する。$\emptyset \in \mathscr{F}$ ならば $B \in \mathscr{B}$ が存在し $B \subset \mathscr{B}$ となるが、これより $\emptyset = B \in \mathscr{B}$ となり矛盾。従って (F2) が成立する。$M, N \in \mathscr{F}$ なら $M', N' \in \mathscr{B}$ が存在し $M' \subset M, N' \subset N$ となる。(B3) より $B \in \mathscr{B}$ が存在し $B \subset M' \cap N'$ となり $B \subset M \cap N$ を得る。故に $M \cap N \subset \mathscr{F}$ となり (F3) が成立する。$M \in \mathscr{F}, M \subset N \subset X$ なら $\mathscr{F}$ の定義より $N \in \mathscr{F}$ となり (F4) が成立する。

定義　(空でない) 集合 X の部分集合の族 $\mathscr{B}$ は (B1)-(B3) を満たすとき $\mathscr{B}$ を**濾過基底** (filter base) と謂う。また $\mathscr{B}$ を $\mathscr{F}=\{M\subset X;\ \exists B\in\mathscr{B}:B\subset M\}$ で与えられる X 上の**濾過 $\mathscr{F}$ の基底**であると謂う。

定義　$\mathscr{B}$ を位相空間 X 上の濾過基底とし $x\in X$ とする。$\mathscr{B}$ の生成する X 上の濾過が x に収束するとき $\mathscr{B}$ は x に**収束する**と謂い $\mathscr{B}\longrightarrow x$ と表す。このとき x を濾過基底 $\mathscr{B}$ の**極限**と謂う。極限を持つ濾過基底を**収束する濾過基底**と謂う。

有界閉区間 $I\subset\mathbb{R}$ の細分 $\mathscr{P}(I)$ は包含関係 $\subset$ に依って半順序集合であり有向集合を成している：

$$\begin{aligned}&\Delta,\Delta'\in\mathscr{P}\\ \Longrightarrow\ &\Delta\cup\Delta'\in\mathscr{P}(I),\quad \Delta,\Delta'\subset\Delta\cup\Delta'\end{aligned}$$

さて函数 $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ 及び $\Delta\in\mathscr{P}$ に対し空でない集合 $R_f(\Delta)\subset\mathbb{R}$ を

$$R_f(\Delta)=\{R(f;\Delta',\xi')\in\mathbb{R};\Delta'\in\mathscr{P}(I),\Delta\subset\Delta',\xi'\text{ は }\Delta'\text{ に伴う代表点の列 }\}$$

と定める。$R_f(\Delta)$ は次の性質を満たす：

$$\begin{aligned}&\Delta,\Delta'\in\mathscr{P}(I),\ \Delta\cup\Delta'\\ \Longrightarrow&R_f(\Delta')\subset R_f(\Delta)\end{aligned}$$

命題 1.11　$\mathscr{B}_f=\{R_f(\Delta)\subset\mathbb{R};\Delta\in\mathscr{P}(I)\}$ は $\mathbb{R}$ の濾過基底を成す。

(証明)　$\mathscr{B}_f$ が (B1)-(B3) を満たす事を示そう。Δ に伴う代表点の列を一つ選んで ξ とすると $R_f(\Delta)\in\{R(f;\Delta,\xi)\}$ となるので $R_f(\Delta)\neq\emptyset$ であり (B1)(B2) が従う。$R_f(\Delta),R_f(\Delta')\in\mathscr{B}_f$ とすると $R_f(\Delta\cup\Delta')\subset R_f(\Delta)\cap R_f(\Delta')$ となるので (B3) が従う。

命題 1.12　$f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ に対し次は同値である。

(1) $f\in\mathscr{R}(I;\mathbb{R})$

(2) $\mathscr{B}_f$ は収束する

このとき　$\mathscr{B}_f\longrightarrow\int_I f$

(証明)　$\mathscr{B}_f$ は収束する

$$\begin{aligned}&\Longleftrightarrow\exists a\in\mathbb{R}:\forall a\text{ の近傍 }V\ \exists\Delta\in\mathscr{P}(I):R_f(\Delta)\subset V\\ &\Longleftrightarrow\exists a\in\mathbb{R}:\forall\varepsilon>0\ \exists\Delta\in\mathscr{P}(I):R_f(\Delta)\subset(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\\ &\Longleftrightarrow\exists a\in\mathbb{R}:\forall\varepsilon>0\ \exists\Delta\in\mathscr{P}(I):\Delta\subset\Delta',\Delta'\text{ に伴う任意の代表点の列 }\xi'\text{ に対し}\\ &\qquad\qquad |R(f;\Delta',\xi')-a|<\varepsilon\\ &\Longleftrightarrow f\in\mathscr{R}(I;\mathbb{R})\end{aligned}$$

２．区間上のリーマン積分

この章では（必ずしも有界閉区間とは限らない）一般の区間上で定義された（必ずしも有界とは限らない）函数のリーマン積分を考える。

２．１　定義と基本的性質

定義　区間 I 上の実数値函数 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ は次の条件

$(R)_{\mathrm{loc}}$　I に含まれる任意の有界閉区間 K に対し $f|K \in \mathscr{R}(K;\mathbb{R})$

を満たすとき I 上**局所リーマン可積分**であると謂い $f \in \mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(I;\mathbb{R})$ と表す。

註.　命題　より $(R)_{\mathrm{loc}}$ は次の条件と同値である：

$(R)'_{\mathrm{loc}}$　I に含まれる任意の有界閉区間 K に対し $f^{\pm}|K \in \mathscr{R}(K;\mathbb{R})$

また I が有界閉区間ならば $\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(I;\mathbb{R}) = \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ である。

定義　区間 I 上の局所リーマン可積分函数 $f \in \mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(I;\mathbb{R})$ は

$$\int_I f^{\pm} \underset{\mathrm{def.}}{=} \sup\{\int_K f^{\pm}; K \subset I \text{ は有界閉区間} \}$$

の双方が有限であるとき I 上**リーマン可積分**であると謂い

$$\int_I f \underset{\mathrm{def.}}{=} \int_I f^{+} - \int_I f^{-}$$

で定まる実数を f の I 上の積分値と定義する。このとき

$$\mathscr{R}(I;\mathbb{R}) = \{f \in \mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(I;\mathbb{R}); \int_I f^{\pm} \in [0,\infty)\}$$

は実ベクトル空間を成し I 上の積分から導かれる写像

$$\int_I : \mathscr{R}(I;\mathbb{R}) \ni f \longmapsto \int_I f \in \mathbb{R}$$

は正値（非負値）線型汎函数となる。

命題 2.1　$f \in \mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(I;\mathbb{R})$ に対し次は同値である。

(1) $f \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$

(2) $f^{\pm} \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$

(3) $|f| \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$

このとき次の評価が成立つ：

$$\Big|\int_I f\Big| \leq \int_I |f|$$

（証明）　$f \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$

$\iff \int_I f^{\pm} \in [0,\infty)$

$\iff f^{\pm} \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$

$\iff |f| = f^+ + f^- \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$

より (1)-(3) は同値であり最後の評価は次より従う：

$$\begin{aligned}
\pm\int_I f &= \pm\int_I (f^+ - f^-) \\
&\leq \int_I f^+ + \int_I f^- \\
&= \sup\{\int_K f^+; \text{有界閉区間 } K \subset I\} + \sup\{\int_K f^-; \text{有界閉区間 } K \subset I\} \\
&= \sup\{\int_K f^+ + \int_K f^-; \text{有界閉区間 } K \subset I\} \\
&= \sup\{\int_K |f|; \text{有界閉区間 } K \subset I\} = \int_I |f|
\end{aligned}$$

定義　一般区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対し有界閉区間の列 $(K_j; j \geq 1)$ が I の**取り尽くし列** (exhaustion) とは次の条件

(i) $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_j \subset K_{j+1} \cdots \subset I$

(ii) $K_1 \subset I$ なる任意の有界閉集合 K に対し $K \subset K_j$ なる $j \geq 1$ が存在する

が成立つ事を謂う。このとき特に

$$I = \bigcup_{j\geq 1} K_j$$

が成立つ。

例　（以下 $-\infty < a < b < \infty$ として考える。）$I = \mathbb{R}$ に対して $K_j = [-j,j]$, $I = (a,\infty)$ に対して $K_j = [a+1/j, j]$, $I = (a,b]$ に対して $K_j = [a+1/j, b]$, $I = (a,b)$ に対して $K_j = [a+1/j, b-1/j]$, $I = [a,b)$ に対して $K_j = [a, b-1/j]$, $I = (-\infty, a)$ に対して $K_j = [-j, a-1/j]$ と取れば良い。

命題 2.2　$f \in \mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(I;\mathbb{R})$ に対し次は同値である。

(1) $f \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$

(2) I の任意の取り尽くし列 $(K_j;\ j \geq 1)$ に対し極限 $\displaystyle\lim_{j\to\infty}\int_{K_j}|f|$ が存在する。

(3) I の或る取り尽くし列 $(K_j;\ j \geq 1)$ に対し極限 $\displaystyle\lim_{j\to\infty}\int_{K_j}|f|$ が存在する。

このとき (2) と (3) の極限値は一致し、更に任意の取り尽くし列 $(K_j;\ j \geq 1)$ に対し等式

$$\int_I f = \lim_{j\to\infty}\int_{K_j} f$$

が成立つ。

（証明）　(1) $\Rightarrow$ (2) ：$K_j \subset K_{j+1}$ より次の不等式

$$\int_{K_j}|f| \leq \int_{K_{j+1}}|f| \leq \sup\{\int_K |f|; \text{有界閉区間 } K \subset I\} = \int_I |f|$$

が従い、実数列 $(\int_{K_j}|f|; j \geq 1)$ は上に有界な単調増加列となる。故に (2) が従い、不等式

$$\lim_{j\to\infty}\int_{K_j}|f| \leq \int_I |f|$$

を得る。

(3) $\Rightarrow$ (1) ：任意の有界閉区間 $K \subset I$ に対し $j \geq 1$ が存在し $K \subset K_j$ となるから

$$\int_K |f| \leq \int_{K_j}|f|$$

仮定 (3) により単調増加列 $(\int_{K_j}|f|; j \geq 1)$ は極限を持ち、その極限値は上限に一致するので上の不等式より

$$\int_K |f| \leq \lim_{j\to\infty}\int_{K_j}|f|$$

を得る。有界閉区間 $K \subset I$ は任意であったので K に就いて上限を取り

$$\int_I |f| \leq \lim_{j\to\infty}\int_{K_j}|f| \tag{2}$$

を得る。

　さて (1) から (3) の全てが成立つとすると二つの不等式 (1)(2) は共に成立する事となる。故に等号の場合のみ実現する：

$$\int_I |f| = \lim_{j\to\infty}\int_{K_j}|f|$$

以上の議論は特に非負値函数に対しても成立つ。故に f を $f^{\pm}$ としても同様であり

$$\begin{aligned}\int_I f &= \int_I f^+ - \int_I f^- \\ &= \lim_{j\to\infty}\int_{K_j} f^+ - \lim_{j\to\infty}\int_{K_j} f^- \\ &= \lim_{j\to\infty}\left(\int_{K_j} f^+ - \int_{K_j} f^-\right) \\ &= \lim_{j\to\infty}\int_{K_j}(f^+ - f^-) = \lim_{j\to\infty}\int_{K_j} f\end{aligned}$$

が従う。

２．２　区間上のリーマン積分に対する収束定理

１．３で与えた各種収束定理を一般の区間上のリーマン積分に拡張しよう。

定理 2.1　（リーマン積分に対するファトゥの補題）

$I \subset \mathbb{R}$ を（有界閉区間とは限らない）区間とする。

(1) $f, g, f_n \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ は次の条件を満たすとする：

  (a) (f_n) は下から g で評価され I 上の積分値から成る実数列の下極限は有限である。即ち

$$f_n \geq g, \quad \liminf_{n\to\infty}\int_I f_n < \infty$$

  (b) f は (f_n) の下極限に I 上各点収束する。

このとき

$$\int_I f = \int_I \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty}\int_I f_n$$

(2) $f, g, f_n \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ は次の条件を満たすとする：

  (a) (f_n) は上から g で評価され I 上の積分値から成る実数列の上極限は有限である。即ち

$$f_n \leq g, \quad \limsup_{n\to\infty}\int_I f_n > -\infty$$

  (b) f は (f_n) の上極限に I 上各点収束する。

このとき

$$\limsup_{n\to\infty}\int_I f_n \leq \int_I \limsup_{n\to\infty} f_n = \int_I f$$

（証明）　(1) $K \subset I$ なる任意の有界閉区間を取る。$f_n - g \geq 0$ 故

$$\int_K (f_n - g) \leq \int_I (f_n - g) = \int_I f_n - \int_I g$$

となり有界閉区間上のファトゥの補題（定理 1.8）より

$$\int_K (f-g) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_K (f_n - g)$$

が従うので

$$\int_K (f-g) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_I f_n - \int_I g$$

を得る。K に就いて上限を取る事に依り

$$\begin{aligned}
\int_I f &= \int_I (f-g) + \int_I g \\
&= \sup\{\int_K (f-g); K \subset I \text{ は有界閉区間} + \int_I g \\
&\leq \left(\liminf_{n\to\infty} \int_I f_n - \int_I g\right) + \int_I g = \liminf_{n\to\infty} \int_I f_n
\end{aligned}$$

が従う。

(2) $K \subset I$ なる任意の有界閉区間を取る。$g - f_n \geq 0$ 故

$$\int_K (g - f_n) \leq \int_I (g - f_n) = \int_I g - \int_I f_n$$

となり有界閉区間上のファトゥの補題（定理 1.8）より

$$\begin{aligned}
\int_K (g-f) &= \int_K (g - \limsup_{n\to\infty} f_n) = \int_K (g + \liminf_{n\to\infty}(-f_n)) \\
&= \int_K \liminf_{n\to\infty} (g - f_n) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_K (g - f_n)
\end{aligned}$$

が従うので

$$\begin{aligned}
\int_K (g-f) &\leq \liminf_{n\to\infty} (\int_I g - \int_I f_n) \\
&= \int_I g + \liminf_{n\to\infty} (- \int_I f_n) = \int_I g - \limsup_{n\to\infty} \int_I f_n
\end{aligned}$$

を得る。K に就いて上限を取る事に依り

$$\begin{aligned}
-\int_I f &= \int_I (g-f) - \int_I g \\
&= \sup\left\{\int_K (g-f); K \subset I \text{ は有界閉区間}\right\} - \int_I g \\
&\leq \left(\int_I g - \limsup_{n\to\infty} \int_I f_n\right) - \int_I g = -\limsup_{n\to\infty} \int_I f_n
\end{aligned}$$

が従う。

定理 2.2 （リーマン積分に対するルベーグの支配収束定理）

$I \subset \mathbb{R}$ を（有界閉区間とは限らない）区間とし I 上の局所リーマン可積分函数の列 $(f_n) \subset \mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(I; \mathbb{R})$ 及び $f, g \in \mathscr{R}(I; \mathbb{R})$ は次の条件を満たすとする：

(a) (f_n) は f に I 上各点収束する。

(b) $g \ge 0$ であり任意の n に対し $|f_n| \le g$ が成立つ。

このとき $f_n \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ であり

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n = \int_I f$$

（証明） $\pm f_n \le g$ より $f_n^{\pm} = \frac{1}{2}(|f_n| \pm f_n) \le g$ が従うので $f_n^{\pm}$ は I 上可積分となり $f_n \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ が従う。また

$$-\int_I g \le \int_I f_n \le \int_I g$$

より $(\int_I f_n; n \ge 1)$ は上にも下にも有界となる。ファトゥの補題（定理 2.1）と (a) を用いると

$$\limsup_{n\to\infty}\int_I f_n \le \int_I f \le \liminf_{n\to\infty}\int_I f_n$$

が得られるので結論が従う。

定理 2.3　（リーマン積分に対する単調収束定理）

$I \subset \mathbb{R}$ を（有界閉区間とは限らない）区間とし $f, f_n \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ は次の条件を満たすとする：

(a) (f_n) は単調増加列である。

(b) (f_n) は f に I 上各点収束する。

このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_I |f_n - f| = 0$$

特に

$$\sup_{n\ge1}\int_I |f_n| < \infty, \quad \lim_{n\to\infty}\int_I f_n = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n = \int_I f$$

（証明）$f_n - f \le 0$ 及び $-(f_n - f) = f - f_n \le f - f_1$ より

$$|f_n - f| \le (f - f_1)^+ \le |f| + |f_1|$$

となるのでルベーグの支配収束定理を用いれば良い。後半は $|f_n| \le |f| \vee |f_1|$ より従う。

定理 2.4　（リーマン積分に対するリープの補題）

$I \subset \mathbb{R}$ を（有界閉区間とは限らない）区間とし $f, f_n \in \mathscr{R}(I;\mathbb{R})$ は次の条件を満たすとする：

(a)　(f_n) は f に I 上各点収束する。

このとき

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_I |f_n| - \int_I |f| - \int_I |f_n - f|\right| = \lim_{n\to\infty}\int_I \Big||f_n| - |f| - |f_n - f|\Big| = 0$$

特に次は同値である：

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_I |f_n| = \int_I \lim_{n\to\infty}|f_n| = \int_I |\lim_{n\to\infty} f_n| = \int_I |f|$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_I |f_n - f| = 0$

（証明）次の評価

$$\begin{aligned}&\left|\int_I |f_n| - \int_I |f| - \int_I |f_n - f|\right| = \left|\int_I (|f_n| - |f| - |f_n - f|)\right| \\ &\le \int_I \big||f_n| - |f| - |f_n - f|\big|\end{aligned}$$

の最後の被積分函数は条件 (a) より I の各点で 0 に収束し

$$\begin{aligned}\big||f_n| - |f| - |f_n - f|\big| &= \big|(|f_n| - |f_n - f|) - |f|\big| \\ &\le \big||f_n| - |f_n - f|\big| + |f| \\ &\le |f_n - (f_n - f)| + |f| = 2|f|\end{aligned}$$

と評価されるのでルベーグの支配収束定理を用いれば定理が従う。

３． 一般化について

複素数値函数 $f : I \to \mathbb{C}$ に対しては

$$\begin{aligned}f &= \mathrm{Re}f + i\mathrm{Im}f \\ &= ((\mathrm{Re}f)^+ - (\mathrm{Re}f)^-) + i((\mathrm{Im}f)^+ - (\mathrm{Im}f)^-)\end{aligned}$$

と分解する事に依って一変数のリーマン積分が定義される。n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の直方体 $(-\infty < a_j < b_j < \infty)$

$$\prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j] = \{x \in \mathbb{R}^n; x_j \in [a_j, b_j]\ \forall j\}$$

に於けるリーマン積分は第 1 章と同様に定義される。$\mathbb{R}^n$ 全体や一般区間の直積集合上のリーマン積分は第 2 章と同様に定義される。$\mathbb{R}^n$ の一般の集合上のリーマン積分に就いては境界の取扱いに特別な議論が必要となる。(Duistermaat and Kolk, “*Multidimensional Real Analysis II*” や杉浦『解析入門 I, II』等を参照されたい。)

参考文献：

H.S. Bear, “*A primer of Lebesgue Integration*”, Academic Press.

J.J. Duistermaat and J.A.C. Kolk, “*Multidimensional Real Analysis II* ”,
Cambridge University Press.

E.H. Lieb, *Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities*,
Ann. of Math., **118** (1983), 349-374

W.A.J. Luxemburg, *Arzelà’s dominated convergence theorem for the Riemann integral*,
Amer. Math, Monthly **78** (1971), 970-979

梶原壌二, 『解析学序説』, 森北出版

杉浦光夫, 『解析入門 I, II』, 東京大学出版会

藤原松三郎, 『數學解析 第一編, 微分積分學 第一巻』, 内田老鶴圃

小澤 徹, 直方体上のリーマン積分,
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html