

実数の順序

平成 19 年 11 月

小澤 徹

<http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html>

二つの実数 a, b について三つの関係

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

のどれか一つだけが必ず成立する。関係 $a \leq b$ とは

$$a < b \quad \text{または} \quad a = b$$

と同値である。

命題 二つの実数 a, b について次は同値である。

- (1) $a \leq b$
- (2) $\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon$
- (3) $\forall \varepsilon > 0, a \leq b + \varepsilon$
- (4) $a > b$ は成り立たない

(証明) (1) \Rightarrow (2) : $a \leq b$ ならば任意の $\varepsilon > 0$ に対し $a \leq b < b + \varepsilon$

(2) \Rightarrow (3) : $a < b + \varepsilon$ は $a \leq b + \varepsilon$ の特別な場合である。

(3) \Rightarrow (4) : $a > b$ と仮定する。 $\varepsilon = (a - b)/2$ と置くと $\varepsilon > 0$ であり $b + \varepsilon = (a + b)/2$ となるが $a > b$ より $b + \varepsilon > a$ 。これは (3) に矛盾するので $a > b$ は成り立たない。

(4) \Leftrightarrow (1) : 「 $a > b$ の否定」は $a \leq b$ である。

系 二つの実数 a, b に対し次は同値である。

- (1) $a = b$
- (2) $\forall \varepsilon > 0, |a - b| < \varepsilon$
- (3) $\forall \varepsilon > 0, |a - b| \leq \varepsilon$
- (4) $a > b$ も $a < b$ も成り立たない
- (5) $a \leq b$ も $a \geq b$ も成り立つ