直交多項式

平成 21 年 4 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

1. 実係数多項式の成すベクトル空間

非負整数 n に対し $\mathscr{P}_n$ を高々n 次の実係数多項式全体の集合とする：

$$\mathscr{P}_n = \{P \in \mathbb{R}[x];\ \deg P \leq n\}$$

$P, Q \in \mathscr{P}_n$ を $P(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j x^j,\ Q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ と表したとき
P と Q の和 $P+Q$ 及び $c \in \mathbb{R}$ によるスカラー倍 cP を

$$(P+Q)(x) = \sum_{j=0}^{n} (a_j + b_j) x^j$$

$$(cP)(x) = \sum_{j=0}^{n} (c a_j) x^j$$

と定義する事により $\mathscr{P}_n$ は実ベクトル空間となる。

命題 1.　$\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{P}_n = n+1$

(証明)　$(n+1)$ 個の単項式 $\{1, x, \cdots, x^n\}$ は $\mathscr{P}_n$ の生成系となるのでその一次独立性を示せば充分である。$(n+1)$ 個のスカラー $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ に対する一次関係式 $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j x^j = 0$ を仮定する。相異なる $(n+1)$ 個の実数 $x_0, \cdots, x_n$ を x に代入して $0 \leq k \leq n$ なる任意の k に対し

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x_k^j = 0$$

を得る。これを $a_0, \cdots, a_n$ に関する連立一次方程式と見做せば

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

と行列表示される。左辺に現れる $(n+1)$ 次正方行列を A とする。A の行列式はバンデルモンドの行列式であり

$$\det A = (-1)^{n(n+1)/2} \prod_{0\le j<k\le n} (x_j - x_k)$$

故 0 でない。よって A の逆行列 A^{-1} が存在し $a_0 = \cdots = a_n = 0$ が従う。

2. 区間上の直交多項式

$I \subset \mathbb{R}$ を区間、μ を I 上の有限ルベーグ・スティルチェス測度、$L^2(I;\mu)$ を μ に関して I 上自乗可積分な実数値函数全体から構成される実ヒルベルト空間とする。ここに $L^2(I;\mu)$ の内積及びノルムは

$$\begin{aligned}(f,g) &= \int_I fg d\mu = \int_I f(x)g(x)d\mu(x)\\ \|f\| &= \sqrt{(f,f)}\end{aligned}$$

で定めるものとする。以下では

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}} \mathscr{P}_n|I \subset L^2(I;\mu)$$

を仮定する。即ち任意の $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対し

$$\int_I x^{2n} d\mu(x) < \infty$$

である事を仮定する。これはシュワルツの不等式により任意の $k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対し

$$\int_I |x|^k d\mu(x) < \infty$$

である事と同値である。(ヘルダーの不等式を用いる事により $k \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ としても同値。)

定理 1.(正規直交多項式系の存在) 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対し次の性質 (D)(G)(ON) を満たす多項式系 $\{\phi_j; 0 \le j \le n\} \subset L^2(I;\mu)$ が存在する：

(D) 各 ϕ_j は j 次の多項式である。即ち $0 \le j \le n$ なる任意の j に対し

$$\deg \phi_j = j$$

(G) $\{\phi_k; 0 \le k \le j\}$ は $\mathscr{P}_j$ を生成する。即ち $0 \le j \le n$ なる任意の j に対し

$$\mathrm{L.h.}\{\phi_k; 0 \le k \le j\} = \mathscr{P}_j$$

(ON) $\{\phi_j; 0 \le j \le n\}$ は正規直交系を成す。即ち $0 \le j,\ k \le n$ なる任意の j,k に対し

$$(\phi_j, \phi_k) = \delta_{jk}$$

(証明) $\mathscr{P}_n$ の基底 $\{1, x, \cdots, x^n\}$ に対しグラム・シュミットの直交化法を用いれば良い。

正規直交多項式系の性質 (D)(G)(ON) に就いて同値な条件を纏めて置こう。その為に次の条件を考える。

(D)$'$ $0 \le j \le n$ なる任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対し $\phi_j \in \mathscr{P}_j$

(O) $1 \le j \le n$ なる任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対し $\phi_j \perp \mathscr{P}_{j-1}$

(N) $0 \le j \le n$ なる任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対し $\|\phi_j\| = 1$

定理 2.(正規直交多項式系の特徴付け) $(n+1)$ 個の多項式から成る系 $\{\phi_j; 0 \le j \le n\} \subset L^2(I;\mu)$ に対し次は同値である。

(1) $\{\phi_j; 0 \le j \le n\}$ は (D)(ON) を満たす。

(2) $\{\phi_j; 0 \le j \le n\}$ は (G)(ON) を満たす。

(3) $\{\phi_j; 0 \le j \le n\}$ は (D)(G)(ON) を満たす。

(4) $\{\phi_j; 0 \le j \le n\}$ は (D)(O)(ON) を満たす。

(5) $\{\phi_j; 0 \le j \le n\}$ は (D)(O)(N) を満たす。

(6) $\{\phi_j; 0 \le j \le n\}$ は (D)$'$(O)(N) を満たす。

(証明)

(1) ⇒ (2) : (D)(ON) $\Rightarrow$ (G) を示せば良い。(D) より $0 \le k \le j$ なる任意の k に対し $\phi_k \in \mathscr{P}_k \subset \mathscr{P}_j$ となるから $\mathrm{L.h.}\{\phi_k; 0 \le k \le j\} \subset \mathscr{P}_j$ が成立つ。(ON) より $\{\phi_k; 0 \le k \le j\}$ は一次独立であるから $\dim \mathrm{L.h.}\{\phi_k; 0 \le k \le j\} = j+1$ であり $\dim \mathscr{P}_j$ と一致する。これより (G) が従う。

(2) ⇒ (1) : (G)(ON)$\Rightarrow$ (D) を示せば良い。$\mathrm{L.h.}\{\phi_0\} = \mathscr{P}_0$ より ϕ_0 は定数となり $\deg \phi_0 = 0$ が従う。$j \ge 1$ とし $0 \le k \le j-1$ なる任意の k に対し $\deg \phi_k = k$ を仮定する。このとき (ON) より $0 \le k \le j-1$ なる任意の k に対し $(\phi_j, \phi_k) = 0$ であり (G) より $\phi_j \in \mathscr{P}_j$ かつ $\mathrm{L.h.}\{\phi_k; 0 \le k \le j-1\} = \mathscr{P}_{j-1}$ である。従って ϕ_j は $(j-1)$ 次以下の任意の多項式と直交する高々j 次の多項式である。$\deg \phi_j \le j-1$ とすると ϕ_j は自分自身と直交するので零となる。これより $\mathrm{L.h.}\{\phi_k; 0 \le k \le j\} = \mathrm{L.h.}\{\phi_k; 0 \le k \le j-1\}$ となって (G) に反する。従って $\deg \phi_j = j$ を得る。これで j に関する帰納法が完結する。

(2) ⇒ (3) : (G)(ON) $\Rightarrow$ (D) を示せば良い。(G) より $\phi_j \in \mathscr{P}_j$ であるから $\deg \phi_j \le j$ であり $0 \le k \le j-1$ なる任意の k に対して $\deg \phi_k \le k$ となる。ここで $\deg \phi_j \le j-1$ ならば $\{\phi_k; 0 \le k \le j\}$ に属す多項式は高々$(j-1)$ 次であるから

$$\mathrm{L.h.}\{\phi_k; 0 \le k \le j\} \subset \mathscr{P}_{j-1}$$

となる一方 (G) より

$$\mathscr{P}_j = \mathrm{L.h.}\{\phi_k; 0 \le k \le j\}$$

となる。これより $\mathscr{P}_j \subset \mathscr{P}_{j-1}$ となって矛盾。よって $\deg \phi_j = j$ が従う。

(3) ⇒ (4)：　(G)(ON) ⇒ (O) を示せば良い。(G) により任意の $\phi \in \mathscr{P}_{j-1}$ に対し $\{a_k; 0 \le k \le j-1\} \subset \mathbb{R}$ が存在して

$$\phi = \sum_{k=0}^{j-1} a_k \phi_k$$

と表される。(ON) により

$$(\phi, \phi_j) = \sum_{k=0}^{j-1} a_j (\phi_k, \phi_j) = 0$$

となる。これは (O) を意味する。

(4) ⇒ (5)：　(ON) は (N) の特別な場合である。

(5) ⇒ (6)：　(D) は (D)′ の特別な場合である。

(6) ⇒ (2)：　帰納法により証明する。(N) より $\phi_0 \neq 0$ であり (D)′ より $\phi_0 \in \mathscr{P}_0$ である。$\dim \mathscr{P}_0 = 1$ より $\mathrm{L.h.}\{\phi_0\} = \mathscr{P}_0$ が従う。$j \ge 2$ とし

$$\mathrm{L.h.}\{\phi_k; 0 \le k \le j-1\} = \mathscr{P}_{j-1}$$

を仮定する。(N) より $\phi_j \neq 0$ であり (D)′ より $\phi_j \in \mathscr{P}_j$ である。(O) より ϕ_j は $\mathscr{P}_{j-1}$ の任意の元と直交する。よって

$$\dim(\{\lambda\phi_j; \lambda \in \mathbb{R}\} \oplus \mathscr{P}_{j-1}) = 1 + j$$

一方 $\phi_j \in \mathscr{P}_j$ 及び $\mathscr{P}_{j-1} \subset \mathscr{P}_j$ より $\{\lambda\phi_j; \lambda \in \mathbb{R}\} \oplus \mathscr{P}_{j-1} \subset \mathscr{P}_j$ であり $\dim \mathscr{P}_j = j+1$ であるから

$$\{\lambda\phi_j; \lambda \in \mathbb{R}\} \oplus \mathscr{P}_{j-1} = \mathscr{P}_j$$

が従う。帰納法の仮定により

$$\begin{aligned}\{\lambda\phi_j; \lambda \in \mathbb{R}\} \oplus \mathscr{P}_{j-1} &= \{\lambda\phi_j; \lambda \in \mathbb{R}\} \oplus \mathrm{L.h.}\{\phi_k; 0 \le k \le j-1\} \\ &= \mathrm{L.h.}\{\phi_k; 0 \le k \le j\}\end{aligned}$$

となるから

$$\mathrm{L.h.}\{\phi_k; 0 \le k \le j\} = \mathscr{P}_j$$

が従う。これより (G) を得る。

(N) 及び (O) を仮定すると $0 \le j < k \le n$ なる任意の $j, k \in \mathbb{Z}$ に対し

$$(\phi_j, \phi_k) = 0$$

となるから (N) を合わせて (ON) を得る。

定理 3.(正規直交多項式系の一意性)

(D)(G)(ON) または同値な性質を満たす多項式系 $\{\phi_j; 0 \leq j \leq n\}$ は次の条件の下で一意的に定まる。

(S)　各 ϕ_j の最高次 (j 次) の係数の符号は全て同一である。

(証明)　グラム・シュミットの直交化法の一意性の議論から従う。

定理 4.(正規直交多項式系の直接表示)　任意の $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し (D)(G)(ON) を満たす多項式系 $\{\phi_n; 0 \leq n \leq m\} \subset L^2(I;\mu)$ は次で与えられる：

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{|G_n||G_{n-1}|}} G_n(x),$$

ここに

$$G_n(x) = \det \begin{bmatrix} (f_0, f_0) & (f_0, f_1) & \cdots & (f_0, f_n) \\ (f_1, f_0) & (f_1, f_1) & \cdots & (f_1, f_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (f_{n-1}, f_0) & (f_{n-1}, f_1) & \cdots & (f_{n-1}, f_n) \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} (f_0, f_0) & (f_0, f_1) & \cdots & (f_0, f_{n-1}) & 1 \\ (f_1, f_0) & (f_1, f_1) & \cdots & (f_1, f_{n-1}) & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (f_n, f_0) & (f_n, f_1) & \cdots & (f_n, f_{n-1}) & x^n \end{bmatrix}$$

$$|G_n| = \det \begin{bmatrix} (f_0, f_0) & (f_0, f_1) & \cdots & (f_0, f_n) \\ (f_1, f_0) & (f_1, f_1) & \cdots & (f_1, f_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (f_n, f_0) & (f_n, f_1) & \cdots & (f_n, f_n) \end{bmatrix}$$

$$|G_{-1}| = 1,\ f_0(x) = 1,\ f_n(x) = x^n$$

である。任意の n に対し $|G_n| > 0$ であり ϕ_n の最高次 (n 次) の係数は $\sqrt{|G_{n-1}|/|G_n|}$ で与えられる。上の $\{\phi_n; 0 \leq n \leq m\}$ は (D)(G)(ON) を満たす多項式系のうち各々の最高次の係数が正である唯一つのものである。

(証明)　グラム・シュミットの直交化法の直接表示の議論から従う。

定理 5.(漸化式による正規直交多項式系の特徴付け)　$\{\phi_n; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ を (D) 及び (N) を満たす多項式とする。各 n に対し ϕ_n の x^n 及び x^{n-1} の係数を夫々 $a_n (\neq 0)$ 及び b_n と表す。但し $b_0 = 0$ とする。このとき次は同値である。

(1) $\{\phi_n; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ は (G) 及び (O) を満たす。

(2) $\{\phi_n; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ は次の漸化式を満たす：

$$
\text{(R)} \begin{cases} \phi_0(x) = a_0 = 1/\sqrt{\mu(I)}, \\ \phi_1(x) = a_1 x + b_1 = \dfrac{a_1}{a_0}(x - (x\phi_0, \phi_0))\phi_0(x), \\ \phi_{n+1}(x) = (A_n x - B_n)\phi_n(x) - C_n \phi_{n-1}(x) \\ \qquad\qquad = A_n(x - (x\phi_n, \phi_n))\phi_n(x) - \dfrac{A_n}{A_{n-1}}\phi_{n-1}(x),\ n \geq 1 \end{cases}
$$

ここに $A_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n},\ B_n = A_n(x\phi_n, \phi_n),\ C_n = \dfrac{A_n}{A_{n-1}} = \dfrac{a_{n+1}a_{n-1}}{a_n^2}$ とする。また等式 $B_n = A_n\left(\dfrac{b_n}{a_n} - \dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)$ が成立つ。

(証明)　(1) ⇒ (2)：　ϕ_0 は定数 a_0 で $\|\phi_0\| = 1$ を満たす事から $\phi_0(x) = a_0 = 1/\sqrt{\mu(I)}$ が従う。$\phi_1(x) = a_1 x + b_1$ は $(\phi_1, \phi_0) = 0$ を満たすので等式

$$
0 = (\phi_1, \phi_0) = (a_1 x + b_1, a_0) = a_1 a_0 (x, 1) + b_1 a_0 \mu(I)
$$

が成立つ。これより

$$
\begin{aligned} b_1 &= -\frac{a_1}{\mu(I)}(x, 1) = -a_1 a_0^2 (x, 1) = -a_1 (x\phi_0, \phi_0), \\ \phi_1(x) &= a_1 x + b_1 = a_1(x - (x\phi_0, \phi_0)) = \frac{a_1}{a_0}(x - (x\phi_0, \phi_0))\phi_0(x) \end{aligned}
$$

を得る。

さて $x\phi_n$ は $n+1$ 次多項式であるから (G) を用いて

$$
x\phi_n \in \mathscr{P}_{n+1} = \mathrm{L.h.}\{\phi_j : 0 \leq j \leq n+1\}
$$

となる。従って $\{\lambda_j; 0 \leq j \leq n+1\} \subset \mathbb{R}$ が存在して

$$
x\phi_n = \sum_{j=0}^{n+1} \lambda_j \phi_j
$$

と表される。$0 \leq k \leq n-2$ なる任意の k に対し $x\phi_k \in \mathscr{P}_{n-1}$ であるから (O) を用いると

$$
(x\phi_n, \phi_k) = (\phi_n, x\phi_k) = 0
$$

となり (O) 及び (N) を用いると

$$
(x\phi_n, \phi_k) = \sum_{j=0}^{n+1} \lambda_j (\phi_j, \phi_k) = \lambda_k
$$

となる。更に $a_n x^n = \phi_n + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda'_j \phi_j$ と表せるので

$$\begin{aligned}
\lambda_{n-1} &= \sum_{j=0}^{n+1} \lambda_j (\phi_j, \phi_{n-1}) \\
&= (x\phi_n, \phi_{n-1}) = (\phi_n, x\phi_{n-1}) \\
&= (\phi_n, a_{n-1}x^n) = \frac{a_{n-1}}{a_n}(\phi_n, a_n x^n) = \frac{a_{n-1}}{a_n}, \\
\lambda_n &= \sum_{j=0}^{n+1} \lambda_j (\phi_j, \phi_n) = (x\phi_n, \phi_n)
\end{aligned}$$

を得る。以上より

$$x\phi_n = \lambda_{n+1}\phi_{n+1} + (x\phi_n, \phi_n)\phi_n + \frac{a_{n-1}}{a_n}\phi_{n-1}$$

が成立つ。両辺の x^{n+1} の係数を比較すると $a_n = \lambda_{n+1}a_{n+1}$ が従う。これより

$$x\phi_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}\phi_{n+1} + (x\phi_n, \phi_n)\phi_n + \frac{a_{n-1}}{a_n}\phi_{n-1}$$

を得る。また $x\phi_n$ の x^{n+1} 及び x^n の係数は夫々a_n 及び b_n であり $\frac{a_n}{a_{n+1}}\phi_{n+1}$ 及び ϕ_n の x^n の係数は夫々 $\frac{a_n b_{n+1}}{a_{n+1}}$ 及び a_n であるから

$$x\phi_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}\phi_{n+1} + \left(b_n - \frac{a_n b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)\frac{1}{a_n}\phi_n + \sum_{j=0}^{n-1}\lambda_j\phi_j$$

が成立つ。これより

$$(x\phi_n, \phi_n) = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$$

を得る。

(2) ⇒ (1)： 次の命題を n に関する帰納法で示せば充分である：

- $0 \le j \le n-1$ なる任意の j に対し $(\phi_n, \phi_j) = 0$
- $0 \le j \le n$ なる任意の j に対し $\mathrm{L.h.}\{\phi_k; 0 \le k \le j\} = \mathscr{P}_j$

$n = 1$ の場合は ϕ_0, ϕ_1 の定義により $\mathrm{L.h.}\{\phi_0\} = \mathscr{P}_0$, $\mathrm{L.h.}\{\phi_0, \phi_1\} = \mathscr{P}_1$,

$$(\phi_1, \phi_0) = \frac{a_1}{a_0}(x - (x\phi_0, \phi_0)\phi_0, \phi_0) = \frac{a_1}{a_0}((x\phi_0, \phi_0) - (x\phi_0, \phi_0)\|\phi_0\|^2) = 0$$

となるので成立つ。$n \ge 1$ とし n の場合を仮定し $n+1$ の場合を示そう。$0 \le j \le n$ なる任意の j に対し (R) を用いて

$$(\phi_{n+1}, \phi_j) = A_n(x\phi_n, \phi_j) - B_n(\phi_n, \phi_j) - C_n(\phi_{n-1}, \phi_j)$$

を得る。右辺が全て 0 である事を示そう。帰納法の仮定により $j \le n-2$ なら $x\phi_j \in \mathscr{P}_{n-1} = \mathrm{L.h.}\{\phi_k; 0 \le k \le n-1\}$ となり右辺は 0 となる。$j = n-1$ なら $x\phi_{n-1}$ は $\{\phi_k; 0 \le k \le n\}$ の一次結合で表されるが x^n の係数を比較する事により

$$x\phi_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n}\phi_n + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \phi_j$$

と表される。よって

$$\begin{aligned}
&A_n(x\phi_n, \phi_{n-1}) - C_n(\phi_{n-1}, \phi_{n-1}) \\
&= A_n(\phi_n, x\phi_{n-1}) - C_n \\
&= A_n \frac{a_{n-1}}{a_n}(\phi_n, \phi_n) - C_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} - C_n = 0
\end{aligned}$$

となる。$j = n$ なら

$$\begin{aligned}
&A_n(x\phi_n, \phi_n) - B_n(\phi_n, \phi_n) \\
&= A_n(x\phi_n, \phi_n) - B_n = 0
\end{aligned}$$

となる。以上より $0 \le j \le n$ なる任意の j に対し $(\phi_{n+1}, \phi_j) = 0$ なる事が示された。$\phi_{n+1} \in \mathscr{P}_{n+1}$ であり $\mathrm{L.h.}\{\phi_k; 0 \le k \le n\} = \mathscr{P}_n$ である事から $\mathrm{L.h.}\{\phi_k; 0 \le k \le n+1\} = \mathscr{P}_{n+1}$ が従う。これで帰納法は完結した。

3. 直交多項式に関するフーリエ展開

この節では区間 I 上の直交多項式に関するフーリエ展開の収束に就いて考える。仮定及び記号は前節と同じものとする。

定義 (直交多項式に関するフーリエ係数) 正規直交系 $\{\phi_n; n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}\} \subset L^2(I;\mu)$ 及び $f \in L^2(I;\mu)$ に対し

$$\hat{f}(n) = (f, \phi_n) = \int_I f\phi_n d\mu = \int_I f(x)\phi_n(x)d\mu(x)$$

を $\{\phi_n\}$ に関する f の**フーリエ係数**と謂い

$$S_n f = \sum_{j=0}^{n} \hat{f}(j)\ \phi_j$$

を f の**フーリエ第 n 部分和**と謂う。

定理 6 (フーリエ部分和の性質) 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対し $S_n : L^2(I;\mu) \ni f \mapsto S_n f \in L^2(I;\mu)$ は有界線型作用素であり $\mathscr{P}_n$ への直交射影となる：

$$S_n^* = S_n,$$

$$S_n^2 = S_n,$$

$$\text{Range } S_n = \mathscr{P}_n$$

更に任意の $f \in L^2(I;\mu)$ に対し次の等式が成立つ：

$$\min_{P \in \mathscr{P}_n} ||f - P||^2 = ||f - S_n\ f||^2 = ||f||^2 - \sum_{j=0}^{n} |\hat{f}(j)|^2$$

系 (ベッセルの不等式) 正規直交系に関する $f \in L^2(I;\mu)$ のフーリエ係数の成す数列 $\{\hat{f}(n); n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ は自乗総和可能でベッセルの不等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq ||f||^2$$

を満たす。

(証明) 任意の $f \in L^2(I;\mu)$ に対し等式

$$\begin{aligned}
||f - S_n f||^2 &= ||f||^2 - 2(f, S_n f) + ||S_n f||^2 \\
&= ||f||^2 - 2(f, \sum_{j=0}^{n} \hat{f}(j)\phi_j) + ||\sum_{j=0}^{n} \hat{f}(j)\phi_j||^2 \\
&= ||f||^2 - 2\sum_{j=0}^{n} \hat{f}(j)(f, \phi_j) + \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \hat{f}(j)\hat{f}(k)(\phi_j, \phi_k) \\
&= ||f||^2 - 2\sum_{j=0}^{n} \hat{f}(j)\hat{f}(j) + \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \hat{f}(j)\hat{f}(k)\delta_{jk} \\
&= ||f||^2 - 2\sum_{j=0}^{n} |\hat{f}(j)|^2 + \sum_{j=0}^{n} |\hat{f}(j)|^2 \\
&= ||f||^2 - \sum_{j=0}^{n} |\hat{f}(j)|^2
\end{aligned}$$

が成り立つから

$$||S_n f||^2 = \sum_{j=0}^{n} |\hat{f}(j)|^2 = ||f||^2 - ||f - S_n f||^2 \leq ||f||^2$$

を得る。よって $||S_n|| \leq 1$ となる。任意の $f, g \in L^2(I;\mu)$ に対し等式

$$\begin{aligned}
(S_n f, g) =& \sum_{j=0}^{n} \hat{f}(j)(\phi_j, g) = \sum_{j=0}^{n} (f, \phi_j)(g, \phi_j) = \sum_{j=0}^{n} (f, \phi_j)\hat{g}(j) \\
=& (f, \sum_{j=0}^{n} \hat{g}(j)\phi_j) = (f, S_n g)
\end{aligned}$$

が成立つから $S_n^* = S_n$ を得る。任意の $f \in L^2(I;\mu)$ 及び $0 \le j \le n$ に対し

$$S_n\phi_j = \sum_{k=0}^{n} \hat{\phi}_j(k)\phi_k = \sum_{k=0}^{n}(\phi_j, \phi_k)\phi_k = \phi_j,$$

$$\begin{aligned} S_n^2 f = S_n(S_n f) =& S_n\left(\sum_{j=0}^{n} \hat{f}(j)\phi_j\right) = \sum_{j=0}^{n} \hat{f}(j) S_n\phi_j \\ =& \sum_{j=0}^{n} \hat{f}(j)\phi_j = S_n f \end{aligned}$$

が成立つから $S_n^2 = S_n$ を得る。任意の $f \in L^2(I;\mu)$ に対し

$$S_n f = \sum_{j=0}^{n} \hat{f}(j)\phi_j \in \mathrm{L.h.}\{\phi_j; 0 \le j \le n\} = \mathscr{P}_n$$

であり、任意の $\{\lambda_j; 0 \le j \le n\} \subset \mathbb{R}$ に対し

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j\phi_j = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j S_n\phi_j = S_n\left(\sum_{j=0}^{n} \lambda_j\phi_j\right)$$

となるから $\mathrm{Range}\ S_n = \mathscr{P}_n$ が従う。任意の $f \in L^2(I;\mu)$ と任意の $\{\lambda_j; 0 \le j \le n\} \subset \mathbb{R}$ に対し等式

$$\begin{aligned} ||f - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j\phi_j||^2 &= ||f||^2 - 2(f, \sum_{j=0}^{n} \lambda_j\phi_j) + ||\sum_{j=0}^{n} \lambda_j\phi_j||^2 \\ &= ||f||^2 - 2\sum_{j=0}^{n} \lambda_j\hat{f}(j) + \sum_{j=0}^{n} \lambda_j^2 \\ &= ||f||^2 - \sum_{j=0}^{n} |\hat{f}(j)|^2 + \sum_{j=0}^{n} |\lambda_j - \hat{f}(j)|^2 \\ &= ||f - S_n f||^2 + \sum_{j=0}^{n} |\lambda_j - \hat{f}(j)|^2 \end{aligned}$$

が成立ち最小値は全ての j に就いて $\lambda_j = \hat{f}(j)$ の場合に実現されるから

$$\min_{P \in \mathscr{P}_n} ||f - P||^2 = ||f - S_n f||^2$$

が従う。

定理 7（フーリエ部分和の積分表示（クリストッフェル・ダルブーの公式）） 正規直交系 $\{\phi_n; n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}\} \subset L^2(I;\mu)$ 及び $f \in L^2(I;\mu)$ に対しフーリエ第 n 部分和 $S_n f$ は次の積分表示を持つ：

$$(S_n f)(x) = \int_I K_n(x,y) f(y) d\mu(y),$$

$$K_n(x,y) = \sum_{j=0}^{n} \phi_j(x)\phi_j(y) = \frac{a_n}{a_{n+1}}\left(\frac{\phi_{n+1}(x)\phi_n(y) - \phi_n(x)\phi_{n+1}(y)}{x-y}\right),$$

ここに a_n は ϕ_n の x^n の係数とする。

(証明) 正規直交系 $\{\phi_n; n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ の満たす漸化式

$$\phi_{n+1} = (A_n x - B_n)\phi_n - C_n\phi_{n-1},$$

$$A_n = a_{n+1}/a_n,\ C_n = A_n/A_{n-1}$$

を用いて

$$\begin{aligned}
&\phi_{n+1}(x)\phi_n(y) - \phi_n(x)\phi_{n+1}(y)\\
&= ((A_n x - B_n)\phi_n(x) - C_n\phi_{n-1}(x))\,\phi_n(y)\\
&-\phi_n(x)\,((A_n y - B_n)\phi_n(y) - C_n\phi_{n-1}(y))\\
&= A_n(x-y)\phi_n(x)\phi_n(y) + C_n(\phi_n(x)\phi_{n-1}(y) - \phi_{n-1}(x)\phi_n(y))
\end{aligned}$$

を得る。両辺を A_n で割った等式

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{A_n}(\phi_{n+1}(x)\phi_n(y) - \phi_n(x)\phi_{n+1}(y))\\
&= (x-y)\phi_n(x)\phi_n(y) + \frac{1}{A_{n+1}}(\phi_n(x)\phi_{n-1}(y) - \phi_{n-1}(x)\phi_n(y))
\end{aligned}$$

を帰納的に用いて

$$\frac{1}{A_n}(\phi_{n+1}(x)\phi_n(y) - \phi_n(x)\phi_{n+1}(y)) = \sum_{j=1}^{n}(x-y)\phi_j(x)\phi_j(y) + \frac{1}{A_0}(\phi_1(x)\phi_0(y) - \phi_0(x)\phi_1(y))$$

を得る。ϕ_1 及び ϕ_0 の定義より

$$\begin{aligned}
\phi_1(x)\phi_0(y) - \phi_0(x)\phi_1(y) &= (a_1 x - a_1(x\phi_0,\phi_0)\phi_0(x))\phi_0(y) - \phi_0(x)(a_1 y - a_1(x\phi_0,\phi_0,)\phi_0(y))\\
&= a_1(x\phi_0(y) - \phi_0(x)y) = a_1 a_0(x-y)
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A_n}(\phi_{n+1}(x)\phi_n(y) - \phi_n(x)\phi_{n+1}(y)) &= \sum_{j=1}^{n}(x-y)\phi_j(x)\phi_j(y) + \frac{a_0}{a_1}\cdot a_1 a_0(x-y)\\
&= (x-y)\left(\sum_{j=1}^{n}\phi_j(x)\phi_j(y) + a_0^2\right) = (x-y)\sum_{j=0}^{n}\phi_j(x)\phi_j(y)
\end{aligned}$$

が従う。これより定理の最後の等式が従う。残りは $S_n f$ の定義に従い次の様に計算すれば良い：

$$\begin{aligned}
(S_n f)(x) &= \sum_{j=0}^{n}\hat{f}(j)\phi_j(x) = \sum_{j=0}^{n}(f,\phi_j)\phi_j(x)\\
&= \sum_{j=0}^{n}\int_I f(y)\phi_j(y)d\mu(y)\phi_j(x) = \int_I\left(\sum_{j=0}^{n}\phi_j(x)\phi_j(y)\right)f(y)d\mu(y)
\end{aligned}$$

定理 8 (有界閉区間上の正規直交系の完全性) $I\subset\mathbb{R}$ を有界閉区間、μ はルベーグ測度に関して絶対連続でその密度函数 w は殆ど至る所正であるとする。このとき正規直交系 $\{\phi_n; n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}\subset L^2(I;\mu)$ は完全である。即ち次の同値な条件を全て満たす。

(1) $f \in L^2(I;\mu)$ に対し

$f = 0 \ \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, (f, \phi_n) = 0$

(2) $\overline{\mathrm{L.h.}\{\phi_n; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}} = L^2(I;\mu)$

(3) **(フーリエ部分和の L^2 収束)** 任意の $f \in L^2(I;\mu)$ に対し $\lim_{n\to\infty} ||f - S_n f|| = 0$

(4) **(パーセバルの等式)** 任意の $f \in L^2(I;\mu)$ に対し $||f||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$

(5) 任意の $f, g \in L^2(I;\mu)$ に対し $(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\hat{g}(n)$

(証明) （1）から（5）の同値性の証明はヒルベルト空間の完全正規直交系の特徴付けから従うので（1）のみを示そう。$f \in L^2(I;\mu)$ は任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $(f, \phi_n) = 0$ となるとき $f = 0$ である事を証明すれば良い。その為に先ず $f \in L^2(I;\mu) \cap C(I)$ に対して

$$\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, (f, \phi_n) = 0 \Rightarrow f = 0$$

なる事を示そう。I は有界閉区間なのでワイエルストラスの多項式近似定理により任意の $\epsilon > 0$ に対し多項式 P が存在して $||f - P||_{L^\infty(I)} < \epsilon$ とする事が出来る。このとき $\deg P = n$ とすると $P \in \mathscr{P}_n = \mathrm{L.\ h.}\{\phi_j; 0 \leq j \leq n\}$ であるから仮定により

$$\begin{aligned}\int_I f(x)^2 d\mu(x) &= \int f(x)(f(x) - P(x))d\mu(x) + \int f(x)P(x)d\mu(x) \\ &= \int f(x)(f(x) - P(x))d\mu(x)\end{aligned}$$

となる。これより不等式

$$\begin{aligned}0 \leq \int_I f(x)^2 d\mu(x) &\leq ||f - P||_{L^\infty(I)} \int_I |f(x)| d\mu(x) \\ &\leq \epsilon \sqrt{\mu(I)}\ ||f||\end{aligned}$$

を得る。従って

$$0 \leq ||f|| \leq \epsilon \sqrt{\mu(I)}$$

となり $\epsilon > 0$ は任意であったから $f = 0$ を得る。

さて $I = [a, b],\ a < b, f \in L^2(I;\mu)$ とし $(f, \phi_n) = 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を仮定しよう。$x \in I$ に対し

$$F(x) = \int_a^x f(y)w(y)dy$$

と置くと $F(a) = 0$ かつ

$$F(b) = \int_I f(y)d\mu(y) = \frac{1}{a_0}(f, \phi_0) = 0$$

が従う。任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $x^n \in \mathrm{L.h.}\{\phi_j; 0 \leq j \leq n\}$ であるから仮定 $(f, \phi_n) = 0\ \forall n$ は $(f, x^n) = 0\ \forall n$ と同値である。これより任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$\int_a^b x^n F'(x)dx = \int_I x^n f(x)w(x)dx = (x^n, f) = 0$$

を得る。従って任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$\begin{aligned}\int_a^b x^{n-1}F(x)dx &= \frac{1}{n}\int_a^b (x^n)'F(x)dx \\ &= \frac{1}{n}\left[x^n F(x)\right]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b x^n F'(x)dx = 0\end{aligned}$$

となる。$F \in C(I) \cap L^\infty(I) \subset C(I) \cap L^2(I;\mu)$ かつ $\mathrm{L.h.}\{\phi_j; 0 \leq j \leq n-1\} = \mathscr{P}_{n-1}$ であるので前段で示した事から $F = 0$ が従う。これより殆ど至る所 $fw = 0$ となる。殆ど至る所 $w > 0$ 故 $f = 0$ が従う。

参考文献： H. ホックシタット、特殊関数、培風館
高橋陽一郎、実関数とフーリエ解析、岩波書店