三角函数の有理函数の一周期上の積分

平成 20 年 11 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html
"All my life's a circle, but I can't tell you why," Harry Chapin

$2n$ 変数の有理函数 F に対し定積分

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta, \cdots, \cos n\theta, \sin n\theta)d\theta$$

を留数計算で求めるには次の方法が標準的である。即ち単位円周 $|z| = 1$ を $z = e^{i\theta}$ と表し、変数に現れる三角函数を

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$\cos k\theta = \frac{1}{2}(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}) = \frac{1}{2}\left(z^k + \frac{1}{z^k}\right)$$

$$\sin k\theta = \frac{1}{2i}(e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}) = \frac{1}{2i}\left(z^k - \frac{1}{z^k}\right)$$

として F に代入し z の函数として

$$G(z) = F\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),\ \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \cdots, \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right), \frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)\right)$$

と定め $d\theta = \dfrac{1}{ie^{i\theta}}dz = \dfrac{1}{iz}dz$ による単位円周上の積分

$$\int_{|z|=1} G(z)\frac{1}{iz}dz$$

を求めると云う方法である。単位円板内での $f : z \mapsto G(z)/z$ の極全体の成す集合を S とする：

$$S = \{a \in \mathbb{C}; |a| < 1,\ a \text{ は } f \text{ の極}\}$$

留数公式により

$$\int_{|z|=1} G(z)\frac{1}{iz}dz = 2\pi \sum_{a\in S} \mathrm{Res}_a f$$

となる。次の例を考えよう：

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta \quad (n\in\mathbb{Z},\ a>0,\ a\neq 1)$$

積分値は

$$I=\begin{cases}\dfrac{2\pi a^n}{1-a^2} & (0<a<1)\\[2ex] \dfrac{2\pi}{a^n(a^2-1)} & (a>1)\end{cases}$$

となる事はよく知られている。この求め方に就いて纏めて置こう。

1. 留数計算の公式による方法

上の定義に従って

$$f(z)=\frac{1}{z}G(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{\frac{1}{2}(z^n+\frac{1}{z^n})}{1-a(z+\frac{1}{z})+a^2}=\frac{z^n+\frac{1}{z^n}}{2(z-a(z^2+1)+a^2z)}=\frac{z^{2n}+1}{2z^n(z-a)(1-az)},$$

$$S=\{0,a,1/a\}\ (n\neq 0),\ S=\{a,1/a\}\ (n=0)$$

となる。ここで f の極の位数はそれぞれ $n,1,1$ となる。0 に於ける留数は留数計算の公式により

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_0 f &= \lim_{z\to 0}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}(z^n f(z))\\ &= \lim_{z\to 0}\frac{1}{2(n-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}\left(\frac{z^{2n}+1}{(z-a)(1-az)}\right)\end{aligned}$$

の極限を求める事により得られる。ライプニッツ則と

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\right)^j z^{2n}=0,\quad 0\le j\le n-1$$

なる関係により、分子の z^{2n} からの寄与は無くなり

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_0 f &= \lim_{z\to 0}\frac{1}{2(n-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{(z-a)(1-az)}\right)\\ &= \lim_{z\to 0}\frac{1}{2(n-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1-j}\frac{1}{z-a}\right)\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^{j}\frac{1}{1-az}\right)\\ &= \lim_{z\to 0}\frac{1}{2(n-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\frac{(-1)^{n-1-j}(n-1-j)!}{(z-a)^{n-j}}\cdot\frac{j!a^j}{(1-az)^{j+1}}\\ &= \frac{1}{2(n-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(n-1-j)!j!\left(\frac{-1}{a^{n-j}}\right)a^j\\ &= -\frac{1}{2a^n}\sum_{j=0}^{n-1}a^{2j}=-\frac{1}{2a^n}\cdot\frac{1-a^{2n}}{1-a^2}=\frac{a^n-a^{-n}}{2(1-a^2)}\end{aligned}$$

となる。この値は $n=0$ の場合 0 となるので f が 0 で正則な場合も含んでいるものと理解される。a と $1/a$ に於ける留数は夫々

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_a f &= \lim_{z\to a}(z-a)f(z)\\ &= \lim_{z\to a}\frac{z^{2n}+1}{2z^n(1-az)}\\ &= \frac{a^{2n}+1}{2a^n(1-a^2)} = \frac{a^n+a^{-n}}{2(1-a^2)},\\ \mathrm{Res}_{1/a} f &= \lim_{z\to 1/a}(z-1/a)f(z)\\ &= \lim_{z\to 1/a}\left(-\frac{1}{a}\right)\frac{z^{2n}+1}{2z^n(z-a)}\\ &= -\frac{a^{-2n}+1}{2aa^{-n}(a^{-1}-a)} = -\frac{a^{-n}+a^n}{2(1-a^2)}\end{aligned}$$

と計算される。さて留数公式を用いて積分値 I を求めよう。

$0<a<1$ の場合　単位円板内の特異点は 0 と a なので

$$\begin{aligned}I &= 2\pi(\mathrm{Res}_0 f + \mathrm{Res}_a f)\\ &= \pi\left(\frac{a^n-a^{-n}}{1-a^2}+\frac{a^n+a^{-n}}{1-a^2}\right) = \frac{2\pi a^n}{1-a^2}\end{aligned}$$

$a>1$ の場合　単位円板内の特異点は 0 と $1/a$ なので

$$\begin{aligned}I &= 2\pi(\mathrm{Res}_0 f + \mathrm{Res}_{1/a} f)\\ &= \pi\left(\frac{a^n-a^{-n}}{1-a^2}+\frac{a^{-n}+a^n}{1-a^2}\right) = \frac{2\pi a^{-n}}{1-a^2} = \frac{2\pi}{a^n(a^2-1)}\end{aligned}$$

2. 原点に於ける留数をローラン展開から直接求める方法

$\mathrm{Res}_0\ f$ を留数の計算公式に基づく方法ではなく原点に於ける f のローラン展開から直接求めてみよう。

$|z|<\min(a,1/a)$ として

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)\frac{1}{(z-a)(1-az)}\\ &= \frac{1}{2}(z^n+z^{-n})\cdot\frac{1}{1-a^2}\left(\frac{1}{z-a}+\frac{a}{1-az}\right)\\ &= \frac{1}{2(1-a^2)}(z^n+z^{-n})\left(-\frac{1}{a(1-a^{-1}z)}+\frac{a}{1-az}\right)\\ &= \frac{1}{2(1-a^2)}(z^n+z^{-n})\sum_{k=0}^{\infty}(-a^{-1}(a^{-1}z)^k+a(az)^k)\end{aligned}$$

ここで $\mathrm{Res}_0 f$ は f のローラン展開の z^{-1} の係数であるから、それは最後の無限級数の $k = n-1$ の項の z^{n-1} の係数とその直前の因子の z^{-n} の係数を掛けたものである。故に

$$\mathrm{Res}_0 f = \frac{1}{2(1-a^2)}(-a^{-n} + a^n) = \frac{a^n - a^{-n}}{2(1-a^2)}$$

3. 余弦函数を指数函数の実部で表し被積分函数の特異点を減らす方法

単位円周上の点は $z = e^{i\theta}$ と表されるので

$$\cos n\theta = \mathrm{Re}\ (\cos n\theta + i \sin n\theta) = \mathrm{Re}\ e^{in\theta} = \mathrm{Re}\ z^n$$

を用いると

$$\begin{aligned} I &= \mathrm{Re}\ \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta \\ &= \mathrm{Re}\ \int_{|z|=1} \frac{z^n}{1 - a(z + \frac{1}{z}) + a^2} \cdot \frac{1}{iz} dz \\ &= \mathrm{Re}\ \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{z^n}{(z-a)(1-az)} dz \end{aligned}$$

そこで $f(z) = \dfrac{z^n}{(z-a)(1-az)}$ と置いて f の単位円板内の極とその留数を考える。

$0 < a < 1$ の場合　単位円板内の極は a なので

$$\frac{1}{i} \int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi\ \mathrm{Res}_a f = 2\pi \lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 2\pi \frac{a^n}{1-a^2} = \frac{2\pi a^n}{1-a^2}$$

$a > 1$ の場合　単位円板内の極は $1/a$ なので

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \int_{|z|=1} f(z) dz &= 2\pi\ \mathrm{Res}_{1/a} f = 2\pi \lim_{z \to 1/a} (z - 1/a) f(z) \\ &= 2\pi \lim_{z \to 1/a} (z - 1/a) \frac{z^n}{(z-a)(1-az)} \\ &= -\frac{2\pi}{a} \frac{a^{-n}}{a^{-1} - a} = \frac{2\pi}{a^n(a^2 - 1)} \end{aligned}$$

4. フーリエ展開による方法

$0 < a < 1$ の場合　$z = e^{i\theta},\ 0 \le \theta < 2\pi,$ とすると $a < |z| = 1 < 1/a$ であるから

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2} &= \frac{1}{1-a(z+\frac{1}{z})+a^2} = \frac{z}{(1-az)(z-a)} \\
&= \frac{z}{1-a^2}\left(\frac{a}{1-az}+\frac{1}{z-a}\right) \\
&= \frac{1}{1-a^2}\left(\frac{az}{1-az}+\frac{1}{1-\frac{a}{z}}\right) \\
&= \frac{1}{1-a^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(az)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n\right) \\
&= \frac{1}{1-a^2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a^n(z^n+z^{-n})\right) = \frac{1}{1-a^2}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos n\theta\right)
\end{aligned}$$

最後の等式の右辺は周期函数

$$\theta \mapsto \frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2}$$

のフーリエ展開 (余弦展開) であり (一意的に定まる)$\cos n\theta$ に対するフーリエ係数は $2a^n/(1-a^2)$ で与えられる事を示している。これは

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta = \frac{2a^n}{1-a^2}$$

を意味する。

$a > 1$ の場合　$0 < \frac{1}{a} < 1$ であるから前段より

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{1-\frac{2}{a}\cos\theta+\frac{1}{a^2}}d\theta = \frac{2\pi\left(\frac{1}{a}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{a}\right)^2}$$

を得る。両辺に $\dfrac{1}{a^2}$ を掛け

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{a^2-2a\cos\theta+1}d\theta = \frac{2\pi}{a^n(a^2-1)}$$

を得る。

参考文献： 大谷光春、「複素関数論」 http://www.otani.phys.waseda.ac.jp/index-j.html
高橋礼司、[新版] 複素解析、東京大学出版会
杉浦光夫、解析入門 II、東京大学出版会