摂動論の方法に依る半線型発展方程式の解の構成

平成 22 年 11 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

ナビエ・ストークス方程式、非線型波動方程式、非線型シュレディンガー方程式をはじめとして、数理物理学に現れる多くの非線型発展方程式は、適当なバナッハ空間に於いて半線型発展方程式の形を取る。ここでは非線型相互作用を、主要項を成す線型偏微分作用素の摂動と見做して、半線型発展方程式の初期値問題をバナッハ空間で議論しよう。

１．問題の設定

X を（複素）バナッハ空間とし A は定義域 $D(A) \subset X$ を持つ線型作用素で $F : X \to X$ は $F(0) = 0$ なる連続写像とする。$t_0 \geq 0$, $u_0 \in X$ を与え、次の微分方程式の初期値問題を考える：

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + F(u),\ t > t_0, \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

この問題を積分方程式に転換して考察する為に次の仮定を置く。

（A）　A は X 上 C_0 半群 $\{e^{tA}; t \geq 0\}$ を生成する。

その為の必要充分条件は Hille-吉田の定理により次で与えられる。

（i）　A は稠密に定義された閉作用素である。

(ii)　$\omega_0 \in \mathbb{R}$ が存在し A のレゾルベント集合 $\rho(A)$ は半直線 (ω_0, ∞) を含み A のレゾルベント $(\lambda I - A)^{-1}$ は任意の $\lambda > \omega_0$ 及び $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し評価

$$\|(\lambda I - A)^{-m}\|_{B(X)} \leq M_0(\lambda - \omega_0)^{-m}$$

を満たす。ここに M_0 は m にも λ にも依存しない $M_0 \geq 1$ なる定数である。

このとき $\{e^{tA}; t \geq 0\}$ は評価

$$\sup_{t \geq 0} e^{-\omega_0 t} \|e^{tA}\|_{B(X)} \leq M_0$$

を満たす。

さて (E) を $I=[t_0,t_0+T]$ で満たす自然な強解のクラスは $C(I:D(A))\cap C^1(I;X)$ であるとして強解 u の満たす積分方程式を求めよう。任意に $t\in I$ を与え X 値函数 $[t_0,t]\ni s\mapsto e^{(t-s)A}u(s)\in X$ を考える。s に就いて微分すると

$$\frac{d}{ds}(e^{(t-s)A}u(s))=e^{(t-s)A}(-Au(s)+\frac{du}{ds})=e^{(t-s)A}F(u(s))$$

となるから t_0 から t 迄積分すると等式

$$u(t)-e^{(t-t_0)A}u(t_0)=\int_{t_0}^{t}\frac{d}{ds}(e^{(t-s)A}u(s))ds=\int_{t_0}^{t}e^{(t-s)A}F(u(s))ds$$

が従う。よって (E) に対応する積分方程式は

(I)

$$u(t)=e^{(t-t_0)A}u_0+\int_{t_0}^{t}e^{(t-s)A}F(u(s))ds$$

となる。次節からは積分方程式 (I) を主に扱う。

２．リプシッツ摂動の場合

この節では F はリプシッツ条件を満たすものとする：

（L） $L_0\geq 0$ が存在し任意の $u,v\in X$ に対し

$$\|F(u)-F(v)\|\leq L_0\|u-v\|$$

このとき次が成立つ：

定理１　A は X 上 C_0 半群を成し F はリプシッツ条件を満たすものとする。このとき任意の $t_0\geq 0$ 及び $u_0\in X$ に対し (I) は唯一つの解 $u\in C([t_0,\infty);X)$ を持つ。また、任意の $\omega>\omega_0+L_0M_0$ に対し $C_\omega>0$ が存在し任意の $t\geq t_0$ に対し

$$\|u(t)\|\leq C_\omega e^{\omega(t-t_0)}$$

が成立つ。

（証明）　$\omega>\omega_0$ に対し

$$|||u|||=\sup_{t\geq t_0}e^{-\omega(t-t_0)}\|u(t)\|$$

と置くと

$$\mathscr{X}_\omega=\{u\in C([t_0,\infty);X);|||u|||<\infty\}$$

はノルム $|||\cdot|||$ でバナッハ空間となる。実際 $\{u_n\}$ を $\mathscr{X}_\omega$ のコーシー列とすると $v_n(t)=e^{-\omega(t-t_0)}u_n(t)$ で定まる $\{v_n\}$ は $(C\cap L^\infty)([t_0,\infty);X)$ に於けるコーシー列となるので収束極限 v を持つ。

このとき $u(t)=e^{\omega(t-t_0)}v(t)$ と置くと $u\in C([t_0,\infty);X)$ で $|||u|||=\sup_{t\ge t_0}\|v(t)\|$ かつ $|||u_n-u|||=\sup_{t\ge t_0}\|v_n(t)-v(t)\|\to 0(n\to\infty)$ を満たす。

さて $u\in\mathscr{X}_\omega$ に対し

$$(\Phi(u))(t)=e^{(t-t_0)A}u_0+\int_{t_0}^{t}e^{(t-s)A}F(u(s))ds$$

と置く。半群 $\{e^{tA};t\ge 0\}$ の強連続性より $\Phi(u)\in C([t_0,\infty);X)$ が従う。半群の評価及び F のリプシッツ性と $F(0)=0$ なる事により

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t}\|e^{(t-s)A}F(u(s))\|ds &\le M_0\int_{t_0}^{t}e^{\omega_0(t-s)}\|F(u(s))\|ds\\ &\le L_0M_0\int_{t_0}^{t}e^{\omega_0(t-s)}\|u(s)\|ds\\ &\le L_0M_0|||u|||\int_{t_0}^{t}e^{\omega_0(t-s)}e^{\omega(s-t_0)}ds\\ &=\frac{L_0M_0}{\omega-\omega_0}|||u|||(e^{\omega(t-t_0)}-e^{\omega_0(t-t_0)})\end{aligned}$$

と評価されるので

$$|||\Phi(u)|||\le M_0\|u_0\|+\frac{L_0M_0}{\omega-\omega_0}|||u|||$$

を得る。同様に $u,v\in\mathscr{X}_\omega$ に対し不等式

$$|||\Phi(u)-\Phi(v)|||\le\frac{L_0M_0}{\omega-\omega_0}|||u-v|||$$

が成立つので、与えられた $u_0\in X$ に対し

$$M_0\|u_0\|+\frac{L_0M_0}{\omega-\omega_0}\rho\le\rho$$

及び

$$\frac{L_0M_0}{\omega-\omega_0}<1$$

即ち

$$\begin{aligned}&\omega>\omega_0+L_0M_0,\\ &\rho\ge M_0\|u_0\|/\left(1-\frac{L_0M_0}{\omega-\omega_0}\right)\end{aligned}$$

となる様に ω と ρ を取れば $\Phi:u\mapsto\Phi(u)$ は $\mathscr{X}_\omega$ の閉球

$$\mathscr{X}_\omega(\rho)=\{u\in\mathscr{X}_\omega;|||u|||\le\rho\}$$

に於ける縮小写像となり不動点を持つ。

次に (I) の解の一意性を示そう。$u,v \in C([t_0,\infty);X)$ を (I) の解とする。このとき

$$u(t)-v(t)=\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}(F(u(s))-F(v(s)))\,ds$$

となるので不等式

$$e^{-\omega_0 t}\|u(t)-v(t)\| \le L_0 \int_{t_0}^{t} e^{-\omega_0 s}\|u(s)-v(s)\|\,ds$$

にグロンウォールの補題を用いれば $u=v$ が従う。

３．局所リプシッツ摂動の場合

この節では F は局所リプシッツ条件を満たすものとする：

$(\mathrm{L})_{\mathrm{loc}}$　単調増加函数 $L:\mathbb{R}_{\ge 0}\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ が存在し任意の $\rho>0$ に対し $L(\rho)>0$ となり任意の $u,v\in\overline{B(0;\rho)}$ に対し不等式

$$\|F(u)-F(v)\| \le L(\rho)\|u-v\|$$

が成立つ。

このとき次が成立つ。

定理２　A は X 上 C_0 半群を成し F は局所リプシッツ条件を満たすものとする。このとき任意の $t_0\ge 0$ 及び $u_0\in X$ に対し $T^*\in(t_0,\infty]$ が存在し (I) は唯一つの解 $u\in C([t_0,T^*);X)$ を持つ。更に次のどちらか一方が成立つ。

(i)　$T^*=\infty$

(ii)　$T^*<\infty$ 且つ $\lim_{t\uparrow T^*}\|u(t)\|=\infty$

(証明)　$0<T\le 1$ なる T に対して $I=[t_0,t_0+T]$ と置き $C(I;X)$ に一様ノルム

$$|||u|||=\sup_{t\in I}\|u(t)\|$$

を与えたバナッハ空間を $\mathscr{X}$ と表し、原点を中心とする半径 $\rho>0$ の閉球を $\mathscr{X}(\rho)$ と表そう：

$$\mathscr{X}(\rho)=\{u\in C(I;X);|||u|||\le\rho\}$$

$u\in\mathscr{X}(\rho)$ 及び $t\in I$ に対し

$$(\Phi(u))(t)=e^{(t-t_0)A}u_0+\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}F(u(s))\,ds$$

と置く。半群 $\{e^{tA}: t \geq 0\}$ の強連続性より $\Phi(u) \in C(I;X)$ が従う。半群の評価及び F の局所リプシッツ性と $F(0)=0$ なる事により $\omega_0 \neq 0$ の場合

$$\begin{aligned}
\|(\Phi(u))(t)\| &\leq M_0 e^{(t-t_0)\omega_0}\|u_0\| + L(\rho)M_0 \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)\omega_0}\|u(s)\|\,ds \\
&\leq M_0 e^{T\omega_0}\|u_0\| + L(\rho)M_0\rho \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)\omega_0}\,ds \\
&\leq M_0 e^{\omega_0}\|u_0\| + \frac{L(\rho)M_0}{\omega_0}(e^{(t-t_0)\omega_0}-1)\rho,
\end{aligned}$$

$\omega_0 = 0$ の場合

$$\|(\Phi(u))(t)\| \leq M_0\|u_0\| + L(\rho)M_0 \cdot (t-t_0)\rho$$

を得る。同様に $u, v \in \mathscr{X}(\rho)$ に対し $\omega_0 \neq 0$ の場合

$$\|(\Phi(u)-\Phi(v))(t)\| \leq \frac{L(\rho)M_0}{\omega_0}(e^{(t-t_0)\omega_0}-1)|||u-v|||$$

$\omega_0 = 0$ の場合

$$\|(\Phi(u)-\Phi(v))(t)\| \leq L(\rho)M_0 \cdot (t-t_0)|||u-v|||$$

を得る。以上より $\Phi(u)$ は $\mathscr{X}(\rho)$ 上で $\omega_0 > 0$ の場合

$$\begin{aligned}
|||\Phi(u)||| &\leq M_0 e^{\omega_0}\|u_0\| + \frac{L(\rho)M_0}{\omega_0}(e^{T\omega_0}-1)\rho, \\
|||\Phi(u)-\Phi(v)||| &\leq \frac{L(\rho)M_0}{\omega_0}(e^{T\omega_0}-1)\ |||u-v|||,
\end{aligned}$$

$\omega_0 \leq 0$ の場合

$$\begin{aligned}
|||\Phi(u)||| &\leq M_0\|u_0\| + L(\rho)M_0 T\rho, \\
|||\Phi(u)-\Phi(v)||| &\leq L(\rho)M_0 T|||u-v|||
\end{aligned}$$

なる評価を持つ。そこで $0<\varepsilon<1$ なる ε を一つ取り $\rho, T>0$ を $\omega_0>0$ の場合

$$\begin{aligned}
&\rho \geq M_0 e^{\omega_0}\|u_0\|/\varepsilon, \\
&0 < T \leq \min\left(1, \frac{1}{\omega_0}\log(1+\frac{(1-\varepsilon)\omega_0}{L(\rho)M_0})\right)
\end{aligned}$$

$\omega_0 \leq 0$ の場合

$$\begin{aligned}
&\rho \geq M_0\|u_0\|/\varepsilon, \\
&0 < T \leq \min\left(1, \frac{1-\varepsilon}{L(\rho)M_0}\right)
\end{aligned}$$

と定めると縮小定数 $1-\varepsilon$ を持つ縮小写像 $\Phi: \mathscr{X}(\rho) \ni u \mapsto \Phi(u) \in \mathscr{X}(\rho)$ が定まる。よって Φ は $\mathscr{X}(\rho)$ に不動点 u を持つ。そこで

$$\begin{aligned}
&T_0 \equiv \min(1, \frac{1}{\omega_0}\log(1+\frac{(1-\varepsilon)\omega_0}{L(M_0 e^{\omega_0}\|u_0\|/\varepsilon)M_0})),\ \omega_0>0, \\
&T_0 \equiv \min(1, \frac{1-\varepsilon}{L(M_0\|u_0\|/\varepsilon)M_0}),\ \omega_0 \leq 0
\end{aligned}$$

と置くと $u(t_0+T_0)\in X$ が定まり $t_1\equiv t_0+T_0$ で与えられたデータとして積分方程式

$$u(t)=e^{(t-t_1)A}u(t_1)+\int_{t_1}^{t}e^{(t-s)A}F(u(s))\,ds$$

の解の存在を考える事が出来る。上と同様に議論する事により

$$T_1\equiv\min(1,\frac{1}{\omega_0}\log(1+\frac{(1-\varepsilon)\omega_0}{L(M_0e^{\omega_0}\|u(t_1)\|/\varepsilon)M_0})),\ \omega_0>0$$
$$T_1\equiv\min(1,\frac{1-\varepsilon}{L(M_0\|u(t_1)\|/\varepsilon)M_0}),\ \omega_0\le 0$$

と置くとその解 $u\in C([t_1,t_1+T_1];X)$ の存在が従う。そこでこの u を前段の $u\in C([t_0,t_1];X)$ の延長として $[t_0,t_1+T_1]$ で考えると積分方程式

$$\begin{aligned}u(t)&=e^{(t-t_0)A}u(t_1)+\int_{t_1}^{t}e^{(t-s)A}F(u(s))\,ds\\&=e^{(t-t_1)A}\left(e^{(t_1-t_0)A}u_0+\int_{t_0}^{t_1}e^{(t_1-s)A}F(s)ds\right)+\int_{t_1}^{t}e^{(t-s)A}F(u(s))\,ds\\&=e^{(t-t_0)A}u_0+\int_{t_0}^{t_1}e^{(t-s)A}F(u(s))ds+\int_{t_1}^{t}e^{(t-s)A}F(u(s))\,ds\\&=e^{(t-t_0)A}u_0+\int_{t_0}^{t}e^{(t-s)A}F(u(s))ds\end{aligned}$$

を $[t_0,t_1+T_1]$ 上で満たすので $u\in C([t_0,t_1+T_1];X)$ なる解が得られた事になる。以下帰納的に $n\ge 1$ に対し $t_n=t_{n-1}+T_{n-1}$ が定まり積分方程式

$$u(t)=e^{(t-t_n)A}u(t_n)+\int_{t_n}^{t}e^{(t-s)A}F(u(s))\,ds$$

は

$$T_n\equiv\min(1,\frac{1}{\omega_0}\log(1+\frac{(1-\varepsilon)\omega_0}{L(M_0e^{\omega_0}\|u(t_n)\|/\varepsilon)M_0})),\ \omega_0>0$$
$$T_n\equiv\min(1,\frac{1-\varepsilon}{L(M_0e^{\omega_0}\|u(t_n)\|/\varepsilon)M_0}),\ \omega_0\le 0$$

として解 $u\in C([t_n,t_n+T_n];X)$ を持つ事が示され、その解は $u\in C([t_0,t_n];X)$ の延長として

$$u(t)=e^{(t-t_0)A}u_0+\int_{t_0}^{t}e^{(t-s)A}F(u(s))\,ds$$

を $[t_0,t_n+T_n]$ 上で満たす解 $u\in C([t_0,t_{n+1}];X)(t_{n+1}=t_n+T_n)$ に接続される事が分る。

この様にして狭義単調増加列 $\{t_n;n\ge 0\}$ が $t_{n+1}=t_n+T_n$ によって定まる。このとき次のどちらか一方が起こっている。

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} T_n < \infty$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} T_n = \infty$

そこで $T^* = t_0 + \sum_{n=0}^{\infty} T_n$ と置こう。このとき T^* は $T^* = \sup\{T \geq t_0; \text{(I)}$ は $u \in C([t_0,T];X)$ なる解をもつ$\}$ と特徴付けられる。(i) の $T^* < \infty$ の場合に $\lim_{t \uparrow T^*} \|u(t)\| = \infty$ なる事を示せば良い。そこで $\liminf_{t \uparrow T^*} \|u(t)\| < \infty$ である事を仮定し矛盾を導こう。$\liminf_{t \uparrow T^*} \|u(t)\| < r_0 < \infty$ なる r_0 を取る。$t_0 < s_n < T^*,\ s_n \to T^*$ なる単調増加列 $\{s_n\}$ が存在し $\|u(s_n)\| \leq r_0$ を満たす。このとき

$$S \equiv \min(1, \frac{1}{\omega_0}\log(1+\frac{(1-\varepsilon)\omega_0}{L(M_0 e^{\omega_0} r_0/\varepsilon)M_0})),\ \omega_0 > 0$$
$$S \equiv \min(1, \frac{1-\varepsilon}{L(M_0 r_0/\varepsilon)M_0}),\ \omega_0 \leq 0$$

と置けば u は $[t_0,T^*) \cup \bigcup_{n\geq 1}[s_n, s_n+S] = [t_0, T^*+S)$ 特に $[t_0, T^*+S/2]$ 上に延長可能となり T^* の性質に反する事になる。

4. C_0-半群の生成作用素の定義域に於ける局所リプシッツ摂動の場合

この節では F は $D(A)$ に於いて局所リプシッツ条件を満たすものとする：

$(\mathrm{L})'_{\mathrm{loc}}$ F は $D(A)$ を不変に保ち、単調増加函数 $L:\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在し任意の $\rho > 0$ に対し $L(\rho) > 0$ となり $\|u\|+\|Au\| \leq \rho,\ \|v\|+\|Av\| \leq \rho$ なる任意の $u,v \in D(A)$ に対し不等式

$$\|F(u)-F(v)\| + \|A(F(u)-F(v))\| \leq L(\rho)(\|u-v\|+\|Au-Av\|)$$

が成立つ。

このとき次が成立つ：

定理３ A は X 上 C_0 半群を成し F は $D(A)$ に於いて局所リプシッツ条件を満たすものとする。このとき任意の $t_0 \geq 0$ 及び $u_0 \in D(A)$ に対し $T^* \in (t_0, \infty]$ が存在し (I) は唯一つの解 $u \in C([t_0,T^*);D(A))$ を持つ。更に次のどちらか一方を必ず成立つ。

(i) $T^* = \infty$

(ii) $T^* < \infty$ 且つ $\lim_{t \uparrow T^*}(\|u(t)\| + \|Au(t)\|) = \infty$

（証明） A は閉作用素故 $D(A)$ は A のグラフノルムでバナッハ空間となる。グラフノルムによるバナッハ空間 $D(A)$ を Y とし $A_0 = A|D(A^2)$ を $D(A_0) = D(A^2)$

$$A_0 u = Au,\ u \in D(A_0)$$

と定めると A_0 は Y 上 C_0-半群を成す。定理２の X,A を Y,A_0 に対して適用したものが定理３である。

５．部分的局所リプシッツ摂動の場合

Y を X の部分空間としノルム $\|\cdot\|_Y$ が定義されていて $(Y,\|\cdot\|_Y)$ はバナッハ空間を成し埋込み写像 $\iota:(Y,\|\cdot\|_Y)\hookrightarrow(X,\|\cdot\|_X)$ は連続であるとする。X 上の C_0 半群 $\{e^{tA};t\geq 0\}$ は Y を不変に保ち Y 上に制限された半群 $\{e^{tA}:t\geq 0\}$ は Y 上でも C_0 半群を成すものとする。F は Y を不変に保ち Y の任意の有界集合上有界で X のノルムでリプシッツ条件を満たすものとする：

$(\mathrm{L})''_{\mathrm{loc}}$　F は Y を不変に保ち、単調増加函数 $L:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在し任意の $\rho>0$ に対し $L(\rho)>0$ となり任意の $u,v\in\overline{B_Y(\rho)}=\{w\in Y;\|w\|_Y\leq\rho\}$ に対し、不等式

$$\|F(u)-F(v)\|_X\leq L(\rho)\|u-v\|_X,$$
$$\|F(u)\|_Y\leq L(\rho)\|u\|_Y$$

が成立つ。

また任意の有界閉区間 $I\subset\mathbb{R}$ 及び $\rho>0$ に対し

$$\mathscr{Y}(\rho)=\{u\in C(I;X);u(I)\subset Y,\ \sup_{t\in I}\|u(t)\|_Y\leq\rho\}$$

は X のノルムで定まる距離

$$d(u,v)=\sup_{t\in I}\|u(t)-v(t)\|_X$$

に関し完備であるとする。

定理４　X の部分空間 Y は上の仮定を満たすものとする。このとき任意の $t_0\geq 0$ 及び $u_0\in Y$ に対し $T^*\in(t_0,\infty]$ が存在し (I) は唯一つの解 $u\in C([t_0,T^*);Y)$ を持つ。更に次のどちらか一方が必ず成立つ。

(i)　$T^*=\infty$

(ii)　$T^*<\infty$ 且つ $\lim_{t\uparrow T^*}\|u(t)\|_Y=\infty$

(証明)　$\omega_0\in\mathbb{R},M_0\geq 1$ が存在し

$$\sup_{t\geq 0}e^{-\omega_0 t}\left(\|e^{tA}\|_{B(X)}\vee\|e^{tA}\|_{B(Y)}\right)\leq M_0$$

とする事が出来る。定理２の証明と同様にして $u,v\in\mathscr{Y}(\rho)$ に対し $\omega_0>0$ の場合

$$\sup_{t\in I}\|(\Phi(u))(t)\|_Y\leq M_0e^{\omega_0}\|u_0\|_Y+\frac{L(\rho)M_0}{\omega_0}(e^{T\omega_0}-1)\rho,$$

$$d(\Phi(u),\Phi(v)) \le \frac{L(\rho)M_0}{\omega_0}(e^{T\omega_0}-1)d(u,v),$$

$\omega_0 \le 0$ の場合

$$\sup_{t\in I}\|(\Phi(u))(t)\|_Y \le M_0\|u_0\|_Y + L(\rho)M_0T_\rho,$$

$$d(\Phi(u),\Phi(v)) \le L(\rho)M_0Td(u,v)$$

なる評価を得る。ここに $I=[t_0,t_0+T], T>0$ とする。ρ と T を定理２の証明と同様に取る事により Φ の不動点（即ち (I) の局所解）の存在が従う。u が (I) の解である事と $\{e^{tA};t\ge 0\}$ が Y で C_0 半群を成す事により $u\in C(I;Y)$ なる事が従う。局所解の延長の議論も定理２の証明の $\|u(t)\|$ を $\|u(t)\|_Y$ に置き換える事により同様に成立つ。

註　（定理４と定理２，３との関係）　定理４の特別な場合として $X=Y$ を考えると定理４と定理２は同一の内容となる為、定理２は定理４の系と見做す事を出来る。定理３は $Y=D(A)$ の場合に相当するが F に対する仮定は定理４の方が弱い（リプシッツ条件は X のノルムに関するもののみである）一方、$\mathscr{Y}(\rho)$ の d に関する完備性は A 及び X に対する追加条件と見做す事が出来る。一つの充分条件として次の命題を挙げて置こう。

命題　X を反射的バナッハ空間とし A は X 上の C_0 半群の生成作用素とする。このとき任意の有界閉区間 $I\subset\mathbb{R}$ 及び $\rho>0$ に対し

$$\mathscr{Y}(\rho)=\{u\in C(I;X);u(I)\subset D(A),\sup_{t\in I}\|Au(t)\|\le\rho\}$$

は X のノルムで定まる距離

$$d(u,v)=\sup_{t\in I}\|u(t)-v(t)\|$$

に関し完備である。

（証明）　$\mathscr{Y}(\rho)$ が X のノルムに関して閉集合である事を示せば良い。$u\in\overline{\mathscr{Y}(\rho)}$ とすると $\{u_n\}\subset\mathscr{Y}(\rho)$ が存在し $\sup_{t\in I}\|Au_n(t)\|\le\rho$ 且つ $\sup_{t\in I}\|u_n(t)-u(t)\|\to 0(n\to\infty)$ が成立つ。X の完備性により $u\in C(I;X)$ なる事が従う。各 $t\in I$ に対し $\|Au_n(t)\|\le\rho$ であるから X の反射性により (t に依存する）部分列 $\{Au_{n_j}(t)\}$ 及び $v(t)\in X$ が存在し $Au_{n_j}(t)$ は $v(t)$ に弱収束する。このとき $\|v(t)\|\le\liminf_{j\to\infty}\|Au_{n_j}(t)\|\le\rho$ が成立つ。
任意の $w\in D(A^*)$ に対し成立つ等式

$$\langle A^*w,u_{n_j}(t)\rangle=\langle w,Au_{n_j}(t)\rangle$$

に於いて $j\to\infty$ とすると

$$\langle A^*w,u(t)\rangle=\langle w,v(t)\rangle$$

を得る。これにより

$$w\mapsto\langle A^*w,u(t)\rangle$$

は稠密に定義された連続線型汎函数となるので $u(t) \in D(A^{**})$ が従う。A は反射的バナッハ空間に於いて稠密に定義された閉作用素であるから $u(t) \in D(A^{**}) = D(A)$ 且つ $Au(t) = v(t)$ が従う。$t \in I$ は任意であったから $u(I) \subset D(A)$, $\sup_{t \in I} \|Au(t)\| = \sup_{t \in I} \|v(t)\| \leq \rho$ となり $u \in \mathscr{Y}(\rho)$ が従う。

参考文献：

H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, 1983.

T. Cazenave and A. Haraux, An Introduction to Semilinear Evolution Equations, Oxford, 1998.

大谷光春, An Introduction to Nonlinear Evolution Equations, 大学院 GP 数学レクチャーノート復刻版，東北大学，2010.

A. Pazy, Semi-groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer, 1983.

I.E. Segal, Nonlinear semi-groups, Ann. of Math. **78**(1963), 339-364.