急減少函数の成す空間

平成 20 年 4 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

L. Schwartz の急減少函数全体の成す空間 $\mathscr{S}$ とは次で定義される：

$$\mathscr{S} = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \text{任意の } k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ に対し } |u|_k = \max_{|\alpha|+j \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x \rangle^j |\partial^\alpha u(x)| < \infty\}$$

ここで、多重指数の標準的な記号を用いている：

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0},\ |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j,$$

$$\partial^\alpha = \prod_{j=1}^n \partial_j^{\alpha_j},\ \partial_j = \partial/\partial x_j,\ x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2},\ |x| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}.$$

各点毎の和とスカラー倍により、$\mathscr{S}$ に和とスカラー倍が定義され、この和とスカラー倍により $\mathscr{S}$ はベクトル空間となる。各 k に対し $\mathscr{S} \ni u \mapsto |u|_k \in \mathbb{R}$ は半ノルムとなり、

$$d(u, v) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^k} \frac{|u - v|_k}{1 + |u - v|_k}$$

は $\mathscr{S}$ 上の距離となる。$\mathscr{S}$ は距離 d に関し完備となる。具体的には Gaussian $\exp(-a|x|^2)$ や

$$\prod_{j=1}^n \frac{2}{e^{ax_j} + e^{-ax_j}} = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\cosh(ax_j)} = \prod_{j=1}^n \text{ sech } (ax_j) \quad (a > 0)$$

が急減少函数の典型的な例である。急減少函数に多項式を掛けて得られる函数も急減少函数である。特に Hermite 多項式に Gaussian を掛けた函数 (量子力学に於ける調和振動子を記述する波動函数) は急減少函数である。一方、$\exp(-a|x|)(a > 0)$ は滑らかではないので $\mathscr{S}$ には属さず、$\exp(-a\langle x \rangle^\rho)(a, \rho > 0)$ は滑らかなので $\mathscr{S}$ に属す。m 次の多項式の増大度 $O(|x|^m)(|x| \to \infty)$ を $O(\exp(m \log |x|))$ と考えれば、指数減衰より減少度の弱い函数 $\exp(-a(\log\langle x \rangle)^2)$ も $\mathscr{S}$ に属す事が分かる。急減少函数の導函数は急減少であるが、急減少函数を発散として持つベクトル場は必ずしも急減少ではない。特に一変数の急減少函数の不定積分や原始函数は必ずしも急減少ではない。コンパクトな台を持つ滑らかな函数全体の成す空間 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ は $\mathscr{S}$ で稠密であり、$\mathscr{S}$ は $L^p(\mathbb{R}^n)(1 \leq p < \infty)$ で稠密であるが、$\mathscr{S}$ は $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ では稠密でない (定数函数 1 は $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に於て $\mathscr{S}$ の列で近似出来ない)。

さて急減少函数とは、その全ての導函数と共に、無限遠点に於いて $|x|$ の任意の負冪より速く消滅する滑らかな函数と言える。そこで無限遠点での消滅の様子を記述する為に、$\mathbb{R}^n$ を一点コンパクト化して n 次元球面 S^n の立体射影 stereographic projection を導入しよう。先ず S^n を $\mathbb{R}^{n+1}$ に於て次の様に定義する：

$$S^n = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; |x|^2 + t^2 = 1\}$$

このとき $\varphi : S^n \setminus \{(0,1)\} \to \mathbb{R}^n$ を $\varphi(x,t) = x/(1-t)$ で定める。$\mathbb{R}^n$ の無限遠点 ∞ は S^n の北極 (0,1) に対応するものとすれば φ は同相写像 $\varphi : S^n \to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ となる。実際、φ の逆 φ^{-1} は

$$\varphi^{-1}(y) = \left(\frac{2}{|y|^2+1}y,\ \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}\right),\ y \in \mathbb{R}^n,\ \varphi^{-1}(\infty) = (0,1)$$

で与えられる。滑らかなコンパクト多様体 S^n 上で定義された滑らかな函数で、その全ての導函数と共に北極 (0,1) に於て消滅する函数全体の成す空間を $\dot{C}^\infty(S^n)$ とする：

$$\begin{aligned}\dot{C}^\infty(S^n) = \{f \in C^\infty(S^n); &\ \mathbb{R}^{n+1} \text{ に於ける } S^n \text{ の開近傍 } U \text{ と } g \in C^\infty(U) \text{ が在って } g|S^n = f \\ &\text{かつ任意の } (\alpha, j) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1} \text{ に対し } \lim_{\substack{(x,t)\to(0,1) \\ (x,t)\in S^n}} \partial_x^\alpha \partial_t^j g(x,t) = 0\}\end{aligned}$$

このとき次が成立つ。

命題　$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し次は同値である。

(1) $u \in \mathscr{S}$

(2) $\varphi^* u \in \dot{C}^\infty(S^n)$

(証明)

(1) ⇒ (2)： $u \in \mathscr{S}$ に対し

$$(\varphi^* u)(x,t) = u\left(\frac{x}{1-t}\right) = u(y), \quad y = \frac{x}{1-t}$$

で定まる函数 $\varphi^* u$ の $(x,t) \to (0,1)$ に於ける挙動が問題となるので $0 \leq t < 1$ の場合を考えれば充分である。このとき

$$\begin{aligned}&\partial_x^\alpha \partial_t^j (\varphi^* u)(x,t) \\ &= \frac{j!}{(1-t)^{j+1+|\alpha|}} \sum_{k_1=1}^n \cdots \sum_{k_j=1}^n x_{k_1} \cdots x_{k_j} (\partial_{k_1} \cdots \partial_{k_j} \partial^\alpha u)\left(\frac{x}{1-t}\right) \\ &= \frac{j!}{(1-t)^{|\alpha|+1}} \sum_{k_1=1}^n \cdots \sum_{k_j=1}^n y_{k_1} \cdots y_{k_j} (\partial_{k_1} \cdots \partial_{k_j} \partial^\alpha u)(y)\end{aligned}$$

に於いて $0 \leq \frac{1}{1-t} = \frac{|y|^2}{1+t} \leq |y|^2$ なる事に注意すれば (1) ⇒ (2) が従う。

(2) ⇒ (1) : $\varphi^* u \in \dot{C}^\infty(S^n)$ に対し、上記の様な拡張 g を取る。$(\varphi^{-1})^* g \in \mathscr{S}$ なる事を示せば良い。このとき

$$((\varphi^{-1})^* g)(y) = g\left(\frac{2}{|y|^2+1}y, \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}\right) = g(x,t), \quad y \in \mathbb{R}^n$$

である。$\mathbb{R}^{n+1}$ 上の函数 $y \mapsto \left(\dfrac{2}{|y|^2+1}y, \dfrac{|y|^2-1}{|y|^2+1}\right)$ と g は全ての導函数も込めて滑らかで有界なので $(\varphi^{-1})^* g$ もそうである。仮定により g の任意の導関数は、$(x,t) \to (0,1)$ なるとき $(1-t)$ の任意の逆冪を掛けても 0 に収束するので、$|y|^2 = \frac{1+t}{1-t}$ の任意の冪を掛けても $|y| \to \infty$ に於いて消滅する。

参考文献： L. シュワルツ、超函数の理論、岩波書店

B.E. Petersen, *Introduction to the Fourier Transform and Pseudo-Differential Operators*, Pitman, 1983