等比級数

平成 20 年 12 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html
一尺之捶、日取其半、萬世不竭。『荘子天下篇第三十三』

等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ は級数の中でも最も基礎的なものであろう。級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するとは第 n 部分和 $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$ から成る数列 $\{S_n\}$ が収束する事であり $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が発散するとは $\{S_n\}$ が収束しない事である。今の場合

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \quad = \quad 1 + x + \cdots + x^{n-1}$$

であるから $x = 1$ なら $S_n = n$, $x \neq 1$ なら

$$\begin{aligned} xS_n &= \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} = x + x^2 + \cdots + x^n = (1 + x + \cdots + x^{n-1}) - 1 + x^n \\ &= S_n - 1 + x^n, \\ S_n &= \frac{1 - x^n}{1 - x} \end{aligned}$$

となる。よって S_n は $|x| < 1$ のとき収束し $|x| \geq 1$ のとき発散する。詳しくは

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & (|x| < 1) \\ \infty & (x \geq 1) \\ \text{振動して発散} & (x \leq -1) \end{cases}$$

となる。これより $|x| < 1$ なる x に対し

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{1}$$

が成立する。右辺の級数は $(-1, 1)$ 上広義一様に絶対収束する。実際 $0 < \varepsilon < 1$ なる任意の ε に対し

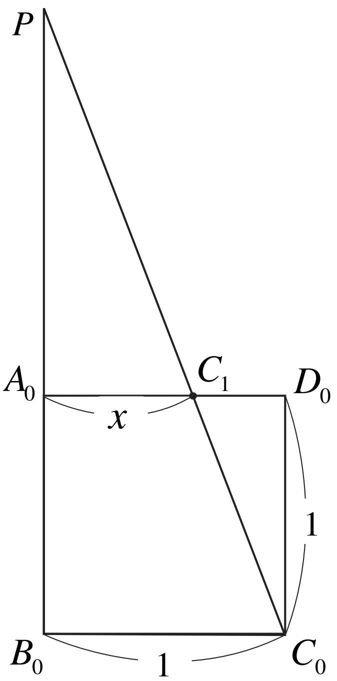
$$\sup_{x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]} \sum_{n=0}^{\infty} |x|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \varepsilon)^n = \frac{1}{\varepsilon}$$

となるからである。(1) と広義一様収束性を用いると $|x|<1$ なる x に対し

$$\begin{aligned}
\log(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+y}dy = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-y)^n dy = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x y^n dy \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n, && (2) \\
\log(1-x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n, && (3) \\
\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} &= \frac{1}{2}(\log(1+x)-\log(1-x)) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n}x^n = \frac{1}{2}\sum_{\substack{n\geq 1\\ n:\text{奇数}}}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n}x^n \\
&= \sum_{\substack{n\geq 1\\ n:\text{奇数}}}\frac{1}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} && (4)
\end{aligned}$$

が得られる。(1) と同様 (2)(3)(4) の右辺の級数は $(-1,1)$ 上広義一様に絶対収束する。(2) は $x=1$ で (3) は $x=-1$ で夫々(条件) 収束する。

さて等比級数は幾何級数とも謂う。ここでは (1) を初等幾何学的に考えてみよう。以下では x は $0<x<1$ なる任意の実数とする。



一辺の長さを 1 とする正方形 $A_0B_0C_0D_0$ を考える。辺 A_0D_0 上に A_0 から長さ x の点 C_1 を取る。辺 B_0A_0 を延長した直線と辺 C_0C_1 を延長した直線の交点を P とする。

$$\overline{B_0C_0}:\overline{A_0C_1}=\overline{PB_0}:\overline{PA_0}$$

であり $\overline{B_0C_0}=1,\ \overline{A_0C_1}=x,\ \overline{PB_0}=\overline{PA_0}+1$ であるから

$\overline{B_0C_0}\cdot\overline{PA_0}=\overline{A_0C_1}\cdot\overline{PB_0}$

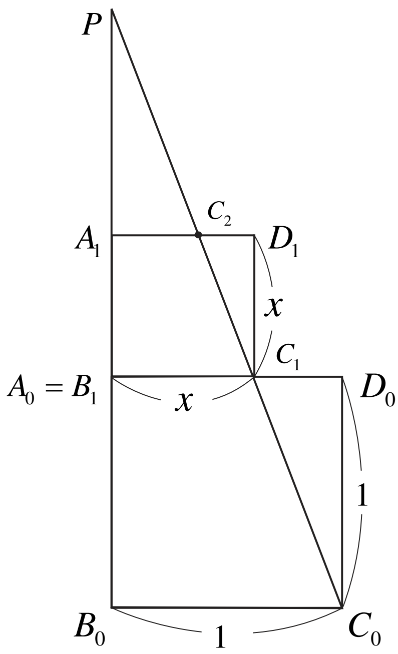
$\Leftrightarrow \overline{PA_0}=x(\overline{PA_0}+1)$

$\Leftrightarrow \overline{PA_0}=\dfrac{x}{1-x}$

よって

$$\overline{PB_0}=\frac{x}{1-x}+1=\frac{1}{1-x}$$

となる。



次に $B_1 = A_0$ とし A_0C_1 を底辺に持つ正方形、即ち一辺の長さを x とする正方形 $A_1B_1C_1D_1$ を考える。PC_1 と A_1D_1 との交点を C_2 とする

$$\overline{B_0C_0} : \overline{B_1C_1} = \overline{B_1C_1} : \overline{A_1C_2}$$

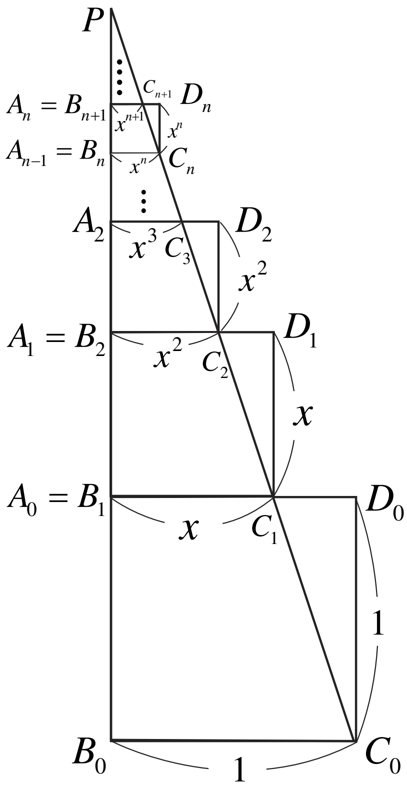
であり $\overline{B_0C_0} = 1,\ \overline{B_1C_1} = x$ であるから

$$\begin{aligned}&\overline{B_0C_0} \cdot \overline{A_1C_2} = \overline{B_1C_1} \cdot \overline{B_1C_1}\\ &\Leftrightarrow \overline{A_1C_2} = x^2\end{aligned}$$

となる。

以下帰納的に点列 $\{A_n\}\{B_n\}\{C_n\}, \{D_n\}$ を任意の $n \geq 0$ に対し次の性質を満たす様に作る。

- $A_nB_nC_nD_n$ は一辺の長さを x^n とする正方形
- C_{n+1} は PC_0 と A_nD_n の交点で $\overline{A_nC_{n+1}} = x^{n+1}$
- $A_n = B_{n+1}$
- 正方形 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ は A_nC_{n+1} を底辺とする



さて台形 $A_nB_nC_nC_{n+1}$ の面積は、上底 A_nC_{n+1} の長さは x^{n+1}、下底 B_nC_n の長さは x^n、高さは辺 A_nB_n の長さ x^n であるから

$$\frac{1}{2}(x^{n+1} + x^n)x^n = \frac{1}{2}(x^{2n} + x^{2n+1})$$

となる。これらの台形の合併は三角形 PB_0C_0 に等しい：

$$PB_0C_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_nB_nC_nC_{n+1}$$

三角形 PB_0C_0 の面積は $\frac{1}{2}\overline{B_0C_0} \cdot \overline{PB_0} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x}$ であり台形の総面積は

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(x^{2n} + x^{2n+1}) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

従って $0 < x < 1$ に対し

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{5}$$

が成立つ。

正方形 $A_nB_nC_nD_n$ の面積は x^{2n} であるからそれらの合併による図形

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_nB_nC_nD_n$$

の面積は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ である。$0 < x^2 < 1$ であるから (5) を用いると、この値は

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

と求める事が出来る。

さて正方形 $A_nB_nC_nD_n$ から台形 $A_nB_nC_nC_{n+1}$ を除いた図形は三角形 $C_nD_nC_{n+1}$ である。辺 D_nC_{n+1} の長さは $\overline{A_nD_n}$ から $\overline{A_nC_{n+1}}$ を引いたものだから $\overline{D_nC_{n+1}} = x^n - x^{n+1}$ となる。よって三角形 $C_nD_nC_{n+1}$ の面積は

$$\frac{1}{2}x^n(x^n - x^{n+1}) = \frac{1}{2}(x^{2n} - x^{2n+1})$$

となる。これらの三角形の合併は

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} C_nD_nC_{n+1} = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_nB_nC_nD_n\right) \setminus PB_0C_0$$

と表されるから総面積は

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(x^{2n} - x^{2n+1}) = \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} \tag{6}$$

と計算される。(6) の右辺は

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} - \frac{1}{2(1-x)} = \frac{2-(1+x)}{2(1-x)(1+x)} = \frac{1-x}{2(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2(1+x)}$$

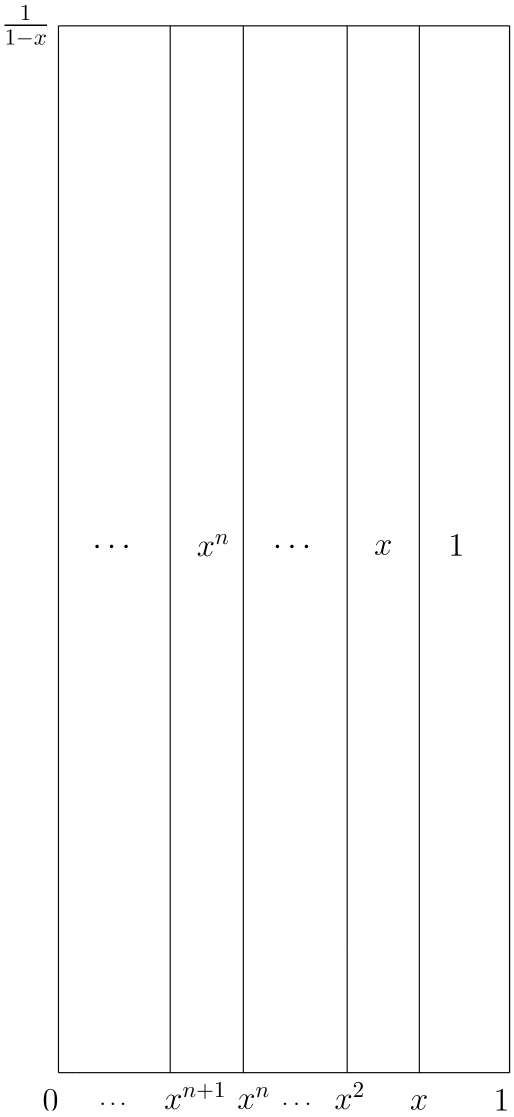
に等しく左辺は

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}((-1)^{2n}x^{2n} + (-1)^{2n+1}x^{2n+1}) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

に等しい。従って $0 < x < 1$ に対し

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$$

が成立つ。



次の様な見方も出来る。横軸に $[0,1]$ 区間を考え $0<x<1$ として縦軸に $[0,1/(1-x)]$ 区間を取る。数列 $\{x^n; n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ は狭義単調減少列であるから横軸で見ると

$$(0,1]=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}[x^{n+1},x^n]$$

であり、対応する長方形で見ると

$$\begin{aligned}&(0,1]\times[0,1/(1-x)]\\=&\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}[x^{n+1},x^n]\times[0,1/(1-x)]\end{aligned}$$

なる等式が従う。対応する長さ及び面積は

$$\begin{aligned}1&=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n-x^{n+1})\\&=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}(x^n-x^{n+1})\\&=\lim_{m\to\infty}(1-x^{m+1})\\&=1-\lim_{m\to\infty}x^{m+1}=1\end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x}&=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n-x^{n+1})\cdot\frac{1}{1-x}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}x^n(1-x)\cdot\frac{1}{1-x}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\end{aligned}$$

と計算される。

参考文献： 藤原松三郎、數學解析第一編、微分積分學 第一巻、内田老鶴圃、1934