統制函数

平成 26 年 4 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

区間上の**統制函数**（regulated function, 方正函数）の基礎的性質と積分に就いて纏めて置こう。

1．統制函数の定義とその特徴付け

$I \subset \mathbb{R}$ を区間とし X をバナッハ空間とする。函数 $f : I \to X$ は I 上に連続点、又は第一種不連続点のみを持つとき**統制函数**と謂う。即ち f は任意の内点 $t \in \mathrm{Int} I$ に於いて左極限

$$f(t-0) = \lim_{s \uparrow t} f(s) = \lim_{\substack{s \to t \\ s \in I \cap (-\infty, t)}} f(s)$$

及び右極限

$$f(t+0) = \lim_{s \downarrow t} f(s) = \lim_{\substack{s \to t \\ s \in I \cap (t, \infty)}} f(s)$$

を持ち、端点 $t \in \partial I$ で左又は右極限を持つ事を謂う。I の始点と終点を夫々、$a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ と表し I の $\mathbb{R}$ に於ける閉包 $\overline{I}$ と表そう。函数 $f : I \to X$ は I の分割（$\overline{I}$ の点の増大有限列）$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ が存在して各開区間 (t_{i-1}, t_i) 上 $(1 \leq i \leq n) f$ は定値であるとき**階段函数** (step function) と謂う。

定理１　統制函数 $f : I \to X$ に対し可算集合 $J \subset I$ が存在し f は $I \setminus J$ 上連続である。

(証明)　f の $t \in I$ に於ける振幅を $\omega_f(t)$ と表そう：

$$\omega_f(t) = \inf_{\delta > 0} \sup_{t', t'' \in I \cap (t-\delta, t+\delta)} \|f(t') - f(t'')\|$$

先ず任意の $t \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$ に対し $\displaystyle\lim_{\substack{s \to t \\ s \in I \setminus \{t\}}} \omega_f(s) = 0$ なる事を示そう。任意に $\varepsilon > 0$ を取る。右極限の存在より $\delta > 0$ が存在し任意の $t' \in I \cap (t, t+\delta)$ に対し $\|f(t') - f(t+0)\| < \varepsilon/2$ が成立つ。これより任意の $t', t'' \in I \cap (t, t+\delta)$ に対し

$$\|f(t') - f(t'')\| \leq \|f(t') - f(t+0)\| + \|f(t+0) - f(t'')\| < \varepsilon$$

が成立つ。さて $s \in I \cap (t, t+\delta)$ を取る。このとき $\eta \equiv \min(s-t, t+\delta-s) > 0$ であり $(s-\eta, s+\eta) \subset (t, t+\delta)$ となる。任意の $t', t'' \in I \cap (s-\eta, s+\eta)$ に対し $\|f(t') - f(t'')\| < \varepsilon$ であるから $\displaystyle\sup_{t', t'' \in I \cap (s-\eta, s+\eta)} \|f(t') - f(t'')\| \leq \varepsilon$ となり

$$\omega_f(s) = \inf_{\delta' > 0} \sup_{t', t'' \in I \cap (s-\delta',\ s+\delta')} \|f(t') - f(t'')\| \leq \varepsilon$$

が従う。一方 $t \in I$ に於ける左極限の存在より $\delta' > 0$ が存在し任意の $t' \in I \cap (t-\delta', t)$ に対し $\|f(t') - f(t-0)\| < \varepsilon/2$ が成立つ。これより任意の $t', t'' \in I \cap (t-\delta', t)$ に対し $\|f(t') - f(t'')\| < \varepsilon$ が成立つ。さて $s \in I \cap (t-\delta', t)$ を取る。このとき $\eta' \equiv \min(t-s, s+\delta'-t) > 0$ であり $(s-\eta', s+\eta') \subset (t-\delta', t)$ となる。任意の $t', t'' \in I \cap (s-\eta', s+\eta')$ に対し $\|f(t') - f(t'')\| < \varepsilon$ であるから上と同様にして $\omega_f(s) \leq \varepsilon$ が従う。以上より、$0 < |s-t| < \min(\delta, \delta')$ なる任意の $s \in I$ に対し $\omega_f(s) \leq \varepsilon$ となる。これが示すべき事であった。

さて $n, k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $J_{n,k} = \{t \in \bar{I} \cap [-n, n]; \omega_f(t) \geq 1/k\}$ と置く。このとき $\sharp J_{n,k} < \infty$ で或る事を示そう。もしそうでなければ $J_{n,k}$ の相違なる点から成る無限列 $\{t_j\}$ が存在する。$\bar{I} \cap [-n, n]$ のコンパクト性により $t_0 \in \bar{I} \cap [-n, n]$ 及び部分列 $\{t_{j_m}\}$ が存在して $t_{j_m} \neq t_0, t_{j_m} \to t_0 (m \to \infty)$ とする事が出来る。このとき任意の m に対し $\omega_f(t_{j_m}) \geq 1/k$ であるが前段より $\lim_{n \to \infty} \omega_f(t_{j_m}) = 0$ が従うので矛盾となる。

さて $J = \displaystyle\bigcup_{n,k \in \mathbb{Z}_{>0}} J_{n,k}$ と置くと J は可算であり

$$J = \{t \in I; \omega_f(t) > 0\}$$

となるので J は f の不連続点全体の集合である。これより定理が従う。

定理２（有界閉区間上の統制函数の特徴付け） 有界閉区間 $I = [a, b]$ 上のバナッハ空間値函数 $f : I \to X$ に対し次は同値である。

(1) f は統制函数である。

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し I の分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ が存在し任意の $i \in \{1, \cdots, n\}$ 及び任意の $t', t'' \in (t_{i-1}, t_i)$ に対し

$$\|f(t') - f(t'')\| < \varepsilon$$

が成立つ。

(3) f は I 上の階段函数列の一様収束極限である。即ち I 上の階段函数の列 $\{\varphi_n\}$ が存在し

$$\sup_{t \in I} \|\varphi_n(t) - f(t)\| \to 0 \ (n \to \infty)$$

が成立つ。

(証明) (1) $\Rightarrow$ (2) : f を統制函数とする。任意に $\varepsilon > 0$ を取る。集合 J を

$$J = \left\{ \begin{array}{c} s \in (a, b]; [a, s] \text{ の分割 } a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = s \text{ が存在して任意の } i \in \{1, \cdots, m\} \\ \text{及び任意の } t', t'' \in (t_{i-1,}, t_i) \text{ に対し } \|f(t') - f(t'')\| < \varepsilon \end{array} \right\}$$

と定める。$a \in I$ に於ける右極限 $f(a+0)$ の存在により $\delta > 0$ が存在し任意の $t \in (a, a+\delta)$ に対し $\|f(t) - f(a+0)\| < \varepsilon/2$ が成立つ。このとき任意の $t', t'' \in (a, a+\delta)$ に対し

$$\|f(t') - f(t'')\| \leq \|f(t') - f(a+0)\| + \|f(a+0) - f(t'')\| < \varepsilon$$

が成立つ。故に $a+\delta \in J$ であり J は空でない。そこで $c = \sup J$ と置く。このとき $a < c \leq b$ である。$c \in I$ に於ける左極限 $f(c-0)$ が存在するので $\delta' > 0$ が存在し任意の $t \in (c-\delta', c)$ に対し $\|f(t) - f(c-0)\| < \varepsilon/2$ が成立つ。上限の性質より $s \in (c-\delta', c)$ なる $s \in J$ が存在する。故に $[a, s]$ の分割 $a = t_0 < \cdots < t_m = s$ が存在し任意の $t', t'' \in (t_{i-1}, t_i)(1 \leq i \leq m)$ に対し $\|f(t') - f(t'')\| < \varepsilon$ が成立つ。そこで $t_{m+1} = c$ と置くと任意の $t', t'' \in (t_m, t_{m+1}) = (s, c) \subset (c-\delta', c)$ に対し

$$\|f(t') - f(t'')\| \leq \|f(t') - f(c-0)\| + \|f(c-0) - f(t'')\| < \varepsilon$$

が成立つ。従って $c \in J$ である。

最後に $c = b$ で或る事を示そう。そうでないとすると $c < b$ となる。$c \in I$ に於ける右極限 $f(c+0)$ の存在により $\delta'' > 0$ が存在し任意の $t \in (c, c+\delta'')$ に対し $\|f(t) - f(c+0)\| < \varepsilon/2$ が成立つ。このとき任意の $t', t'' \in (c, c+\delta'')$ に対し $\|f(t') - f(t'')\| < \varepsilon$ が成立つ。$t_{m+1} = c+\delta''$ とすると $c + \delta'' \in J$ となり c の上限性に反し矛盾を得る。

$(2) \Rightarrow (3)$:　任意に $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ を取り $\varepsilon = 1/n$ として (2) を適用する。これにより (t_{i-1}, t_i) 上、定値 $f_i \equiv f((t_i + t_{i-1})/2)$ を取り t_i 上で $f(t_i)$ を取る階段函数 $\varphi_n : I \to X$ が定まり評価

$$\sup_{t \in I} \|\varphi_n(t) - f(t)\| \leq 1/n$$

が成立つ。

$(3) \Rightarrow (1)$:　任意に $\varepsilon > 0$ を取る。$\sup_{t \in I} \|\varphi_n(t) - f(t)\| < \varepsilon/2$ なる階段函数 $\varphi_n : I \to X$ が存在する。I の分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ が存在し各 (t_{i-1}, t_i) 上 φ_n は定値である。任意に $t \in [a, b)$ を取る。$\delta > 0$ が存在し $(t, t+\delta)$ 上 φ_n は定値となる。このとき任意の $t', t'' \in (t, t+\delta)$ に対し

$$\begin{aligned}\|f(t') - f(t'')\| &\leq \|f(t') - \varphi_n(t')\| + \|\varphi_n(t') - \varphi_n(t'')\| + \|\varphi_n(t'') - f(t'')\| \\ &\leq 2 \sup_{t \in I} \|f(t) - \varphi_n(t)\| < \varepsilon\end{aligned}$$

が成立つ。これより t に於ける右極限 $f(t+0)$ の存在が従う。$t \in (a, b]$ に対する左極限 $f(t-0)$ の存在も同様に従う。

区間 I 上の X 値階段函数の全体を $Step(I; X)$, 統制函数の全体を $Reg(I; X)$, 有界函数の全体を $L^\infty(I; X)$ と表す事にする。これらは各点毎の和とスカラー倍でベクトル空間を成し上限ノルムでノルム空間となる。定理２の系として次の定理が従う。

定理３　I を有界閉区間とすると

$$\overline{Step(I; X)} = Reg(I; X) \subset L^\infty(I; X)$$

が成立つ。ここに閉包は上限ノルムに依るものとする。特に $Reg(I; X)$ はバナッハ空間 $L^\infty(I; X)$ の閉部分区間でありそれ自身バナッハ空間を成す。

２．有界閉区間上の統制函数の積分

有界閉区間 I 上の X 値統制函数の積分は階段函数の積分の稠密性に拠る拡張として導入される。階段函数 $\varphi : I \to X$ に対する積分は

$$\int_I \varphi = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})\varphi_i$$

で定まる。ここに $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ は I の分割で (t_{i-1}, t_i) 上 φ は定値 $\varphi_i \in X$ を取るものとする。一つの階段函数に対する積分値 $\int_I \varphi$ は階段函数の表示に依らず定まる。これにより線型写像

$$\int_I : Step(I;X) \ni \varphi \mapsto \int_I \varphi \in X$$

が定まる。$Step(I;X)$ に上限ノルムを導入しノルム空間と見做せば $\int_I : Step(I;X) \to X$ は有界であり、その作用素ノルムは $b-a$ で上から評価される：

$$\left\| \int_I \varphi \right\| \leq (b-a)\|\varphi\|_\infty,\ \varphi \in Step(I;X)$$

これを稠密性に拠り拡張すれば $\displaystyle\int_I : Reg(I;X) = \overline{Step(I;X)} \to X$ が定まり同様な評価

$$\left\| \int_I f \right\| \leq (b-a)\|f\|_\infty,\ f \in Reg(I;X)$$

が成立つ。拡張の方法を具体的に述べると次の様になる。$f \in Reg(I;X)$ に対し近似列 $\{\varphi_n\} \subset Step(I;X)$ を取る。このとき評価

$$\left\| \int_I \varphi_m - \int_I \varphi_n \right\| = \left\| \int_I (\varphi_m - \varphi_n) \right\| \leq (b-a)\|\varphi_m - \varphi_n\|_\infty$$

より $\{\int_I \varphi_n\}$ は X のコーシー列を成す。完備性によりその極限が唯一つ存在する。その極限を $\int_I f \in X$ と表す：

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n$$

この値は f の近似列の取り方に依らず定まる。実際もう一つの近似例を $\{\psi_n\}$ とすると

$$\begin{aligned}
\left\| \int_I f - \int_I \psi_m \right\| &\leq \left\| \int_I f - \int_I \varphi_n \right\| + \left\| \int_I \varphi_n - \int_I \psi_n \right\| \\
&\leq \left\| \int_I f - \int_I \varphi_n \right\| + (b-a)\left\|\varphi_n - \psi_n\right\|_\infty \\
&\leq \left\| \int_I f - \int_I \varphi_n \right\| + (b-a)(\|\varphi_n - f\|_\infty + \|f - \psi_n\|_\infty) \\
&\to 0\ (n \to \infty)
\end{aligned}$$

となるからである。

写像 $Reg(I;X) \ni f \mapsto \int_I \in X$ の線型性及び有界性は $Step(I;X)$ 上の線型性及び有界性と稠密性による拡張法から従う。有界閉区間上の統制函数列に対する極限と積分の可換性は線型写像の有界性（連続性）の別表現としても捉えられる：

$$\left\| \int_I f_n - \int_I f \right\| = \left\| \int_I (f_n - f) \right\| \leq (b-a) \left\| f_n - f \right\|_\infty$$

参考文献：

J. Dieudonné, Foundation of Modern Analysis, Academic Press, 1960

D. Fraňková, Regulated functions, Math. Bohemica **116**(1991), 20-59.

S. Lang, Analysis I, Addison -Wesley, 1968.

L. Schwartz, Analyse II, Hermann