ラプラシアンのレゾルベントの積分核の評価

平成 25 年 3 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に於けるラプラシアンのレゾルベントの積分表示に現れる積分核のスペクトルパラメタ及び空間変数に関する依存性を不等式の形で精密に把握する事を考えよう。$n=1$ の場合は具体的に $\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}>0$ なる $\lambda\in\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ に対し

$$((\lambda-\Delta)^{-1}f)(x)=\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\sqrt{\lambda}\ |x-y|)f(y)dy$$

と表されるので以降 $n\geq 2$ の場合のみを考える。さて $\mathrm{Re}\lambda>0$ なる $\lambda\in\mathbb{C}$ に対しラプラシアンのレゾルベントは

$$\begin{aligned}((\lambda-\Delta)^{-1}f)(x)&=(\mathscr{F}^{-1}(\lambda+|\cdot|^2)^{-1})\hat{f}(x)\\&=(2\pi)^{-n/2}((\mathscr{F}^{-1}(\lambda+|\cdot|^2)^{-1})*f)(x)\end{aligned}$$

と表されるので、積分核 E_λ を

$$E_\lambda(x)=(2\pi)^{-n/2}(\mathscr{F}^{-1}(\lambda+|\cdot|^2)^{-1})(x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}(\lambda+|\xi|^2)^{-1}d\xi$$

と定めるとラプラシアンのレゾルベントの積分表示

$$((\lambda-\Delta)^{-1}f)(x)=(E_\lambda*f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}E_\lambda(x-y)f(y)dy$$

が得られる。積分核 E_λ は広義積分として

$$\begin{aligned}E_\lambda(x)=&\lim_{R\to\infty}(2\pi)^{-n}\int_{|x|\leq R}e^{ix\cdot\xi}(\lambda+|\xi|^2)^{-1}d\xi\\=&\lim_{R\to\infty}(2\pi)^{-n}\int_{|\xi|\leq R}e^{ix\cdot\xi}\left(\int_0^\infty e^{-(\lambda+|\xi|^2)t}dt\right)d\xi\\=&\lim_{R\to\infty}(2\pi)^{-n}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\int_{|\xi|\leq R}e^{ix\cdot\xi-t|\xi|^2}d\xi\right)dt\\=&\,(2\pi)^{-n}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi-t|\xi|^2}d\xi\right)dt\\=&\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{n/2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)dt\\=&\,\frac{1}{4\pi^{n/2}|x|^{n-2}}\int_0^\infty\exp\left(-\frac{\lambda|x|^2}{4s}-s\right)s^{n/2-2}ds\end{aligned}$$

と表示される。そこで $\nu, z \in \mathbb{C}$ に対し

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{z^2}{4t} - t\right) t^{\nu-1}dt$$

と置いて K_ν の性質を調べよう。積分の収束の為に z は

$$D = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}z > 0,\ \mathrm{Re}(z^2) > 0\} = \{z \in \mathbb{C}\ ; |\mathrm{Arg}z| < \pi/4\}$$

で考えるものとし $z^\nu = \exp(\nu \log z) = \exp(\nu(\mathrm{Log}|z| + i\ \mathrm{Arg}z))$ なる分枝を取るものとする。

命題１　$\nu \in \mathbb{C},\ z \in D$ に対し $K_\nu(z) = K_{-\nu}(z)$

（証明）　$K_\nu : D \to \mathbb{C}$ は正則であるから、一致の定理より $\mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$ 上で等式を示せば充分である。$x > 0$ に対し $s = x^2/(4t)$ とすれば

$$\begin{aligned} K_{-\nu}(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\int_0^\infty \exp\left(-s - \frac{x^2}{4s}\right)\left(\frac{x^2}{4s}\right)^{-\nu} s^{-1}ds \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{4s} - s\right) s^{\nu-1}ds = K_\nu(x) \end{aligned}$$

となる。これが示すべき等式であった。

命題２　$\mathrm{Re}\ \nu > -1/2,\ z \in D$ に対し

$$K_v(z) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}\frac{e^{-z}}{z^{\frac{1}{2}}}\int_0^\infty e^{-s}s^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{s}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}ds$$

（証明）　両辺共 z の函数として D 上正則であるから、一致の定理より $\mathbb{R}_{>0}$ 上で等式を示せば充分である。$\mathrm{Re}\ \nu > -1/2,\ x > 0$ に対し

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\int_0^\infty \exp\left(-t - \frac{x^2}{4t}\right) t^{-\nu-1}dt \\ =& \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\int_0^\infty \exp\left(-t - \frac{x^2}{4t}\right)\left[\frac{1}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}\int_0^\infty e^{-ts}s^{\nu-\frac{1}{2}}ds\right] t^{-\frac{1}{2}}dt \\ =& \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\frac{1}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}\int_0^\infty s^{\nu-\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty \exp(-(1+s)t - \frac{x^2}{4t})t^{-\frac{1}{2}}dt\right)ds \\ =& \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\frac{1}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}\int_0^\infty s^{\nu-\frac{1}{2}}\left(\pi^{\frac{1}{2}}(1+s)^{-\frac{1}{2}}\exp(-(1+s)^{\frac{1}{2}}x)\right)ds \end{aligned}$$

ここで $t=(1+s)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow s=t^2-1$ とすれば $dt=\frac{1}{2}(1+s)^{-\frac{1}{2}}ds$ となるので最後の等式の右辺は

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_1^{\infty} e^{-tx}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt$$

となる。更に $s=(t-1)x \Leftrightarrow t=1+s/x$ とすれば $dt=\frac{1}{x}ds,$

$$t^2-1=\left(1+\frac{s}{x}\right)^2-1=\frac{s^2}{x^2}+2\frac{s}{x}=\frac{s^2}{x^2}\left(1+\frac{2x}{s}\right)$$

より、この積分は

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^{\infty} e^{-x-s}\left(\frac{s^2}{x^2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2x}{s}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\frac{1}{x}ds \\
=&\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{\nu}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\frac{e^{-x}}{x^{\nu}}\int_0^{\infty} e^{-s}s^{2\nu-1}\left(1+\frac{2x}{s}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}ds \\
=&\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\frac{e^{-x}}{x^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\infty} e^{-s}s^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{s}{2x}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}ds
\end{aligned}$$

と変形される。命題 1 と合せると、これが示すべきものであった事が分かる。

命題 2 を $n\geq 2,\ \nu=n/2-1,\ z=\sqrt{\lambda}\ |x|,\ \sqrt{\lambda}\in D,\ x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ に対して適用する事により、ラプラシアンの積分核 E_λ の積分表示

$$\begin{aligned}
&E_\lambda(x) \\
=&\frac{2}{4\pi^{\frac{n}{2}}|x|^{n-2}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}\ |x|}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\lambda}\ |x|}{2}\right)^{1-\frac{n}{2}}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\lambda\ |x|^2}{4s}-s\right)s^{\frac{n}{2}-2}ds \\
=&\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{|x|}\right)^{\frac{n}{2}-1}\cdot\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\ |x|}}{(\sqrt{\lambda}\ |x|)^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\infty}e^{-s}s^{\frac{n-3}{2}}\left(1+\frac{s}{2\sqrt{\lambda}\ |x|}\right)^{\frac{n-3}{2}}ds \\
=&\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{2-1}{2}\right)}\cdot\frac{(\sqrt{\lambda})^{\frac{n-3}{2}}}{|x|^{\frac{n-1}{2}}}e^{-\sqrt{\lambda}\ |x|}\int_0^{\infty}e^{-s}s^{\frac{n-3}{2}}\left(1+\frac{s}{2\sqrt{\lambda}\ |x|}\right)^{\frac{n-3}{2}}ds
\end{aligned}$$

を得る。$n=3$ の場合は最後の積分は 1 に等しくなり

$$E_\lambda(x)=\frac{1}{4\pi|x|}\ e^{-\sqrt{\lambda}\ |x|}$$

となる。$E_\lambda(x)$ の挙動を知る為には最後の積分の評価が重要である。

それを補題の形に纏めて置こう。

補題１　任意の $n \geq 2$ 及び $a > 0$ に対し次の評価が成立つ：

$$\int_0^\infty e^{-s} s^{\frac{n-3}{2}} \left(1 + \frac{s}{2a}\right)^{\frac{n-3}{2}} ds \leq \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) + \Gamma(n-2) a^{\frac{3-n}{2}}\right), & n \geq 3 \\ \sqrt{\pi}, & n = 2 \end{cases}$$

(証明)　$n \geq 3$ の場合、積分区間を分けて次の様に評価する。

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-s} s \frac{n-3}{2} \left(1 + \frac{s}{2a}\right)^{\frac{n-3}{2}} ds \\ \leq\ & \int_0^a e^{-s} s^{\frac{n-3}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{n-3}{2}} ds + \int_a^\infty e^{-s} s^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{s}{a} + \frac{s}{2a}\right)^{\frac{n-3}{2}} ds \\ =\ & \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n-3}{2}} \int_0^a e^{-s} s^{\frac{n-3}{2}} ds + \left(\frac{3}{2a}\right)^{\frac{n-3}{2}} \int_a^\infty e^{-s} s^{n-3} ds \\ \leq\ & \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n-3}{2}} \min\left(\frac{2}{n-1} a^{\frac{n-1}{2}},\ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n-3}{2}} \Gamma(n-2) a^{\frac{3-n}{2}} \\ \leq\ & \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) + \ \Gamma(n-2) a^{\frac{3-n}{2}}\right) \end{aligned}$$

一方 $n = 2$ に相当する場合は次の様に評価する。

$$\int_0^\infty e^{-s} s^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{s}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} ds \leq \int_0^\infty e^{-s} s^{-1/2} ds = \sqrt{\pi}$$

これより次の命題を得る。

命題１　ラプラシアンのレゾルベントの積分核 E_λ は任意の $\sqrt{\lambda} \in D, x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ に対し次の評価を持つ：

(1)　$n = 2$ の場合

$$|E_\lambda(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{|\lambda|^{1/4} |x|^{1/2}} \exp(-\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\ |x|)$$

(2)　$n \geq 3,\ \ |\lambda|^{1/2}\ |x| \leq 1$ の場合

$$|E_\lambda(x)| \leq C_n |x|^{2-n},$$

$$C_n = \frac{3^{(n-3)/2}}{2^{n-1} \pi^{(n-1)/2}} \left(1 + \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma((n-1)/2)}\right)$$

(3)　$n \geq 3,\ |\lambda|^{1/2}\ |x| \geq 1$ の場合

$$|E_\lambda(x)| \leq C_n \frac{|\lambda|^{(n-3)/4}}{|x|^{(n-1)/2}} \exp(-\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\ |x|)$$

ここに C_n は (2) と同じ定数である。

$n = 2$ の場合、命題 2 の評価は $|\lambda|^{1/2}|x| \geq 1$ でも $|\lambda|^{1/2}|x| \leq 1$ でも共通であるが $|\lambda|^{1/2}|x| \leq 1$ に限ると次の様に精密化される。

命題 2　$n = 2$ の場合 $|\lambda|^{1/2}|x| \leq 1,\ \sqrt{\lambda} \in D$ なる任意の $\lambda \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0],\ x \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ に対し

$$|E_\lambda(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{2}{\sqrt{\mathrm{Re}\lambda}\ |x|}\right)$$

(証明)

$$E_\lambda(x) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\lambda\ |x|^2}{4s} - s\right)\frac{ds}{s}$$

を評価する。

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\mathrm{Re}\lambda\ |x|^2}{4s} - s\right)\frac{ds}{s}$$

$$= \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{s} - \frac{4s}{\mathrm{Re}\lambda\ |x|^2}\right)\frac{ds}{s}$$

$$\leq \int_0^{1/(\mathrm{Re}\lambda\ |x|^2)} \exp\left(-\frac{1}{s}\right)\frac{ds}{s} + \exp(-\mathrm{Re}\lambda\ |x|^2)\int_{1/(\mathrm{Re}\lambda\ |x|^2)}^\infty \exp\left(-\frac{4s}{\mathrm{Re}\lambda\ |x|^2}\right)\frac{ds}{s}$$

$$\leq \int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{s}\right)\frac{ds}{s} + \int_1^{1/(\mathrm{Re}\lambda\ |x|^2)} \exp\left(-\frac{1}{s}\right)\frac{ds}{s} + \exp(-\mathrm{Re}\lambda\ |x|^2)\int_1^\infty \exp(-4s)\frac{ds}{s}$$

$$\leq \int_1^\infty \exp(-t)\frac{ds}{s} + \int_1^{1/(\mathrm{Re}\lambda\ |x|^2)} \frac{ds}{s} + \exp(-\mathrm{Re}\lambda\ |x|^2)\int_1^\infty \exp(-4s)ds$$

$$\leq 1 + \log\left(\frac{1}{\mathrm{Re}\lambda\ |x|^2}\right) + \frac{1}{4}$$

より

$$|E_\lambda(x) \le \frac{1}{4\pi}\left(\frac{5}{4}+\log\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\lambda}\,|x|}\right)\right) = \frac{1}{4\pi}\log\left(\frac{e^{5/4}}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\lambda}\,|x|)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{e^{5/8}}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\lambda}\,|x|)}\right) \le \frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{2}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\lambda}\,|x|)}\right)$$

を得る。ここに $5/8 < \log 2$ は

$$\log 2 = \int_1^2 \frac{dt}{t} = \sum_{j=1}^{n}\int_{1+(j-1)/n}^{1+j/n}\frac{dt}{t}$$

$$\ge \sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n+j}\cdot\frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j}$$

に於いて $n=5$ とした

$$\begin{aligned}\log 2 &> \frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10} = \frac{1}{8}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{8}+\frac{16}{60}+\frac{16}{63}\\ &> \frac{1}{8}+\frac{16}{64}+\frac{16}{64} = \frac{5}{8}\end{aligned}$$

より従う。

参考文献：

森口繁一，宇田川銈久，一松信，数学公式 III，岩波書店
黒田成俊，スペクトル理論 II，岩波書店
小澤徹，　ユークリッド区間に於けるラプラシアンの基本解,
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/pdf/201302.pdf