リーマン球面

令和元年 10 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

二次元単位球面上の立体射影の求め方から始めて、フビニ・ステュディ計量やケーラー形式が自然に登場する過程を具体的計算によって記述し、一次元複素射影空間やホップ繊維化を経由して、複素平面の一点コンパクト化に正則同型な複素多様体としてリーマン球面を論じる。

１．二次元単位球面の複素解析構造

三次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の単位球面を

$$S^2 := \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3; |\xi|^2 := \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1\}$$

と表し $\mathbb{R}^3$ の相対位相を導入した位相空間と見做す。

北極 $\mathrm{N} := (0,0,1)$ と xy 平面 $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ の点 $(x, y, 0)$ を通る $\mathbb{R}^3$ 内の直線は

$$\ell^{\mathrm{N}}_{x,y} := \{(tx, ty, 1-t) = (1-t)\mathrm{N} + t(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3;\ t \in \mathbb{R}\}$$

で与えられる。$\ell^{\mathrm{N}}_{x,y}$ と $S^2 \setminus \{\mathrm{N}\}$ との交点 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ を $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を用いて表そう。
$\xi = (tx, ty, 1-t) \in \ell^{\mathrm{N}}_{x,y} \cap (S^2 \setminus \{\mathrm{N}\})$ を実現する $t \in \mathbb{R}$ の満たすべき条件は

$$\begin{aligned}
&1 = (tx)^2 + (ty)^2 + (1-t)^2 = t^2x^2 + t^2y^2 + 1 - 2t + t^2 \text{ 且つ } t \neq 0 \\
&\Leftrightarrow t(tx^2 + ty^2 + t - 2) = 0 \text{ 且つ } t \neq 0 \\
&\Leftrightarrow t = \frac{2}{1 + x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

であり、この $t \in \mathbb{R}$ に依り交点 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (tx, ty, 1-t)$ は

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right)$$

で与えられる。この点は

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right)^2 \\
&= \frac{4x^2 + 4y^2 + (1 + x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 2x^2y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{1 + x^4 + y^4 + 2x^2 + 2y^2 + 2x^2y^2}{(1+x^2+y^2)^2} = 1
\end{aligned}$$

より、確かに単位球面 S^2 上に在るが $t = 0$ としての $\mathrm{N} = (0,0,1)$ を実現しない。また $(x,y) = (0,0)$ に対応する点は北極 N ではなく南極 $\mathrm{S} := (0,0,-1)$ である。さて

$$t = \frac{2}{1+x^2+y^2}$$

なる関係は

- $x^2+y^2 > 1 \Leftrightarrow 0 < t < 1$
- $x^2+y^2 = 1 \Leftrightarrow t = 1$
- $0 < x^2+y^2 < 1 \Leftrightarrow 1 < t < 2$
- $x^2+y^2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

なる関係を導く。これで平面 $\mathbb{R}^2$ から $S^2 \setminus \{\mathrm{N}\}$ への写像

$$\pi_\mathrm{N} : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \pi_\mathrm{N}(x,y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right) \in S^2 \setminus \{\mathrm{N}\}$$

が定まった。π_N の逆写像を求めよう。任意に $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in S^2 \setminus \{\mathrm{N}\}$ を与え

$$\xi_1 = \frac{2x}{1+x^2+y^2},\ \xi_2 = \frac{2y}{1+x^2+y^2},\ \xi_3 = \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$$

を満たす $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ を求める。先ず

$$1 - \xi_3 = \frac{2}{1+x^2+y^2}$$

より

$$x = \frac{1+x^2+y^2}{2}\xi_1 = \frac{\xi_1}{1-\xi_3}, \quad y = \frac{1+x^2+y^2}{2}\xi_2 = \frac{\xi_2}{1-\xi_3}$$

が導かれる。そこで $\xi \in S^2 \setminus \{\mathrm{N}\}$ に対し

$$\varphi_\mathrm{N}(\xi) = \left(\frac{\xi_1}{1-\xi_3}, \frac{\xi_2}{1-\xi_3}\right)$$

と置いて $\varphi_\mathrm{N} : S^2 \setminus \{\mathrm{N}\} \to \mathbb{R}^2$ を定める。このとき

$$\begin{aligned}
&(\pi_\mathrm{N} \circ \varphi_\mathrm{N}) = \pi_\mathrm{N}\left(\frac{\xi_1}{1-\xi_3}, \frac{\xi_2}{1-\xi_3}\right) \\
&= \left(\frac{\dfrac{2\xi_1}{1-\xi_3}}{1+\left(\dfrac{\xi_1}{1-\xi_3}\right)^2+\left(\dfrac{\xi_2}{1-\xi_3}\right)^2}, \frac{\dfrac{2\xi_1}{1-\xi_3}}{1+\left(\dfrac{\xi_1}{1-\xi_3}\right)^2+\left(\dfrac{\xi_2}{1-\xi_3}\right)^2}, \frac{-1+\left(\dfrac{\xi_1}{1-\xi_3}\right)^2+\left(\dfrac{\xi_2}{1-\xi_3}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\xi_1}{1-\xi_3}\right)^2+\left(\dfrac{\xi_2}{1-\xi_3}\right)^2}\right) \\
&= \left(\frac{2\xi_1(1-\xi_3)}{(1-\xi_3)^2+\xi_1^2+\xi_2^2}, \frac{2\xi_2(1-\xi_3)}{(1-\xi_3)^2+\xi_1^2+\xi_2^2}, \frac{-(1-\xi_3)^2+\xi_1^2+\xi_2^2}{(1-\xi_3)^2+\xi_1^2+\xi_2^2},\right) \\
&= \left(\frac{2\xi_1(1-\xi_3)}{2-2\xi_3}, \frac{2\xi_2(1-\xi_3)}{2-2\xi_3}, \frac{-1+(2-2\xi)\xi_3+\xi_3^2+\xi_1^2+\xi_2^2}{2-2\xi_3}\right) \\
&= (\xi_1, \xi_2, \xi_3),
\end{aligned}$$

$$(\varphi_{\mathrm{N}} \circ \pi_{\mathrm{N}})(x,y) = \varphi_{\mathrm{N}}\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right)$$
$$= \left(\frac{2x}{(1+x^2+y^2)-(-1+x^2+y^2)}, \frac{2y}{(1+x^2+y^2)-(-1+x^2+y^2)}\right)$$
$$= (x,y)$$

となる。これより

$$\begin{aligned}
&\pi_{\mathrm{N}} \circ \varphi_{\mathrm{N}} = \mathrm{id}_{S^2\setminus\{\mathrm{N}\}},\ \varphi_{\mathrm{N}} \circ \pi_{\mathrm{N}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\\
&\varphi_{\mathrm{N}}(S^2 \setminus \{\mathrm{N}\}) = \mathbb{R}^2,\ \varphi_{\mathrm{N}}(S^2 \setminus \{\mathrm{N},\mathrm{S}\}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\\
&\pi_{\mathrm{N}}(\mathbb{R}^2) = S^2 \setminus \{\mathrm{N}\},\ \pi_{\mathrm{N}}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = S^2 \setminus \{\mathrm{N},\mathrm{S}\}\\
&(\pi_{\mathrm{N}} \circ \varphi_{\mathrm{N}})(S^2 \setminus \{\mathrm{N}\}) = S^2 \setminus \{\mathrm{N}\},\ (\pi_{\mathrm{N}} \circ \varphi_{\mathrm{N}})(S^2 \setminus \{\mathrm{N},\mathrm{S}\}) = S^2 \setminus \{\mathrm{N},\mathrm{S}\},\\
&(\varphi_{\mathrm{N}} \circ \pi_{\mathrm{N}})(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2,\ (\varphi_{\mathrm{N}} \circ \pi_{\mathrm{N}})(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}
\end{aligned}$$

を得る。

南極 $\mathrm{S} = (0,0,-1)$ と xy 平面 $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ の点 $(x,y,0)$ を通る $\mathbb{R}^3$ 内の直線は

$$\ell^{\mathrm{S}}_{x,y} := \{(tx, ty, t-1) = (1-t)\mathrm{S} + t(x,y,0) \in \mathbb{R}^3; t \in \mathbb{R}\}$$

で与えられる。$\ell^{\mathrm{S}}_{x,y}$ と $S^2 \setminus \{\mathrm{S}\}$ との交点 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ を $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ を用いて表そう。
$\xi = (tx, ty, t-1) \in \ell^{\mathrm{S}}_{x,y} \cap (S^2 \setminus \{\mathrm{S}\})$ を実現する $t \in \mathbb{R}$ の満たすべき条件は

$$\begin{aligned}
&1 = (tx)^2 + (ty)^2 + (t-1)^2 \text{ 且つ } t \neq 0\\
\Leftrightarrow\ & t = \frac{2}{1+x^2+y^2}
\end{aligned}$$

であり、この $t \in \mathbb{R}$ に依り交点 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (tx, ty, t-1)$ は

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right)$$

で与えられ、単位球面 S^2 上の点となるが $t = 0$ としての $\mathrm{S} = (0,0,-1)$ を実現しない。
また $(x,y) = (0,0)$ に対応する点は南極 S ではなく北極 $\mathrm{N} = (0,0,1)$ である。これで平面 $\mathbb{R}^2$ から $S^2 \setminus \{\mathrm{S}\}$ への写像

$$\pi_{\mathrm{S}} : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \pi_{\mathrm{S}}(x,y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right) \in S^2 \setminus \{\mathrm{S}\}$$

が定まった。π_{S} の逆写像を求めよう。任意に $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in S^2 \setminus \{\mathrm{S}\}$ を与え

$$\xi_1 = \frac{2x}{1+x^2+y^2},\ \xi_2 = \frac{2y}{1+x^2+y^2},\ \xi_3 = \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$$

を満たす $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ を求める。先ず

$$1 + \xi_3 = \frac{2}{1+x^2+y^2}$$

より

$$x=\frac{1+x^2+y^2}{2}\xi_1=\frac{\xi_1}{1+\xi_3},\quad y=\frac{1+x^2+y^2}{2}\xi_2=\frac{\xi_2}{1+\xi_3}$$

が導かれる。そこで $\xi\in S^2\setminus\{\mathrm{S}\}$ に対し

$$\varphi_{\mathrm{S}}(\xi)=\left(\frac{\xi_1}{1+\xi_3},\frac{\xi_2}{1+\xi_3}\right)$$

と置いて $\varphi_{\mathrm{S}}(\xi):S^2\setminus\{\mathrm{S}\}\to\mathbb{R}^2$ を定める。このとき

$$\begin{aligned}
&(\pi_{\mathrm{S}}\circ\varphi_{\mathrm{S}})(\xi)=\pi_{\mathrm{S}}\left(\frac{\xi_1}{1+\xi_3},\frac{\xi_2}{1+\xi_3}\right)\\
&=\left(\frac{\frac{2\xi_1}{1+\xi_3}}{1+\left(\frac{\xi_1}{1+\xi_3}\right)^2+\left(\frac{\xi_2}{1+\xi_3}\right)^2},\frac{\frac{2\xi_1}{1+\xi_3}}{1+\left(\frac{\xi_1}{1+\xi_3}\right)^2+\left(\frac{\xi_2}{1+\xi_3}\right)^2},\frac{1-\left(\frac{\xi_1}{1+\xi_3}\right)^2-\left(\frac{\xi_2}{1+\xi_3}\right)^2}{1+\left(\frac{\xi_1}{1+\xi_3}\right)^2+\left(\frac{\xi_2}{1+\xi_3}\right)^2}\right)\\
&=\left(\frac{2\xi_1(1+\xi_3)}{(1+\xi_3)^2+\xi_1^2+\xi_2^2},\frac{2\xi_2(1+\xi_3)}{(1+\xi_3)^2+\xi_1^2+\xi_2^2},\frac{(1+\xi_3)^2-\xi_1^2-\xi_2^2}{(1+\xi_3)^2+\xi_1^2+\xi_2^2},\right)\\
&=\left(\frac{2\xi_1(1+\xi_3)}{2+2\xi_3},\frac{2\xi_2(1+\xi_3)}{2+2\xi_3},\frac{1+(2+2\xi)\xi_3-\xi_3^2-\xi_1^2-\xi_2^2}{2+2\xi_3}\right)\\
&=(\xi_1,\xi_2,\xi_3),\\
&(\varphi_{\mathrm{S}}\circ\pi_{\mathrm{S}})(x,y)=\varphi_{\mathrm{S}}\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2},\frac{2y}{1+x^2+y^2},\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right)\\
&=\left(\frac{2x}{(1+x^2+y^2)+(1-x^2-y^2)},\frac{2y}{(1+x^2+y^2)+(1-x^2-y^2)}\right)\\
&=(x,y)
\end{aligned}$$

となる。これより

$$\begin{aligned}
&\pi_{\mathrm{S}}\circ\varphi_{\mathrm{S}}=\mathrm{id}_{S^2\setminus\{\mathrm{S}\}},\ \varphi_{\mathrm{S}}\circ\pi_{\mathrm{S}}=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\\
&\varphi_{\mathrm{S}}(S^2\setminus\{\mathrm{S}\})=\mathbb{R}^2,\ \varphi_{\mathrm{S}}(S^2\setminus\{\mathrm{N},\mathrm{S}\})=\mathbb{R}^2\setminus\{0\},\\
&\pi_{\mathrm{S}}(\mathbb{R}^2)=S^2\setminus\{\mathrm{S}\},\ \pi_{\mathrm{S}}(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})=S^2\setminus\{\mathrm{N},\mathrm{S}\}\\
&(\pi_{\mathrm{S}}\circ\varphi_{\mathrm{S}})(S^2\setminus\{\mathrm{S}\})=S^2\setminus\{\mathrm{S}\},(\pi_{\mathrm{S}}\circ\varphi_{\mathrm{S}})(S^2\setminus\{\mathrm{N},\mathrm{S}\})=S^2\setminus\{\mathrm{N},\mathrm{S}\}\\
&(\varphi_{\mathrm{S}}\circ\pi_{\mathrm{S}})(\mathbb{R}^2)=\mathbb{R}^2,\ (\varphi_{\mathrm{S}}\circ\pi_{\mathrm{S}})(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})=\mathbb{R}^2\setminus\{0\}
\end{aligned}$$

を得る。さて $\varphi_{\mathrm{S}}\circ(\varphi_{\mathrm{N}}|S^2\setminus\{\mathrm{N},\mathrm{S}\})^{-1}:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^2$ は具体的に

$$\begin{aligned}
&\left(\varphi_{\mathrm{S}}\circ(\varphi_{\mathrm{N}}|S^2\setminus\{\mathrm{N},\mathrm{S}\})^{-1}\right)(x,y)\\
&=\varphi_{\mathrm{S}}\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2},\frac{2y}{1+x^2+y^2},\frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right)\\
&=\left(\frac{2x}{(1+x^2+y^2)+(-1+x^2+y^2)},\frac{2y}{(1+x^2+y^2)+(-1+x^2+y^2)}\right)\\
&=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)
\end{aligned}$$

で与えられる。この第一成分及び第二成分を与える函数を夫々u及びvとすると

$$
\partial_x u = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},\ \partial_y u = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}
$$
$$
\partial_x v = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\ \partial_y v = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}
$$

となるから$f := u+iv$は

$$
\begin{aligned}
\partial_z f &= \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)(u+iv) = \frac{1}{2}\left((\partial_x u + \partial_y v) + i(\partial_x v - \partial_y u)\right) = 0 \\
\partial_{\bar{z}} f &= \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(u+iv) = \frac{1}{2}\left((\partial_x u - \partial_y v) + i(\partial_x v + \partial_y u)\right) \\
&= \partial_x(u+iv) = \partial_x f = f'
\end{aligned}
$$

を満たし$\varphi_{\mathrm{S}} \circ (\varphi_{\mathrm{N}}|S^2 \setminus \{\mathrm{N},\mathrm{S}\})^{-1}$は複素函数$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$として反正則となる。$S^2$には二つの開集合$U_\pm := S^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\}$及び$U_\pm$を定義域とする$\varphi_{\mathrm{N}}, \varphi_{\mathrm{S}}$により地図帳$\{(U_+, \varphi_{\mathrm{N}}), (U_-, \varphi_{\mathrm{S}})\}$が定まり微分可能構造が導入されるが、複素解析構造とはならない。そこで南極に対し$(x,y,0)$を結ぶ直線$\ell^{\mathrm{S}}_{x,y}$を（その複素共軛に相当する）$(x,-y,0)$を結ぶ直線$\ell^{\mathrm{S}}_{x,-y}$に置き換え、新たに

$$
\pi_- : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \pi_-(x,y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{-2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right) \in U_-
$$
$$
\varphi_- : U_- \ni (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \mapsto \varphi_-(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \left(\frac{\xi_1}{1+\xi_3}, \frac{-\xi_2}{1+\xi_3}\right) \in \mathbb{R}^2
$$

を導入し$\pi_+ = \pi_{\mathrm{N}},\ \varphi_+ = \varphi_{\mathrm{N}}$と表す事にする。このとき

$$
\begin{aligned}
&\pi_\pm \circ \varphi_\pm = \mathrm{id}_{U_\pm},\ \varphi_\pm \circ \pi_\pm = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \\
&\varphi_\pm(U_\pm) = \mathbb{R}^2,\ \varphi_\pm(U_+ \cap U_-) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\
&\pi_\pm(\mathbb{R}^2) = U_\pm,\ \pi_\pm(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = U_+ \cap U_- \\
&(\pi_\pm \circ \varphi_\pm)(U_\pm) = U_\pm, (\pi_\pm \circ \varphi_\pm)(U_+ \cap U_-) = U_+ \cap U_- \\
&(\varphi_\pm \circ \pi_\pm)(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2,\ (\varphi_\pm \circ \pi_\pm)(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \\
&(\varphi_\pm \circ (\varphi_\mp|U_+ \cap U_-)^{-1})(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right), (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}
\end{aligned}
$$

が従う。特に$\varphi_\pm \circ (\varphi_\mp|U_+ \cap U_-)^{-1}$は複素函数として

$$
\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}
$$

と見做せば$\mathbb{C} \setminus \{0\}$上の双正則写像となり、地図帳$\{(U_+, \varphi_+), (U_-, \varphi_-)\}$は$S^2$に複素解析構造を与える。この複素解析構造を持った単位球面S^2を**リーマン球面** (Riemann sphere) と謂う。

$\varphi_\pm$ を複素数値函数

$$\varphi_\pm : U_\pm \ni \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto \varphi_\pm(\xi) = \frac{\xi_1 \pm i\xi_2}{1 \mp \xi_3} \in \mathbb{C}$$

と見做すと $U_+ \cap U_-$ 上の等式

$$\varphi_+(\xi)\varphi_-(\xi) = \frac{\xi_1 + i\xi_2}{1-\xi_3}\,\frac{\xi_1 - i\xi_2}{1+\xi_3} = \frac{\xi_1^2+\xi_2^2}{1-\xi_3^2} = 1$$

が直ちに従う。$\pi_\pm$ を $\mathbb{C}$ から S^2 への写像

$$\pi_\pm : \mathbb{C} \ni z \mapsto \pi_\pm(z) = \left(\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}, \mp i\frac{z-\bar{z}}{1+|z|^2}, \mp\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right) \in S^2$$

と見做す事も出来る。このとき $z, w \in \mathbb{C}$ に対し

$$\pi_\pm(z)\cdot\pi_\pm(w) = \frac{(z+\bar{z})(w+\bar{w}) - (z-\bar{z})(w-\bar{w}) + (1-|z|^2)(1-|w|^2)}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}$$

$$= \frac{2z\bar{w} + 2\bar{z}w + 1 - |z|^2 - |w|^2 + |z|^2|w|^2}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}$$

$$= \frac{(1+|z|^2+|w|^2+|z|^2|w|^2) - 2(|z|^2+|w|^2 - z\bar{w} - \bar{z}w)}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}$$

$$= 1 - \frac{2|z-w|^2}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}$$

より

$$\begin{aligned}|\pi_\pm(z) - \pi_\pm(w)| &= \left(|\pi_\pm(z)|^2 - 2\pi_\pm(z)\cdot\pi_\pm(w) + |\pi_\pm(w)|^2\right)^{1/2} \\ &= (2 - 2\pi_\pm(z)\cdot\pi_\pm(w))^{1/2} \\ &= \frac{2|z-w|}{(1+|z|^2)^{1/2}(1+|w|^2)^{1/2}}\end{aligned}$$

が得られる。

２．二次元単位球面に於けるフビニ・ステュディ計量とケーラー形式

前節に引き続き二次元単位球面 S^2 を三次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ から相対位相を導入した位相空間であり地図帳 $\{(U_+, \varphi_+), (U_-, \varphi_-)\}$ を備えた微分可能多様体或いは複素解析多様体と見做して議論する。多様体 M 上の接バンドル $TM \to M$ に対し、テンソル積バンドル $TM \otimes TM$ の双対バンドル $(TM \otimes TM)^*$ が定まる。その中でも対称正定値な $(TM \otimes TM)^*$ の切断をリーマン計量と謂う。本節では

$$\varphi_\pm : U_\pm \ni \xi \longmapsto \varphi_\pm(\xi) = \frac{\xi_1 \pm i\xi_2}{1 \mp \xi_3} \in \mathbb{C}$$

及びその複素共軛

$$\overline{\varphi}_\pm : U_\pm \ni \xi \longmapsto \overline{\varphi}_\pm(\xi) = \frac{\xi_1 \mp i\xi_2}{1 \mp \xi_3} \in \mathbb{C}$$

の一次微分形式を基礎としてリーマン計量を求めよう。通常の様に $\mathbb{R}^3$ の双対標準基底から定まる座標の一次微分形式を $d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3$ と表す。このとき

$$d\varphi_\pm = \frac{1}{1 \mp \xi_3}(d\xi_1 \pm i d\xi_2) \pm \frac{\xi_1 \pm i\xi_2}{(1 \mp \xi_3)^2} d\xi_3$$
$$d\overline{\varphi}_\pm = \frac{1}{1 \mp \xi_3}(d\xi_1 \mp i d\xi_2) \pm \frac{\xi_1 \mp i\xi_2}{(1 \mp \xi_3)^2} d\xi_3$$

を得る。$U_\pm$ 上で

$$\begin{aligned}
& d\varphi_\pm \otimes d\overline{\varphi}_\pm \\
= & \frac{1}{(1 \mp \xi_3)^2}(d\xi_1 \pm i d\xi_2) \otimes (d\xi_1 \mp i d\xi_2) \pm \frac{\xi_1 \mp i\xi_2}{(1 \mp \xi_3)^3}(d\xi_1 \pm i d\xi_2) \otimes d\xi_3 \\
& \pm \frac{\xi_1 \pm i\xi_2}{(1 \mp \xi_3)^3} d\xi_3 \otimes (d\xi_1 \mp i d\xi_2) + \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{(1 \mp \xi_3)^4} d\xi_3 \otimes d\xi_3 \\
= & \frac{1}{(1 \mp \xi_3)^2}\left(d\xi_1 \otimes d\xi_1 + d\xi_2 \otimes \xi_2 \mp i(d\xi_1 \otimes d\xi_2 - d\xi_2 \otimes d\xi_1)\right) \\
& \pm \frac{1}{(1 \mp \xi_3)^3}(\xi_1 d\xi_1 + \xi_2 d\xi_2) \otimes d\xi_3 - \frac{i}{(1 \mp \xi_3)^3}(\xi_2 d\xi_1 - \xi_1 d\xi_2) \otimes d\xi_3 \\
& \pm \frac{1}{(1 \mp \xi_3)^3} d\xi_3 \otimes (\xi_1 d\xi_1 + \xi_2 d\xi_2) + \frac{i}{(1 \mp \xi_3)^3} d\xi_3 \otimes (\xi_2 d\xi_1 - \xi_1 d\xi_2) \\
& + \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{(1 \mp \xi_3)^4} d\xi_3 \otimes d\xi_3
\end{aligned}$$

を得る。ここで $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$ より導かれる等式

$$\begin{aligned}
& \xi_1 d\xi_1 + \xi_2 d\xi_2 = -\xi_3 d\xi_3, \\
& \mp 2(1 \mp \xi_3)\xi_3 + \xi_1^2 + \xi_2^2 = \mp 2\xi_3 + 2\xi_3^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 = \mp 2\xi_3 + \xi_3^2 + 1 = (1 \mp \xi_3)^2
\end{aligned}$$

を用いると

$$
\begin{aligned}
& d\varphi_\pm \otimes d\overline{\varphi}_\pm \\
= & \frac{1}{(1 \mp \xi_3)^2} \left(d\xi_1 \otimes d\xi_1 + d\xi_2 \otimes \xi_2 + d\xi_2 \otimes \xi_2 \right) \\
& \mp \frac{i}{(1 \mp \xi_3)^2} \left(d\xi_1 \otimes d\xi_2 - d\xi_2 \otimes d\xi_1 \right) \\
& + \frac{i\xi_1}{(1 \mp \xi_3)^3} \left(d\xi_2 \otimes d\xi_3 - d\xi_3 \otimes d\xi_2 \right) + \frac{i\xi_2}{(1 \mp \xi_3)^3} \left(d\xi_3 \otimes d\xi_1 - d\xi_1 \otimes d\xi_3 \right)
\end{aligned}
$$

が従う。更に

$$
1 + |\varphi_\pm|^2 = 1 + \varphi_\pm \overline{\varphi}_\pm = 1 + \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{(1 \mp \xi_3)^3} = \frac{(1 \mp 2\xi_3 + \xi_3^2) + \xi_1^2 + \xi_2^2}{(1 \mp \xi_3)^2} = \frac{2}{1 \mp \xi_3}
$$

を用いると $d\varphi_\pm \otimes d\overline{\varphi}_\pm$ の対称化

$$
d\varphi_\pm \odot d\overline{\varphi}_\pm := \frac{1}{2} \left(d\varphi_\pm \otimes d\overline{\varphi}_\pm + d\overline{\varphi}_\pm \otimes d\varphi_\pm \right)
$$

は

$$
d\varphi_\pm \odot d\overline{\varphi}_\pm = \frac{1}{4(1 + |\varphi_\pm|^2)^2} (d\xi_1 \otimes d\xi_1 + d\xi_2 \otimes d\xi_2 + d\xi_3 \otimes d\xi_3)
$$

で与えられる。即ち三次元ユークリッド空間に於ける標準的リーマン計量の二次元単位球面への引き戻し或いは制限としての内在的表現（**フビニ・ステュディ計量** Fubini-Study metric）

$$
d\xi_1 \otimes d\xi_1 + d\xi_2 \otimes d\xi_2 + d\xi_3 \otimes d\xi_3 = \frac{4}{(1 + |\varphi_\pm|^2)^2} \, d\varphi_\pm \odot d\overline{\varphi}_\pm
$$

が導かれた。右辺が $U_+ \cap U_-$ 上一致する事は

$$
\begin{aligned}
& d\varphi_+ = d\left(\frac{1}{\varphi_-} \right) = -\frac{1}{\varphi_-^2} d\varphi_-, \ d\overline{\varphi}_+ = d\left(\frac{1}{\overline{\varphi}_-} \right) = -\frac{1}{\overline{\varphi}_-^2} d\overline{\varphi}_-, \\
& 1 + |\varphi_+|^2 = 1 + \frac{1}{|\varphi_-|^2} = \frac{1 + |\varphi_-|^2}{|\varphi_-|^2}
\end{aligned}
$$

を用いて

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{(1 + |\varphi_+|^2)^2} \, d\varphi_+ \odot d\overline{\varphi}_+ &= \frac{4|\varphi_-|^4}{(1 + |\varphi_-|^2)^2} \left(-\frac{1}{\varphi_-^2} d\varphi_- \right) \odot \left(-\frac{1}{\overline{\varphi}_-^2} d\overline{\varphi}_- \right) \\
&= \frac{4}{(1 + |\varphi_-|^2)^2} d\varphi_- \odot d\overline{\varphi}_-
\end{aligned}
$$

となる事より従う。

二次元単位球面 S^2 を地図帳 $\{(U_+,\varphi_+),(U_-,\varphi_-)\}$ を備えた複素多様体と見做して、以下では通常の様に φ_+ 及び φ_- を複素変数に依る座標系として単に z 及び w と表す事にする。このときフビニ・ステュディ計量は U_+ 上で $\dfrac{4}{(1+|z|^2)^2}\,dz\odot d\bar{z}, U_-$ 上で $\dfrac{4}{(1+|w|^2)^2}\,dz\odot d\bar{w}$ と表され $U_+\cap U_-$ 上で等しいものとなる。

さて $K:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ を $K(\zeta)=\log(1+|\zeta|^2)$ で与えられるものとして U_+ 及び U_- 上の二形式 ω_+ 及び ω_- を

$$\omega_\pm = 4i\partial\bar{\partial}(\varphi_\pm^* K)$$

で定義する。このとき

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}(\varphi_+^* K) &= \frac{z}{1+|z|^2}\,d\bar{z},\\
\partial\bar{\partial}(\varphi_+^* K) &= \frac{1}{(1+|z|^2)^2}\big((1+|z|^2)-z\bar{z}\big)\,dz\wedge d\bar{z} = \frac{1}{(1+|z|^2)^2}\,dz\wedge d\bar{z}
\end{aligned}$$

となるから ω_+ の U_+ 上の座標表示

$$\omega_+ = \frac{4i}{(1+|z|^2)^2}\,dz\wedge d\bar{z}$$

が得られ、全く同様な計算で ω_- の U_- 上の座標表示

$$\omega_- = \frac{4i}{(1+|w|^2)^2}\,dw\wedge d\bar{w}$$

が得られる。両者は $U_+\cap U_-$ 上一致する：

$$\begin{aligned}
\omega_+|U_+\cap U_- &= \frac{4i}{\left(1+\left|\dfrac{1}{w}\right|^2\right)^2}\,d\left(\frac{1}{w}\right)\wedge d\left(\frac{1}{\bar{w}}\right)\\
&= \frac{4i|w|^4}{(|w|^2+1)^2}\left(-\frac{1}{w^2}dw\right)\wedge\left(-\frac{1}{\bar{w}^2}d\bar{w}\right) = \omega_-|U_+\cap U_-
\end{aligned}$$

また ω_+ 及び ω_- は閉じている：

$$\begin{aligned}
d\omega_+ &= 4i\left(\partial_z\left(\frac{1}{(1+|z|^2)}\right)^2 dz + \partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{(1+|z|^2)}\right)^2 d\bar{z}\right)\wedge dz\wedge d\bar{z} = 0,\\
d\omega_- &= 4i\left(\partial_w\left(\frac{1}{(1+|w|^2)}\right)^2 dw + \partial_{\bar{w}}\left(\frac{1}{(1+|w|^2)}\right)^2 d\bar{w}\right)\wedge dw\wedge d\bar{w} = 0
\end{aligned}$$

この意味で S^2 はケーラー形式 $\omega_\pm$ を備えたケーラー多様体を成す。

３．一次元複素射影空間

$\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ の乗法群 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に因る作用

$$c : \zeta = (\zeta_0, \zeta_1) \mapsto c\zeta := (c\zeta_0, c\zeta_1)$$

に基づく関係

$$\zeta \sim \zeta' \underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \exists c \in \mathbb{C}^* : \zeta' = c\zeta$$

は $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ の同値関係を成す。$\mathbb{C}^*$ の $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ 上の作用による商空間 $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ 言い換えれば $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ を同値関係 $\sim$ で割った商空間 $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\sim$ を一次元複素射影空間と謂い $\mathbb{P}$ で表し、付随する商写像を

$$\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \ni \zeta \mapsto \pi(\zeta) := \{\zeta' \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\};\ \zeta' \sim \zeta\} \in \mathbb{P}$$

とする。$\mathbb{P}$ には π に依る商位相、即ち $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}$ を連続とする最強位相を与えて位相空間と見做す。さて $\mathbb{P}$ の部分集合 $V_\pm$ を

$$V_- := \{\pi(\zeta_0, \zeta_1) \in \mathbb{P}; \zeta_0 \neq 0\}$$
$$V_+ := \{\pi(\zeta_0, \zeta_1) \in \mathbb{P}; \zeta_1 \neq 0\}$$

とし $\psi_\pm : V_\pm \to \mathbb{C}$ を

$$\psi_- \left(\pi(\zeta_0, \zeta_1)\right) := \frac{\zeta_1}{\zeta_0}, \quad \psi_+ \left(\pi(\zeta_0, \zeta_1)\right) := \frac{\zeta_0}{\zeta_1}$$

と定義する。$\psi_\pm$ は代表元の取り方に依らずに定まる。定義より $\mathbb{P} = V_+ \cup V_-$ であり $V_+ \cap V_-$ 上で等式

$$\psi_+ \left(\pi(\zeta_0, \zeta_1)\right) \psi_- \left(\pi(\zeta_0, \zeta_1)\right) = 1$$

が成立つ。$(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}$ 及び $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ は $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ の開集合で

$$V_- = \pi\left((\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}\right), \quad V_+ = \pi\left(\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})\right)$$

と表されるので V_+ 及び V_- は $\mathbb{P}$ の開集合である。
任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し

$$\psi_- \left(\pi(1, z)\right) = z = \psi_+ \left(\pi(z, 1)\right)$$

より $\psi_\pm$ は全射である。$\psi_\pm$ が単射である事を示そう。
$\pi(\zeta_0, \zeta_1), \pi(\zeta_0', \zeta_1') \in V_-$ は $\psi_- \left(\pi(\zeta_0, \zeta_1)\right) = \psi_- \left(\pi(\zeta_0', \zeta_1')\right)$ を満たすものとすると $\zeta_0, \zeta_0' \neq 0$ であり

$$\begin{aligned}\frac{\zeta_1}{\zeta_0} = \frac{\zeta_1'}{\zeta_0'} &\Leftrightarrow (\zeta_0', \zeta_1') = \frac{\zeta_0'}{\zeta_0}(\zeta_0, \zeta_1) \\ &\Rightarrow (\zeta_0', \zeta_1') \sim (\zeta_0, \zeta_1) \\ &\Leftrightarrow \pi(\zeta_0, \zeta_1) = \pi(\zeta_0', \zeta_1')\end{aligned}$$

となる。また $\pi(\zeta_0,\zeta_1),\pi(\zeta_0',\zeta_1')\in V_+$ は $\psi_+\left(\pi(\zeta_0,\zeta_1)\right)=\psi_+\left(\pi(\zeta_0',\zeta_1')\right)$ を満たすものとすると $\zeta_0,\zeta_0'\neq 0$ であり

$$
\begin{aligned}
\frac{\zeta_0}{\zeta_1}=\frac{\zeta_0'}{\zeta_1'} &\Leftrightarrow (\zeta_0',\zeta_1')=\frac{\zeta_1'}{\zeta_1}(\zeta_0,\zeta_1)\\
&\Leftrightarrow (\zeta_0',\zeta_1')\sim(\zeta_0,\zeta_1)\\
&\Leftrightarrow \pi(\zeta_0,\zeta_1)=\pi(\zeta_0',\zeta_1')
\end{aligned}
$$

となる。以上より $\psi_\pm:V_\pm\to\mathbb{C}$ は全単射であり（π が開写像である事から）同相写像である事が分かる。

任意に $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ を取る。このとき $\pi(z,1)\in V_+\cap V_-$ であり

$$
z=\psi_+\left(\pi(z,1)\right)=\frac{1}{\psi_-\left(\pi(z,1)\right)}
$$

より

$$
\left(\psi_-\circ(\psi_+|V_+\cap V_-)^{-1}\right)(z)=\psi_-\left(\pi(z,1)\right)=\frac{1}{z}
$$

が従う。一方 $\pi(1,z)\in V_+\cap V_-$ であり

$$
z=\psi_-\left(\pi(1,z)\right)=\frac{1}{\psi_+\left(\pi(1,z)\right)}
$$

より

$$
\left(\psi_+\circ(\psi_-|V_+\cap V_-)^{-1}\right)(z)=\psi_+\left(\pi(1,z)\right)=\frac{1}{z}
$$

が従う。$\psi_+(V_+\cap V_-)=\psi_-(V_+\cap V_-)=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ であるから $\{(V_+,\psi_+),(V_-,\psi_-)\}$ は $\mathbb{P}$ に複素解析構造を与える地図帳となる。

さて第 1 節で $U_\pm=S^2\setminus\{(0,0,\pm1)\}$ 上の函数

$$
\varphi_\pm:U_\pm\ni\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\mapsto\frac{\xi_1\pm i\xi_2}{1\mp\xi_3}\in\mathbb{C}
$$

及びその逆写像

$$
\pi_\pm:\mathbb{C}\ni z\mapsto\left(\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2},\mp i\frac{z-\bar{z}}{1+|z|^2},\mp\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right)\in S^2
$$

を導入した。$\xi\in S^2$ に対し

$$
(\xi_1+i\xi_2)(\xi_1-i\xi_2)=\xi_1^2+\xi_2^2=1-\xi_3^2=(1+\xi_3)(1-\xi_3)
$$

であるから U_+ 上で

$$
\frac{\xi_1+i\xi_2}{1-\xi_3}=\frac{1+\xi_3}{\xi_1-i\xi_2}
$$

が成立ち U_- 上で

$$
\frac{\xi_1-i\xi_2}{1+\xi_3}=\frac{1-\xi_3}{\xi_1+i\xi_2}
$$

が成立つ。そこで $\xi \in S^2 = U_+ \cup U_-$ に対し

$$f(\xi) = \begin{cases} \pi(\xi_1 + i\xi_2, 1 - \xi_3), & \xi \in U_+ \\ \pi(1 + \xi_3, \xi_1 - i\xi_2), & \xi \in U_- \end{cases}$$

と置くと $U_+ \cap U_-$ 上 $\pi(\xi_1 + i\xi_2, 1 - \xi_3) = \pi(1 + \xi_3, \xi_1 - i\xi_2)$ 故 $f : S^2 \ni \xi \mapsto f(\xi) \in \mathbb{P}$ が定まる。定義より $f(U_\pm) \subset V_\pm$ が従う。さて $z \in \mathbb{C}$ に対し $\varphi_\pm^{-1}(z) = \pi_\pm(z) \in U_\pm$ であり

$$\begin{aligned}
&(\psi_\pm \circ f \circ \varphi_\pm^{-1})(z) \\
&= (\psi_\pm \circ f)\left(\frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, \mp i\frac{z - \bar{z}}{1 + |z|^2}, \mp\frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2}\right) \\
&= \begin{cases} \psi_+\left(\pi\left(\dfrac{2z}{1 + |z|^2}, \dfrac{2}{1 + |z|^2}\right)\right) \\ \psi_-\left(\pi\left(\dfrac{2}{1 + |z|^2}, \dfrac{2z}{1 + |z|^2}\right)\right) \end{cases} \\
&= z
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
S^2 \supset U_\pm \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, shift left, "\varphi_\pm"] & V_\pm \subset \mathbb{P} \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \arrow[d, shift left, "\psi_\pm"] \\
\mathbb{C} \arrow[u, shift left, "\pi_\pm"] \arrow[r, equal, "\mathrm{id}"'] & \mathbb{C} \arrow[u, shift left, "\psi_\pm^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

となるので $\psi_\pm \circ f \circ \varphi_\pm^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ 更には $\varphi_\pm \circ f^{-1} \circ \psi_\pm^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, $f(U_\pm) = V_\pm, U_\pm = f^{-1}(V_\pm)$ が成立つ。特に f は複素多様体 S^2 と $\mathbb{P}$ との正則同型写像となる。

さて $(\zeta_0, \zeta_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ に対し $\zeta_0 \neq 0$ ならば

$$\begin{aligned}
&(f^{-1} \circ \pi)(\zeta_0, \zeta_1) = (f^{-1} \circ \psi_-^{-1})\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_0}\right) \\
&= \varphi_-^{-1}\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_0}\right) \\
&= \left(\frac{\dfrac{\zeta_1}{\zeta_0} + \dfrac{\bar{\zeta}_1}{\bar{\zeta}_0}}{1 + \left|\dfrac{\zeta_1}{\zeta_0}\right|^2}, i\frac{\dfrac{\zeta_1}{\zeta_0} - \dfrac{\bar{\zeta}_1}{\bar{\zeta}_0}}{1 + \left|\dfrac{\zeta_1}{\zeta_0}\right|^2}, \frac{1 - \left|\dfrac{\zeta_1}{\zeta_0}\right|^2}{1 + \left|\dfrac{\zeta_1}{\zeta_0}\right|^2}\right) \\
&= \frac{1}{|\zeta_0|^2 + |\zeta_1|^2}\left(\bar{\zeta}_0\zeta_1 + \zeta_0\bar{\zeta}_1, i(\bar{\zeta}_0\zeta_1 - \zeta_0\bar{\zeta}_1), |\zeta_0|^2 - |\zeta_1|^2\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "g"] & \\
\mathbb{P} \arrow[r, shift left, "f^{-1}"] & S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \arrow[l, shift left, "f"]
\end{tikzcd}$$

$\zeta_0 \neq 0$ ならば

$$\begin{aligned}
&(f^{-1} \circ \pi)(\zeta_0, \zeta_1) = (f^{-1} \circ \psi_+^{-1})\left(\frac{\zeta_0}{\zeta_1}\right) \\
&= \varphi_+^{-1}\left(\frac{\zeta_0}{\zeta_1}\right) \\
&= \left(\frac{\dfrac{\zeta_0}{\zeta_1} + \dfrac{\bar{\zeta}_0}{\bar{\zeta}_1}}{1 + \left|\dfrac{\zeta_0}{\zeta_1}\right|^2}, -i\frac{\dfrac{\zeta_0}{\zeta_1} - \dfrac{\bar{\zeta}_0}{\bar{\zeta}_1}}{1 + \left|\dfrac{\zeta_0}{\zeta_1}\right|^2}, -\frac{1 - \left|\dfrac{\zeta_0}{\zeta_1}\right|^2}{1 + \left|\dfrac{\zeta_0}{\zeta_1}\right|^2}\right) \\
&= \frac{1}{|\zeta_0|^2 + |\zeta_1|^2}\left(\bar{\zeta}_0\zeta_1 + \zeta_0\bar{\zeta}_1, i(\bar{\zeta}_0\zeta_1 - \zeta_0\bar{\zeta}_1), |\zeta_0|^2 - |\zeta_1|^2\right)
\end{aligned}$$

となり、どちらの場合にも同じ表示を与える。そこで $g:\mathbb{C}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^3$ を

$$g(\zeta_0,\zeta_1)=\frac{1}{|\zeta_0|^2+|\zeta_1|^2}\left(\bar{\zeta}_0\zeta_1+\zeta_0\bar{\zeta}_1, i(\bar{\zeta}_0\zeta_1-\zeta_0\bar{\zeta}_1), |\zeta_0|^2-|\zeta_1|^2\right)$$

と定義すれば $g(\mathbb{C}^2\setminus\{0\})=S^2$ であり $g=f^{-1}\circ\pi, f\circ g=\pi$ が成立つ。

さて $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ と同一視し、二次元及び三次元単位球面を

$$\begin{aligned}S^2&=\{(z,t)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R};\ |z|^2+t^2=1\}\\ S^3&=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2;\ |z|^2+|w|^2=1\}\end{aligned}$$

と捉え直し $g:\mathbb{C}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^3$ の S^3 上への制限 $h:=g|S^3:S^3\to\mathbb{R}^3$ の性質を調べよう。定義より $(z,w)\in S^3$ に対し

$$h(z,w)=(2z\bar{w}, |z|^2-|w|^2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$$

であり

$$\begin{aligned}|2z\bar{w}|^2+\left(|z|^2-|w|^2\right)^2&=4|z|^2|\bar{w}|^2+\left(|z|^4-2|z|^2|w|^2+|w|^4\right)\\ &=\left(|z|^2+|w|^2\right)^2=1\end{aligned}$$

より $h(S^3)\subset S^2$ となる。一方 $(z,t)\in S^2$ に対し $z=0$ なら $t=\pm1$ であり

$$\begin{aligned}&(1,0)\in\mathbb{C}^2\text{とすれば}(1,0)\in S^3\text{且つ}h(1,0)=(0,1)\\ &(0,1)\in\mathbb{C}^2\text{とすれば}(0,1)\in S^3\text{且つ}h(0,1)=(0,-1)\end{aligned}$$

となり $z\neq0$ なら $t\neq\pm1$ であり

$$\left(\left(\frac{1+t}{2}\right)^{1/2}\frac{z}{|z|},\left(\frac{1-t}{2}\right)^{1/2}\right)\in\mathbb{C}^2\ \text{とすれば}$$

$$\left|\left(\frac{1+t}{2}\right)^{1/2}\frac{z}{|z|}\right|^2+\left|\left(\frac{1-t}{2}\right)^{1/2}\right|^2=\frac{1+t}{2}+\frac{1-t}{2}=1\ \text{より}$$

$$\left(\left(\frac{1+t}{2}\right)^{1/2}\frac{z}{|z|},\left(\frac{1-t}{2}\right)^{1/2}\right)\in S^3\ \text{且つ}$$

$$h\left(\left(\frac{1+t}{2}\right)^{1/2}\frac{z}{|z|},\left(\frac{1-t}{2}\right)^{1/2}\right)=\left(2\left(\frac{1+t}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{1-t}{2}\right)^{1/2}\frac{z}{|z|},\left(\frac{1+t}{2}\right)-\left(\frac{1-t}{2}\right)\right)$$

$$=\left((1-t^2)^{1/2}\frac{z}{|z|},t\right)=\left(|z|\frac{z}{|z|},t\right)=(z,t)$$

となるので $h(S^3)=S^2$ が従う。

さて S^1 の S^3 上の作用 $(\theta\in\mathbb{R})$

$$e^{i\theta}:S^3\ni(z,w)\mapsto e^{i\theta}(z,w):=\left(e^{i\theta}z,e^{i\theta}w\right)\in S^3$$

は S^3 の同値関係を導くので、付随する商空間を S^3/S^1 とし商写像を $p: S^3 \to S^3/S^1$ として S^3/S^1 には p に依る商位相を導入して考える。任意の $(z,w) \in S^3$ に対し

$$\begin{aligned} h\left(e^{i\theta}(z,w)\right) &= h\left((e^{i\theta}z, e^{i\theta}w)\right) \\ &= \left(2e^{i\theta}z\,\overline{e^{i\theta}w}, |e^{i\theta}z|^2 - |e^{i\theta}w|^2\right) \\ &= \left(2z\bar{w}, |z|^2 - |w|^2\right) \\ &= h(z,w) \end{aligned}$$

であり $(z,w),(z',w') \in S^3$ は $h(z,w) = h(z',w')$ を満たすものとすると定義より $z\bar{w} = z'\overline{w'}$ 且つ $|z|^2 - |w|^2 = |z'|^2 - |w'|^2$ となる。この時、次の三つの場合の何れかが成立つ：

(i) $z \neq 0$　　(ii) $z = 0$ 且つ $z' = 0$　　(iii) $z = 0$ 且つ $z' \neq 0$

(i) $z \neq 0$ の場合　$w = w'\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)}, |z|^2 + |w|^2 = |z'|^2 + |w'|^2 = 1, |z|^2 - |w|^2 = |z'|^2 - |w'|^2$ が成立つ。$|z|^2 = \dfrac{1}{2}\left((|z|^2 + |w|^2) + (|z|^2 - |w|^2)\right) = \dfrac{1}{2}\left((|z'|^2 + |w'|^2) + (|z'|^2 - |w'|^2)\right) = |z'|^2$ を得るので $\dfrac{z'}{z} \in S^1$ であり

$$\frac{z'}{z}w = \frac{z'}{z}\left(w'\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}\right) = \left|\frac{z'}{z}\right|^2 w' = w'$$

より

$$\frac{z'}{z}(z,w) = (z',w')$$

を得る。これより $p(z,w) = p(z',w')$ が従う。

(ii) $z = z' = 0$ の場合　$|w| = |w'| = 1$ となるので $\dfrac{w'}{w} \in S^1$ であり

$$\frac{w'}{w}(0,w) = (0,w')$$

より $p(0,w) = p(0,w')$ を得る。

(iii) $z = 0$ 且つ $z' \neq 0$ の場合　$0 = z\bar{w} = z'\overline{w'}$ より $w' = 0$ であるので

$$-|w|^2 = |z|^2 - |w|^2 = |z'|^2 - |w'|^2 = |z'|^2 \neq 0$$

となるが $(z,w),(z',w') \in S^3$ 故 $|w|^2 = |z'|^2 = 1$ となり $|w|^2 = -|z'|^2$ に矛盾する。即ち (iii) は起こらない。

以上より $h: S^3 \to S^2$ は $h = \bar{h} \circ p$ なる同相写像 $\bar{h}: S^3/S^1 \to S^2$ を導く。h を通常**ホップ写像** Hopf mapping と謂い S^3 の**ホップ纖維化** Hopf fibration が同相写像 $\bar{h}: S^3/S^1 \to S^2$ を通じて S^1 の作用で実現されたと称する。

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{P} \arrow[d, shift left, "f^{-1}"] \\
S^3 \arrow[ur, "\pi|S^3"] \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] & S^2 \arrow[u, shift left, "f"] \\
S^3/S^1 \arrow[ur, "\bar{h}"'] &
\end{tikzcd}$$

４．複素平面の一点コンパクト化

複素平面 $\mathbb{C}$ に複素数でない一点を付け加えた集合を考える。その一点を**無限遠点** (infinity) と呼び、記号 ∞ で表す事にする。集合 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ に対して、その部分集合 $\mathbb{C}$ には通常の位相を入れた上で一点 $\{\infty\}$ の基本近傍系を導入する事に依り、位相を定義しよう。$\mathbb{C}$ の通常の位相は各 $z \in \mathbb{C}$ に対する近傍系 $\mathscr{V}(z) := \{V \in \mathbb{C}; \exists r > 0 : B(z; r) \subset V\}$ を指定する事で定まっている。任意の $r > 0$ に対し $B(\infty : r) := \{z \in \mathbb{C}; |z| > r\} \cup \{\infty\}$ と置き

$$\mathscr{V}(\infty) := \{V \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}; \exists r > 0 : B(\infty; r) \subset V\}$$

と定義する。このとき

- $\forall V \in \mathscr{V}(\infty),\ \infty \in V$
- $V \in \mathscr{V}(\infty), V \subset W \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\} \Rightarrow W \in \mathscr{V}(\infty)$
- $V, W \in \mathscr{V}(\infty) \Rightarrow V \cap W \in \mathscr{V}(\infty)$
- $\forall V \in \mathscr{V}(\infty), \exists W \in \mathscr{V}(\infty) : \forall z \in W,\ V \in \mathscr{V}(z)$

が成立つから $\mathscr{V}(\infty)$ は一点 ∞ の近傍系を成す。従って $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は位相空間となる。この位相空間を $\widehat{\mathbb{C}}$ と表し**拡張された複素平面** extended complex plane と謂う。さて、前節迄に屡々登場した複素函数

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \longmapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$$

に対し

$$\mathrm{inv}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0, & z = \infty \end{cases}$$

として $\widehat{\mathbb{C}} = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$ に拡張しよう。このとき inv が一点 ∞ に於いて連続である事は、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\mathrm{inv}\,(B(\infty; 1/\varepsilon)) = B(0; \varepsilon)$$

である事から従う。$\widehat{\mathbb{C}}$ は $(\mathbb{C}, \widehat{\mathbb{C}}, \setminus \{0\})$ を開被覆として持ち $\mathbb{C}$ 上の恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} : z \mapsto z$ 及び $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ 上の inv は連続函数であり $\mathbb{C} \cap (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上で

$$\mathrm{inv} \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} | \mathbb{C} \setminus \{0\})^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$$
$$\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \circ (\mathrm{inv} | \mathbb{C} \setminus \{0\})^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$$

は正則である。即ち $\{(\mathbb{C}, \mathrm{id}_{\mathbb{C}}), (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \mathrm{inv})\}$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ に複素解析構造を与える地図帳となる。さて $\xi \in S^2$ に対し

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \varphi_+(\xi), & \xi \in U_+ \\ \infty, & \xi = \mathrm{N} \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & \widehat{\mathbb{C}} \\ \mathbb{P} \arrow[ur, "\varphi \circ f^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

と置くと

$$\begin{aligned} &\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \circ \varphi \circ (\varphi_+)^{-1} : \mathbb{C} \ni z \mapsto z \in \mathbb{C} \\ &\mathrm{inv} \circ \varphi \circ (\varphi_-)^{-1} : \mathbb{C} \ni z \mapsto z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

となるので $\varphi : S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$ は正則同型写像となる。S^2 はコンパクトであるから $\widehat{\mathbb{C}}$ もコンパクトである。フビニ・ステュディ計量は自然に $\widehat{\mathbb{C}}$ のエルミート計量と見做される。同様に、$\widehat{\mathbb{C}}$ はケーラー形式 $\omega_\pm$ を備えたケーラー多様体となる。

参考文献：

小林昭七，複素幾何，岩波書店
野口潤次郎，複素解析概論，裳華房
W. Ballmann, Lecture on Kähler Manifolds, EMS
J. J. Duistermaat and J. A. C. Kolk, Multidimentional Real Analysis,
Cambridge Univ. Press