量子力学的自由粒子の運動学に関する基礎概念の関係

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dd, "\mathcal{F}"'] & X \arrow[l, "M(t)"'] \arrow[r, "x"] \arrow[d, "U(t)"'] & X \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "U(t)"] & X \arrow[d, "M\left(\frac{1}{t}\right)"] \\
 & X \arrow[r, "x+it\nabla"] & X \arrow[r, "\mathcal{F}"] & X \\
X \arrow[r, "D(t)"] & X \arrow[u, "M(t)"] \arrow[r, "it\nabla"] & X \arrow[u, "M(t)"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\mathcal{S} \subset X \subset \mathcal{S}'$

$\mathcal{S}$: $\mathbb{R}^n$ 上の滑らかな急減少函数の成すシュワルツクラス

$\mathcal{S}'$: 緩増加超函数の成す空間（$\mathcal{S}$ の双対空間）

$U(t) = \exp\left(i\frac{t}{2}\Delta\right)$ 自由シュレディンガー群

$M(t) = \exp\left(\frac{i|x|^2}{2t}\right)$ 位相変調作用素

$(D(t)\psi)(x) = (it)^{-n/2}\psi(t^{-1}x)$ 伸長作用素

$(\mathcal{F}\psi)(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\cdot\xi)\psi(x)dx$ フーリエ変換

$U(t) = \mathcal{F}^{-1}M\left(\frac{1}{t}\right)\mathcal{F}$ 自由シュレディンガー群のフーリエ乗法因子表現

$U(t) = M(t)D(t)\mathcal{F}M(t)$ 自由シュレディンガー群のドラード表現 $(t \neq 0)$

$x + it\nabla = U(t)\ x\ U(-t)$ ガリレイ変換の位置作用素によるシュレディンガー表現

$x + it\nabla = M(t)(it\nabla)M(-t)$ ガリレイ変換の運動量作用素による位相変調表現 $(t \neq 0)$