或る二階非線型常微分方程式の解の表示

平成 23 年 6 月
平成 30 年 4 月改訂
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

1. 二階非線型常微分方程式の導入

次の二階常微分方程式を考える：

$$-\omega\varphi + \frac{1}{2}\varphi'' = -|\varphi|^{p-1}\varphi + \lambda|\varphi|^{2p-2}\varphi$$

ここに ω, λ, p は実定数で $\omega > 0,\ p > 1$ とする。右辺を $f(\varphi)$ と表そう：

$$f(\varphi) = -|\varphi|^{p-1}\varphi + \lambda|\varphi|^{2p-2}\varphi$$

この解 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を用いれば $1+1$ 次元非線型シュレディンガー方程式

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = f(u)$$

の定在波解 standing wave solutions

$$u(t,x) = e^{i\omega t}\varphi(x)$$

やソリトン解 soliton solutions ($\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

$$u(t,x) = \exp(i(\xi x + (\omega - \frac{1}{2}\xi^2)t))\varphi(x - \xi t)$$

を具体的に表示する事が出来る。物理モデルでは $p = 3$ の場合の二重冪自己相互作用

$$f(u) = -|u|^2 u + \lambda|u|^4 u$$

が代表的である。

さて上の方程式の C^2 級の解 φ で次の性質 (i) - (iii) を満たすものを考えよう：

(i) （正値性）任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $\varphi(x) > 0$

(ii) （単調性）

任意の $x > 0$ に対し $\varphi'(x) < 0$

任意の $x < 0$ に対し $\varphi'(x) > 0$

(iii) （無限遠に於ける消滅）

$\varphi(x), \varphi'(x) \to 0\ (x \to \pm\infty)$

2. 具体的解法

与えられた方程式及び解の滑らかさより

$$\begin{aligned}((\varphi')^2)' &= 2\varphi'\varphi'' \\ &= 2\varphi'(2\omega\varphi - 2\varphi^p + 2\lambda\varphi^{2p-1}) \\ &= (2\omega\varphi^2 - \frac{4}{p+1}\varphi^{p+1} + \frac{2\lambda}{p}\varphi^{2p})'\end{aligned}$$

を得る。両辺を積分し (iii) を用いると

$$\begin{aligned}(\varphi')^2 &= 2\omega\varphi^2 - \frac{4}{p+1}\varphi^{p+1} + \frac{2\lambda}{p}\varphi^{2p} \\ &= 2\omega\varphi^2\left[1 - \frac{2}{(p+1)\omega}\varphi^{p-1} + \frac{\lambda}{p\omega}\varphi^{2p-2}\right]\end{aligned}$$

が従う。φ' の連続性と (ii) より $\varphi'(0) = 0$ となり (i) より $\varphi(0) > 0$ となるので右辺の括弧内は $x = 0$ で消え、等式

$$1 - \frac{2}{(p+1)\omega}\varphi(0)^{p-1} + \frac{\lambda}{p\omega}\varphi(0)^{2p-2} = 0$$

を得る。また $(\varphi')^2 \geq 0, \varphi > 0$ より

$$1 - \frac{2}{(p+1)\omega}\varphi^{p-1} + \frac{\lambda}{p\omega}\varphi^{2p-2} \geq 0$$

が従い $\pm x > 0$ に対し $\mp\varphi' > 0$ であることから

$$\varphi' = \mp\sqrt{2\omega}\varphi\sqrt{1 - \frac{2}{(p+1)\omega}\varphi^{p-1} + \frac{\lambda}{p\omega}\varphi^{2p-2}}$$

が得られる。さて

$$\psi = \varphi^{1-p}$$

と置くと ψ は微分方程式

$$\begin{aligned}\psi' =& -(p-1)\varphi^{-p}\varphi' \\ =& \pm(p-1)\sqrt{2\omega}\varphi^{1-p}\sqrt{1 - \frac{2}{(p+1)\omega}\varphi^{p-1} + \frac{\lambda}{p\omega}\varphi^{2p-2}} \\ =& \pm(p-1)\sqrt{2\omega}\sqrt{\psi^2 - \frac{2}{(p+1)\omega}\psi + \frac{\lambda}{p\omega}} \\ =& \pm(p-1)\sqrt{2\omega}\sqrt{\left(\psi - \frac{1}{(p+1)\omega}\right)^2 - \left(\left(\frac{1}{(p+1)\omega}\right)^2 - \frac{\lambda}{p\omega}\right)}\end{aligned}$$

を満たす。$a = \dfrac{1}{(p+1)\omega},\ b = \dfrac{\lambda}{p\omega}$ と置く。φ に関する条件を ψ の微分方程式に適用すると $\pm x > 0$ に対し $\pm\psi' > 0,\ \psi'(0) = 0,\ \psi \geq \psi(0),$

$$(\psi(0) - a)^2 - (a^2 - b) = 0$$

が成立つ。これより $a^2 - b = (\psi(0) - a)^2 \geq 0$ 及び $\psi(0) = a + \sqrt{a^2 - b} > 0$ が従うが、変数変換 $u = \psi(\xi)$ によって現れる $1/\sqrt{(u-a)^2 - (a^2 - b)}$ が $u = \psi(0)$ の近傍で可積分である為には $\psi(0) - a = \sqrt{a^2 - b} > 0$ である必要がある。このとき $\pm x > 0$ に対し

$$\begin{aligned}
\pm(p-1)\sqrt{2\omega}x &= \int_0^x \frac{\psi'(\xi)}{\sqrt{(\psi(\xi) - a)^2 - (a^2 - b)}} d\xi \\
&= \int_{\psi(0)}^{\psi(x)} \frac{1}{\sqrt{(u-a)^2 - (a^2 - b)}} du \\
&= \int_{\psi(0)-a}^{\psi(x)-a} \frac{1}{\sqrt{v^2 - (a^2 - b)}} dv \\
&= \left[\log(v + \sqrt{v^2 - (a^2 - b)})\right]_{v=\psi(0)-a}^{v=\psi(x)-a} \\
&= \log\left(\frac{\psi(x) - a + \sqrt{(\psi(x) - a)^2 - (a^2 - b)}}{\sqrt{a^2 - b}}\right)
\end{aligned}$$

が従う。故に $k = (p-1)\sqrt{2\omega}$ として

$$e^{\pm kx} = \frac{\psi(x) - a + \sqrt{(\psi(x) - a)^2 - (a^2 - b)}}{\sqrt{a^2 - b}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 - b}\ e^{\pm kx} - (\psi(x) - a) = \sqrt{(\psi(x) - a)^2 - (a^2 - b)}$$

$$\Rightarrow (a^2 - b)\ e^{\pm 2kx} - 2\sqrt{a^2 - b}\ e^{\pm kx}(\psi(x) - a) + (\psi(x) - a)^2 = (\psi(x) - a)^2 - (a^2 - b)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2 - b}\ e^{\pm kx}(\psi(x) - a) = (a^2 - b)(e^{\pm 2kx} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \psi(x) - a = \sqrt{a^2 - b}\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \psi(x) = a + \sqrt{a^2 - b}\ \cosh(kx)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) = (a + \sqrt{a^2 - b}\ \cosh(kx))^{-1/(p-1)}$$

を得る。以上を纏めると次の様になる。

定理　$p, \omega, \lambda \in \mathbb{R}$ は次の条件

$$\begin{cases} p > 1,\ \omega > 0, \\ \lambda\omega < p/(p+1)^2 \end{cases}$$

を満たすとする。このとき

$$-\omega\varphi + \frac{1}{2}\varphi'' = -|\varphi|^{p-1}\varphi + \lambda|\varphi|^{2p-2}\varphi$$

の解で (i)-(iii) を満たすものは

$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{(p+1)\omega} + \left(\left(\frac{1}{(p+1)\omega} \right)^2 - \frac{\lambda}{p\omega} \right)^{1/2} \cosh\left((p-1)\sqrt{2\omega} x \right) \right)^{-1/(p-1)}$$

で与えられる。

参考文献： W. A. Strauss, Dispersion of low-energy waves for two conservative equations, Arch. Rational Mech. Anal. **55**(1974), 86-92.

M. Ohta, Stability and instability of standing waves for one dimensional nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity, Kodai Math. J., **18**(1995), 68-74.

小澤徹, 『非線型シュレディンガー方程式の散乱理論』 大学院 GP 数学レクチャーノートシリーズ GP–TML02 東北大学大学院理学研究科，2008.