一次元横波伝播の生成する衝撃波の存在

平成 31 年 4 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

空間一次元（時空二次元）横波模型としての準線型波動方程式の初期値問題の基礎理論の考察（『一次元横波模型としての波動方程式』以下 [横] として引用する）に引き続き、衝撃波 (shock waves) を引き起こす初期状態の充分条件を定式化し、衝撃生成時刻を解の爆発時刻 (blowup time) として記述しよう。

１．横波模型の基礎理論

この節では横波模型としての準線型波動方程式

$$\partial_t^2 q = \partial\left((1+(\partial q)^2)^{-1/2}\partial q\right) \tag{TW}$$

の初期値問題の基礎理論 [横] について纏めて置こう。ここに q は二次元時空 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ の部分領域 $I\times\mathbb{R}$（I は初期時刻 0 を含む時間区間）に於けるスカラー場

$$q : I\times\mathbb{R}\ni(t,x)\longmapsto q(t,x)\in\mathbb{R}$$

であり $\partial_t=\partial/\partial t,\ \partial=\partial/\partial x$ とする。(TW) は未知函数 q に依る新たなスカラー場

$$u=\partial_t q,\ v=\partial q$$

を導入する事で、一階双曲系

$$\partial_t u=(1+v^2)^{-3/2}\partial v,\ \partial_t v=\partial u \tag{HS}$$

に書換えられる。さらに

$$v_\pm=\frac{1}{2}\left(v\mp(1+v^2)^{3/4}u\right),\ w_\pm=\frac{1}{2}\left(\partial v\mp(1+v^2)^{3/4}\partial u\right)$$

と置くと (HS) は（$v=v_++v_-$ と解釈し）

$$(\partial_t\pm(1+v^2)^{-3/4}\partial)v_\pm=\frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}(v_+^2-v_-^2)w_\pm, \tag{DHS}$$
$$(\partial_t\pm(1+v^2)^{-3/4}\partial)w_\pm=\pm\frac{3}{4}(1+v^2)^{-7/4}v\left(2(w_++w_-)^2-(w_+-w_-)^2\pm(w_+^2-w_-^2)\right)$$

に転換される。この一階双曲系は右辺に未知函数 $(v_\pm,w_\pm)$ の導函数を持たず左辺は一階の偏微分作用素 $\partial_t\pm(1+v^2)^{-3/4}\partial$ が未知函数 $(v_\pm,w_\pm)$ に作用している形を取っている。そのため (DHS) は時間区間 $I=[0,T]$ 上の函数空間

$$X^2(I)=C\left(I;(C^2\cap W^2_\infty)(\mathbb{R};\mathbb{R}^4)\right)$$

の積分方程式

$$v_\pm(t) = v_\pm^0 \circ (T_t^\pm)^{-1} + \int_0^t F_\pm^{(1)}(v_\pm, w_\pm)(s, T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot))ds,$$
$$w_\pm(t) = w_\pm^0 \circ (T_t^\pm)^{-1} + \int_0^t F_\pm^{(2)}(v_\pm, w_\pm)(s, T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot))ds$$

と書き換えられ $T > 0$ を充分小さく取れば $X^2(I)$ の或る閉球に解を持つ。ここに $(v_\pm^0, w_\pm^0)$ は $(v_\pm, w_\pm)$ の初期値

$$\left(v_\pm^0(x), w_\pm^0(x)\right) = (v_\pm(0,x), w_\pm(0,x)),\ x \in \mathbb{R}$$

とし $F_\pm^{(1)}(v_\pm, w_\pm)$ 及び $F_\pm^{(2)}(v_\pm, w_\pm)$ は (DHS) の右辺

$$F_\pm^{(1)}(v_\pm, w_\pm) = \frac{3}{2}(1 + (v_+ + v_-)^2)^{-7/4}(v_+^2 - v_-^2)w_\pm,$$
$$F_\pm^{(2)}(v_\pm, w_\pm) = \pm\frac{3}{4}(1 + (v_+ + v_-)^2)^{-7/4}(v_+ + v_-)\left(2(w_+ + w_-)^2 - (w_+ - w_-)^2 \pm (w_+^2 - w_-^2)\right)$$

とし $(T_t^\pm;\ t \in I)$ は $T_t^\pm \in (\mathrm{Lip} \cap C^1)(\mathbb{R};\mathbb{R})$ で $T_\bullet^\pm \in C(I; \dot{W}_\infty^1(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ 一径数変換族で $v_\pm \in C\left(I; (C^2 \cap W_\infty^2)(\mathbb{R})\right)$ から定まる一階非線型微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t \xi_\pm(t,x) & = \mp\left(1 + (v_+(t, \xi_\pm(t,x)) + v_-(t, \xi_\pm(t,x)))^2\right)^{-3/4}, \\ \xi_\pm(0,x) & = x \end{cases}$$

の解 $\xi_\pm$ に依り

$$T_t^\pm(x) = \xi_\pm(t,x),\ (t,x) \in I \times \mathbb{R}$$

として与えられるものである。I を小さく取り直す事で $T_t^\pm$ は逆変換 $(T_t^\pm)^{-1}$ を持ち $\left(T_t^\pm\right)^{-1} \in (\mathrm{Lip} \cap C^1)(\mathbb{R};\mathbb{R})$ で $(T_\bullet^\pm)^{-1} \in C(I; \dot{W}_\infty^1(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ を満たすように出来る。[横] の定理 3，5，6 を纏めて次を得る。

定理 1 (1) 任意の $(v_\pm^0, w_\pm^0) \in (C^1 \cap W_\infty^1)(\mathbb{R};\mathbb{R}^4)$ に対し (DHS) は

$$(v_\pm, w_\pm) \in C\left(I_m; (C^1 \cap W_\infty^1)(\mathbb{R};\mathbb{R}^4)\right) \cap C^1\left(I_m; (C^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R};\mathbb{R}^4)\right)$$

且つ $(v_\pm(0), w_\pm(0)) = (v_\pm^0, w_\pm^0)$ なる極大解 $(v_\pm, w_\pm)$ を唯一つ持つ。ここに $I_m = [0, T_m)$ であり $T_m \in (0, +\infty]$ とする。また

$$T_m < +\infty \text{ ならば } \lim_{t \uparrow T_m} \sum_\pm \left(\|v_\pm(t); W_\infty^1\| \vee \|w_\pm(t); W_\infty^1\|\right) = +\infty$$

(2) $(v_\pm^0, w_\pm^0) \in (C^2 \cap W_\infty^2)(\mathbb{R};\mathbb{R}^4)$ ならば (1) で与えられる (DHS) の解 $(v_\pm, w_\pm)$ は

$$C\left(I_m; (C^2 \cap W_\infty^2)(\mathbb{R};\mathbb{R}^4)\right) \cap C^1\left(I_m; (C^1 \cap W_\infty^1)(\mathbb{R};\mathbb{R}^4)\right)$$

に属す。

(3) $(v_\pm^0, w_\pm^0) \in (C^2 \cap W_\infty^2)(\mathbb{R};\mathbb{R}^4)$ に対する (2) で与えられる (DHS) の解 $(v_\pm, w_\pm)$ を取り

$$u = \left(1 + (v_+ + v_-)^2\right)^{-3/4}(v_- - v_+),\ v = v_+ + v_-$$
$$u_0 = \left(1 + (v_+^0 + v_-^0)^2\right)^{-3/4}(v_-^0 - v_+^0),\ v_0 = v_+^0 + v_-^0$$

と置く。このとき (u_0, v_0) は

$$(1+v_0^2)^{3/4}\partial u_0 = w_-^0 - w_+^0,\ \partial v_0 = w_+^0 + w_-^0$$

を満たしているものとすると I_m 上全体で等式

$$(1+v_0^2)^{3/4}\partial u_0 = w_- - w_+,\ \partial v = w_+ + w_-$$

が成立つ。更に (u, v) は (HS) を満たす。

(4) 任意の $(v_0, w_0) \in (C^2 \cap W_\infty^2)(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ に対し (HS) は

$$(u, v) \in C\left(I_m; (C^2 \cap W_\infty^2)(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)\right) \cap C^1\left(I_m; (C^1 \cap W_\infty^1)(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)\right)$$

且つ $(u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$ なる極大解 (u, v) を唯一つ持つ。ここに $I_m = [0, T_m)$ であり $T_m \in (0, +\infty]$ とする。また $T_m < +\infty$ ならば

$$\lim_{t\uparrow T_m} \sum_{\pm} \left(\|v(t) \pm (1+v(t)^2)^{3/4} u(t); W_\infty^1\| \vee \|\partial v(t) \pm (1+v(t)^2)^{3/4} \partial v(t); W_\infty^1\|\right) = +\infty$$

2．リーマン不変量から導かれる微分同相写像

平面 $\mathbb{R}^2$ の点 $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ に対し

$$\Phi(\rho) = (r_+(\rho), r_-(\rho))\,,\ r_\pm(\rho) = \pm\rho_1 + \int_0^{\rho^2} (1+\lambda^2)^{-3/4} d\lambda \tag{2.1$_\pm$}$$

と置くと写像 $\Phi : \mathbb{R}^2 \ni \rho \mapsto \Phi(\rho) \in \mathbb{R}^2$ が定まる。そのヤコビ行列の行列式は

$$\begin{aligned}\det\Phi'(\rho) &= \det\begin{bmatrix}\partial_1 r_+(\rho) & \partial_2 r_+(\rho)\\ \partial_1 r_-(\rho) & \partial_2 r_-(\rho)\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}1 & (1+\rho_2^2)^{-3/4}\\ -1 & (1+\rho_2^2)^{-3/4}\end{bmatrix}\\ &= 2(1+\rho_2^2)^{-3/4} \neq 0\end{aligned}$$

となり $\mathbb{R}^2$ の各点で消滅しないので C^1 級の逆 $\Psi = \Phi^{-1}$ を持つ。Ψ の各成分を $\mathbb{R}^2$ の点 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ に対して $\Psi(\sigma) = (s_+(\sigma), s_-(\sigma))$ と表すと $\Psi \circ \Phi = \Phi \circ \Psi = id$ なる関係は

$$s_+\left(r_+(\rho), r_-(\rho)\right) = \rho_1 \tag{2.2}$$
$$s_-\left(r_+(\rho), r_-(\rho)\right) = \rho_2 \tag{2.3}$$
$$r_+\left(s_+(\sigma), s_-(\sigma)\right) = \sigma_1 \tag{2.4}$$
$$r_-\left(s_+(\sigma), s_-(\sigma)\right) = \sigma_1 \tag{2.5}$$

と表示される。

３．リーマン不変量に依る解の特性曲線上の一様評価

定理 1 (4) で与えられた (HS) の解を $(u,v) \in C\left(I_m; (C^2 \cap W^2_\infty)(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)\right) \cap C^1\left(I_m; (C^1 \cap W^1_\infty)(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)\right)$ とし $r_\pm(u,v)$ を $r_\pm \circ (u,v)$ 即ち

$$\begin{aligned}(r_\pm(u,v))\,(t,x) &= r_\pm\left(u(t,x), v(t,x)\right) \\ &= \pm u(t,x) + \int_0^{v(t,x)} (1+\lambda^2)^{-3/4} d\lambda, \quad (t,x) \in I_m \times \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3.1$_\pm$}$$

で定めると $r_\pm(u,v) \in C^2(I_m \times \mathbb{R})$ が定まる。このとき

$$\partial\left(r_\pm(u,v)\right) = \pm\partial u + (1+v^2)^{-3/4}\partial v \tag{3.2}$$

より

$$\partial\left(r_+(u,v)\right) + \partial\left(r_-(u,v)\right) = 2(1+v^2)^{-3/4}\partial v \tag{3.3}$$

$$\partial\left(r_+(u,v)\right) - \partial\left(r_-(u,v)\right) = 2\partial u \tag{3.4}$$

即ち

$$\partial u = \frac{1}{2}\left(\partial(r_+(u,v)) - \partial(r_-(u,v))\right) \tag{3.5}$$

$$(1+v^2)^{-3/4}\partial v = \frac{1}{2}\left(\partial(r_+(u,v)) + \partial(r_-(u,v))\right) \tag{3.6}$$

が成立つ。一方

$$\begin{aligned}\partial_t\left(r_\pm(u,v)\right) &= \pm\partial_t u + (1+v^2)^{-3/4}\partial_t v \\ &= \pm(1+v^2)^{-3/4}\partial v + (1+v^2)^{-3/4}\partial u \\ &= \pm(1+v^2)^{-3/4}\left(\pm\partial u + (1+v^2)^{-3/4}\partial v\right) \\ &= \pm(1+v^2)^{-3/4}\partial\left(r_\pm(u,v)\right) \end{aligned} \tag{3.7$_\pm$}$$

より $x \in \mathbb{R}$ を始点とする特性曲線 $I_m \ni t \mapsto \xi_\pm(t,x) \in \mathbb{R}$ 上に沿う $r_\pm(u,v)$ は函数 $I_m \times \mathbb{R} \ni (t,x) \mapsto (r_\pm(u,v))\,(t, \xi_\pm(t,x)) \in \mathbb{R}$ として

$$\begin{aligned}&\partial_t\left((r_\pm(u,v))\,(t,\xi_\pm(t,x))\right) \\ &= \partial_t\left(r_\pm(u,v)\right)(t,\xi_\pm(t,x)) + \partial_t\xi_\pm(t,x)\partial\left(r_\pm(u,v)\right)(t,\xi_\pm(t,x)) \\ &= \pm\left(1 + v\left(t,\xi_\pm(t,x)\right)^2\right)^{-3/4}\partial\left(r_\pm(u,v)\right)(t,\xi_\pm(t,x)) \\ &\quad \mp\left(1 + v\left(t,\xi_\pm(t,x)\right)^2\right)^{-3/4}\partial\left(r_\pm(u,v)\right)(t,\xi_\pm(t,x)) = 0 \end{aligned} \tag{3.8$_\pm$}$$

を満たす。故に任意の $(t,x) \in I_m \times \mathbb{R}$ に対し

$$(r_\pm(u,v))\,(t,\xi_\pm(t,x)) = (r_\pm(u,v))\,(0,x) \tag{3.9$_\pm$}$$

即ち $(r_\pm(u,v))\,(t,\xi_\pm(t,x))$ は任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し時間不変量となる。それら $r_\pm(u,v)\,(\bullet,\xi_\pm(\bullet,x))$ を屡々**リーマン不変量**と称する。

特性曲線上に沿う $r_\pm(u,v)$ の一様評価の基礎を成すのが次の命題である。

命題１． $(u_0,v_0)\in(C^2\cap W^2_\infty)(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ とし定理 1 (4) で与えられる (HS) の解を $(u,v)\in C\left(I_m;(C^2\cap W^2_\infty)(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)\right)$ とする。このとき任意の $t\in I_m$ に対し次の不等式が成立つ：

$$\begin{aligned}\inf_{x\in\mathbb{R}} r_\pm\left(u_0(x),v_0(x)\right) &= \inf_{x\in\mathbb{R}}\left(r_\pm(u,v)\right)(0,x)\\ &= \inf_{x\in\mathbb{R}}\left(r_\pm(u,v)\right)(t,\xi_\pm(t,x))\\ &\le \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(r_\pm(u,v)\right)(t,\xi_\pm(t,x))\\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(r_\pm(u,v)\right)(0,x) = \sup_{x\in\mathbb{R}} r_\pm\left(u_0(x),v_0(x)\right) \qquad (3.10)_\pm\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\inf_{x\in\mathbb{R}} r_\pm\left(u_0(x),v_0(x)\right) &= \inf_{x\in\mathbb{R}}\left(r_\pm(u,v)\right)(0,x)\\ &\le \inf_{x\in\mathbb{R}}\left(r_\pm(u,v)\right)(t,\xi_\mp(t,x))\\ &\le \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(r_\pm(u,v)\right)(t,\xi_\mp(t,x))\\ &\le \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(r_\pm(u,v)\right)(0,x) = \sup_{x\in\mathbb{R}} r_\pm\left(u_0(x),v_0(x)\right) \qquad (3.11)_\pm\end{aligned}$$

（証明）$(3.10)_\pm$ は $(3.9)_\pm$ より直接従う。次に $(3.11)_\pm$ を示す為、任意の $(t,x)\in I_m\times\mathbb{R}$ に対し

$$\xi_-(t,x)=T_t^-(x)\in T_t^+(\mathbb{R})=\{\xi_+(t,y)\in\mathbb{R};\ y\in\mathbb{R}\}$$

である事を示そう。

実際、不等式

$$\begin{aligned}\xi_+(t,x) &= x-\int_0^t\left(1+v\left(t',\xi_+(t',x)\right)^2\right)^{-3/4}dt'\\ &< x < x+\int_0^t\left(1+v\left(t',\xi_-(t',x)\right)^2\right)^{-3/4}dt' = \xi_-(t,x)\\ &< x+t=(x+2t)-t\\ &< (x+2t)-\int_0^t\left(1+v\left(t',\xi_+(t',x+2t)\right)^2\right)^{-3/4}dt'\\ &= \xi_+(t,x+2t)\end{aligned}$$

及び連続函数 $\xi_+(t,\bullet)$ に対する中間値の定理に拠り

$$\xi_-(t,x)\in\xi_+(t,[x,x+2t])\subset\{\xi_+(t,y);\ y\in\mathbb{R}\}$$

が従うからである。これより任意の $t\in I_m$ に対し

$$\begin{aligned}\inf_{x\in\mathbb{R}}\left(r_+(u,v)\right)(0,x) &= \inf_{x\in\mathbb{R}}\left(r_+(u,v)\right)(t,\xi_+(t,x))\\ &\le \inf_{x\in\mathbb{R}}\left(r_+(u,v)\right)(t,\xi_-(t,x))\\ &\le \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(r_+(u,v)\right)(t,\xi_-(t,x))\\ &\le \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(r_+(u,v)\right)(t,\xi_+(t,x)) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(r_+(u,v)\right)(0,x)\end{aligned}$$

が成立つ。一方

$$
\begin{aligned}
\xi_-(t,x-2t) &= (x-2t) + \int_0^t \left(1+v\left(t',\xi_-(t,x-2t)\right)^2\right)^{-3/4} dt' \\
&< (x-2t)+t = x-t \\
&\qquad\qquad < x - \int_0^t \left(1+v\left(t',\xi_+(t',x)\right)^2\right)^{-3/4} dt' = \xi_+(t,x) \\
&\qquad\qquad < x < x + \int_0^t \left(1+v\left(t',\xi_-(t',x)\right)^2\right)^{-3/4} dt' \\
&\qquad\qquad\quad = \xi_-(t,x)
\end{aligned}
$$

及び連続函数 $\xi_-(t,\bullet)$ に対する中間値の定理に拠り

$$
\xi_+(t,x) \in \xi_-(t,[x-2t,x]) \subset \{\xi_-(t,y);\ y\in\mathbb{R}\}
$$

となるから任意の $t\in I_m$ に対し

$$
\begin{aligned}
\inf_{x\in\mathbb{R}} \left(r_-(u,v)\right)(0,x) &= \inf_{x\in\mathbb{R}} \left(r_-(u,v)\right)(t,\xi_-(t,x)) \\
&\le \inf_{x\in\mathbb{R}} \left(r_-(u,v)\right)(t,\xi_+(t,x)) \\
&\le \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(r_-(u,v)\right)(t,\xi_+(t,x)) \\
&\le \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(r_-(u,v)\right)(t,\xi_-(t,x)) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(r_-(u,v)\right)(0,x)
\end{aligned}
$$

が成立つ。故に $(3.11)_\pm$ が成立つ。

以下 (u_0,v_0) のみで定まる長方形 Q_0 を

$$
Q_0 := [\inf_{x\in\mathbb{R}} r_+\left(u_0(x),v_0(x)\right), \sup_{x\in\mathbb{R}} r_+\left(u_0(x),v_0(x)\right)] \times [\inf_{x\in\mathbb{R}} r_-\left(u_0(x),v_0(x)\right), \sup_{x\in\mathbb{R}} r_-\left(u_0(x),v_0(x)\right)] \tag{3.12}
$$

で定める。Q_0 は $\mathbb{R}^2$ のコンパクト部分集合であるから $\Psi(Q_0)$ もそうである。

命題 1 より

$$
\bigcup_\pm \{((r_+(u,v))(t,\xi_\pm(t,x)),(r_-(u,v))(t,\xi_\pm(t,x)))\in\mathbb{R}^2;\ (t,x)\in I_m\times\mathbb{R}\} \subset Q_0 \tag{3.13}
$$

が従う。

命題２． (1) $Q_0 \subset \Phi\left(\mathbb{R}\times(0,\infty)\right)$ ならば $0<\delta<M$ なる $\delta,\ M\in\mathbb{R}$ が存在し

$$
\text{任意の } (t,x)\in I_m\times\mathbb{R} \text{ に対し} \qquad \delta \le v\left(t,\xi_\pm(t,x)\right) \le M
$$

(2) $Q_0 \subset \Phi\left(\mathbb{R}\times(-\infty,0)\right)$ ならば $0<\delta<M$ なる $\delta,\ M\in\mathbb{R}$ が存在し

$$
\text{任意の } (t,x)\in I_m\times\mathbb{R} \text{ に対し} \qquad -M \le v\left(t,\xi_\pm(t,x)\right) \le -\delta
$$

(3) $Q_0 \subset \Phi\left((0,\infty)\times\mathbb{R}\right)$ ならば $0<\delta<M$ なる $\delta,\ M\in\mathbb{R}$ が存在し

$$\text{任意の}\ (t,x)\in I_m\times\mathbb{R}\ \text{に対し} \qquad \delta \le u\left(t,\xi_\pm(t,x)\right)\le M$$

(4) $Q_0 \subset \Phi\left((-\infty,0)\times\mathbb{R}\right)$ ならば $0<\delta<M$ なる $\delta,\ M\in\mathbb{R}$ が存在し

$$\text{任意の}\ (t,x)\in I_m\times\mathbb{R}\ \text{に対し} \qquad -M \le u\left(t,\xi_\pm(t,x)\right)\le -\delta$$

（証明）$Q_0\subset\Phi\left(\mathbb{R}\times(0,\infty)\right)$ より $\Psi(Q_0)\subset\mathbb{R}\times(0,\infty)$ であり $\Psi(Q_0)$ はコンパクト集合であるから $0<\delta<M$ なる $\delta,\ M\in\mathbb{R}$ が存在し $\Psi(Q_0)\subset[-M,M]\times[\delta,M]$ となる。これより $Q_0\subset\Phi\left([-M,M]\times[\delta,M]\right)$ が従う。(2.3) に $\rho=(u(t,\xi_\pm(t,x)),v(t,\xi_\pm(t,x)))$ を代入すると

$$v(t,\xi_\pm(t,x)) = s_-\left(r_+(u,v)(t,\xi_\pm(t,x)), r_-(u,v)(t,\xi_\pm(t,x))\right)$$

であり (3.13) より

$$\begin{aligned}&s_-\left(r_+(u,v)(t,\xi_\pm(t,x)), r_-(u,v)(t,\xi_\pm(t,x))\right)\\ &\subset s_-(Q_0)\subset[\delta,M]\end{aligned}$$

となるから (1) が従う。(2)-(4) も同様に示される。

４．リーマン不変量の勾配の満たす微分方程式

この節では、リーマン不変量の勾配 $I_m\times\mathbb{R}\ni(t,x)\mapsto\partial\left(r_\pm(u,v)\right)(t,\xi_\pm(t,x))\in\mathbb{R}$ の満たす微分方程式を求め、衝撃波の生成の記述の基礎としよう。

先ず $(3.7)_\pm$ 及び (3.3) を用いて

$$\begin{aligned}&\partial_t\partial\left(r_\pm(u,v)\right) = \partial\partial_t\left(r_\pm(u,v)\right)\\ &=\partial\left(\pm(1+v^2)^{-3/4}\ \partial\left(r_\pm(u,v)\right)\right)\\ &=\ \mp\frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}\ v\partial v\partial\left(r_\pm(u,v)\right)\pm(1+v^2)^{-3/4}\ \partial^2\left(r_\pm(u,v)\right)\\ &=\ \mp\frac{3}{4}(1+v^2)^{-1}v\left(\partial\left(r_+(u,v)\right)+\partial\left(r_-(u,v)\right)\right)\partial\left(r_\pm(u,v)\right)\pm(1+v^2)^{-3/4}\ \partial^2\left(r_\pm(u,v)\right)\end{aligned} \tag{4.1$_\pm$}$$

を得るので特性曲線に沿って微分すると

$$\begin{aligned}&\partial_t\left(\partial\left(r_\pm(u,v)\right)(t,\xi_\pm(t,x))\right)\\ &=\partial_t\partial\left(r_\pm(u,v)\right)(t,\xi_\pm(t,x))+\partial_t\xi_\pm(t,x)\partial^2\left(r_\pm(u,v)\right)(t,\xi_\pm(t,x))\\ &=\Big[\mp\frac{3}{4}(1+v^2)^{-1}\ v\left(\partial\left(r_+(u,v)\right)+\partial\left(r_-(u,v)\right)\right)\partial\left(r_\pm(u,v)\right)\\ &\qquad\pm(1+v^2)^{-3/4}\ \partial^2\left(r_\pm(u,v)\right)\mp(1+v^2)^{-3/4}\ \partial^2\left(r_\pm(u,v)\right)\Big](t,\xi_\pm(t,x))\\ &=\ \mp\frac{3}{4}\left[(1+v^2)^{-1}\ v\left(\partial\left(r_+(u,v)\right)+\left(r_-(u,v)\right)\right)\partial\left(r_\pm(u,v)\right)\right](t,\xi_\pm(t,x))\end{aligned} \tag{4.2$_\pm$}$$

が得られる。$\partial\left(r_+(u,v)\right)$ 又は $\partial\left(r_-(u,v)\right)$ の項を消去し $\left(\partial\left(r_\pm(u,v)\right)\right)^2$ の項を抽出する為、積分因子として $(1+v^2)^{-3/8}$ を導入し時間微分を実行すると

$$
\begin{aligned}
&\partial_t\left((1+v^2)^{-3/8}\ \partial\left(r_\pm(u,v)\right)(t,\xi_\pm(t,x))\right)\\
=&\Bigg[-\frac{3}{4}(1+v^2)^{-11/8}\ v\left(\partial_t v+\partial_t\xi_\pm(t,x)\partial v\right)\left(r_\pm(u,v)\right)\\
&+(1+v^2)^{-3/8}\ \left(\mp\frac{3}{4}(1+v^2)^{-1}\ v\left(\partial\left(r_+(u,v)\right)+\partial\left(r_-(u,v)\right)\right)\partial\left(r_\pm(u,v)\right)\right)\Bigg](t,\xi_\pm(t,x))\\
=&\Bigg[-\frac{3}{4}(1+v^2)^{-11/8}\ v\left(\partial_t v\mp(1+v^2)^{-3/4}\partial v\right)\partial\left(r_\pm(u,v)\right)\\
&\mp\frac{3}{4}(1+v^2)^{-11/8}\ v\left(\partial\left(r_+(u,v)\right)+\partial\left(r_-(u,v)\right)\right)\partial\left(r_\pm(u,v)\right)\Bigg](t,\xi_\pm(t,x))\\
=&\Bigg[\pm\frac{3}{4}(1+v^2)^{-11/8}\ v\partial\left(r_\mp(u,v)\right)\partial\left(r_\pm(u,v)\right)\\
&\mp\frac{3}{4}(1+v^2)^{-11/8}\ v\left(\partial\left(r_+(u,v)\right)+\partial\left(r_-(u,v)\right)\right)\partial\left(r_\pm(u,v)\right)\Bigg](t,\xi_\pm(t,x))\\
=&\ \pm\frac{3}{4}\left[(1+v^2)^{-11/8}\ v\left(\partial\left(r_\mp(u,v)\right)-\partial\left(r_+(u,v)\right)+\partial\left(r_-(u,v)\right)\right)\partial\left(r_\pm(u,v)\right)\right](t,\xi_\pm(t,x))\\
=&\ \mp\frac{3}{4}\left[(1+v^2)^{-11/8}\ v\left(\partial\left(r_\mp(u,v)\right)\right)^2\right](t,\xi_\pm(t,x)) \qquad (4.3)_\pm
\end{aligned}
$$

が従う。ここに

$$
\begin{aligned}
\partial_t v\mp(1+v^2)^{-3/4}\ \partial v&=\partial u\mp(1+v^2)^{-3/4}\ \partial v\\
&=\mp\left(\mp\partial u+(1+v^2)^{-3/4}\ \partial v\right)=\mp\partial\left(r_\mp(u,v)\right)
\end{aligned}
$$

を用いた。

5．一次元横波伝播の生成する衝撃の存在

第３節の命題２と第４節の $(4.3)_\pm$ に基づき、衝撃波を生成する初期状態の充分条件を求め、衝撃生成時刻の特徴付けを与えよう。

$(u_0,v_0)\in(C^2\cap W^2_\infty)(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ とし定理１ (4) で与えられる一階双極系 (HS) の解を $(u,v)\in C\left(I_m;(C^2\cap W^2_\infty)(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)\right)\cap C^1\left(I_m;(C^1\cap W^1_\infty)(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)\right)$ とする。このとき $(3.1)_\pm$ で与えられる $r_\pm(u,v)$ の勾配 $\partial\left(r_\pm(u,v)\right)$ は特性曲線上で微分方程式 $(4.3)_\pm$ を満たす：

$$
\begin{aligned}
&\partial_t\left((1+v^2)^{-3/8}\ \partial\left(r_\pm(u,v)\right)(t,\xi_\pm(t,x))\right)\\
&=\mp\frac{3}{4}\left[(1+v^2)^{-11/8}\left(\partial\left(r_\pm(u,v)\right)\right)^2\ \right](t,\xi_\pm(t,x)) \qquad (4.3)_\pm
\end{aligned}
$$

そこで $I_m\times\mathbb{R}$ 上の函数 $\alpha_\pm, M_\pm$ を

$$
\begin{aligned}
\alpha_\pm(t,x)&=\left[(1+v^2)^{-3/8}\ \partial\left(r_\pm(u,v)\right)\right](t,\xi_\pm(t,x))\\
M_\pm(t,x)&=\frac{3}{4}\left[(1+v^2)^{-5/8}v\right](t,\xi_\pm(t,x))
\end{aligned}
$$

で定義すると $(4.3)_{\pm}$ は $\alpha_{\pm}$ の微分方程式

$$\partial_t \alpha_{\pm}(t,x) = \mp M_{\pm}(t,x)\alpha_{\pm}(t,x)^2 \tag{5.1$_{\pm}$}$$

に転換される。さて初期条件 (u_0, v_0) のみから定まる (3.12) で与えられる長方形 Q_0 に対し

$$Q_0 \subset \Phi\left(\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})\right) \tag{5.2}$$

を仮定しよう。(5.2) の右辺は $\Phi\left(\mathbb{R} \times (0,\infty)\right) \sqcup \Phi\left(\mathbb{R} \times (-\infty,0)\right)$ と二つの連結成分で表されるので、次のどちらか一方が成立つ：

$$\text{(i)} \quad Q_0 \subset \Phi\left(\mathbb{R} \times (0,\infty)\right), \qquad\qquad \text{(ii)} \quad Q_0 \subset \Phi\left(\mathbb{R} \times (-\infty,0)\right)$$

先ず (i) の場合を考える。命題 2 (1) より $0 < \delta < M$ なる $\delta,\ M \in \mathbb{R}$ が在って任意の $(t,x) \in I_m \times \mathbb{R}$ に対し $\delta \leq v\left(t, \xi_{\pm}(t,x)\right) \leq M$ となる。
そこで更に初期状態に関し

$$\alpha_+(0, x_0^+) < 0 \tag{5.3$_+$}$$

なる $x_0^+ \in \mathbb{R}$ または

$$\alpha_-(0, x_0^-) > 0 \tag{5.3$_-$}$$

なる $x_0^- \in \mathbb{R}$ の存在を仮定しよう。いま

$$M_{\pm}(t,x) \geq \frac{3}{4}(1+M^2)^{-5/8}\delta,\ (t,x) \in I_m \times \mathbb{R} \tag{5.4$_{\pm}$}$$

が成立しているので任意の $t \in I_m$ に対し $\mp\alpha_{\pm}(t, x_0^{\pm}) > 0$ が成立し

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\alpha_{\pm}(t,x_0^{\pm})}\right) = -\frac{\partial_t \alpha_{\pm}(t,x_0^{\pm})}{\alpha_{\pm}(t,x_0^{\pm})^2} = \pm M_{\pm}(t, x_0^{\pm}) \tag{5.5$_{\pm}$}$$

及び

$$\frac{1}{\alpha_{\pm}(t,x_0^{\pm})} = \frac{1}{\alpha_{\pm}(0,x_0^{\pm})} \pm \int_0^t M_{\pm}(t', x_0^{\pm})dt' \tag{5.6$_{\pm}$}$$

を得る。このとき $T_m = \infty$ であると仮定すると $(5.4)_{\pm}$ より

$$\int_0^t M_{\pm}(t', x_0^{\pm})dt' \geq \frac{3}{4}(1+M^2)^{-5/8}\ \delta t \uparrow \infty \quad (t \uparrow \infty)$$

故 $1/\alpha_{\pm}(t_*^{\pm}, x_0^{\pm}) = 0$ なる $t_*^{\pm} \in (0, T_m)$ が存在する事となり矛盾である。従って $T_m < \infty$ となる。

次に (ii) の場合を考える。命題 2 (2) より $0 < \delta < M$ なる $\delta,\ M \in \mathbb{R}$ が在って任意の $(t,x) \in I_m \times \mathbb{R}$ に対し $-M \leq v\left(t, \xi_{\pm}(t,x)\right) \leq -\delta$ となる。
そこで更に初期状態に関し

$$\alpha_+(0, y_0^+) > 0 \tag{5.7$_+$}$$

なる $y_0^+ \in \mathbb{R}$ または

$$\alpha_-(0, y_0^-) < 0 \tag{5.7$_-$}$$

なる $y_0^- \in \mathbb{R}$ の存在を仮定しよう。いま

$$M_\pm(t,x) \le -\frac{3}{4}(1+M^2)^{-5/8}\delta \tag{5.8$_\pm$}$$

が成立しているので任意の $t \in I_m$ に対し $\pm\alpha_\pm(t,y_0^\pm) > 0$ が成立し

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\alpha_\pm(t,y_0^\pm)}\right) = -\frac{\partial_t\alpha_\pm(t,y_0^\pm)}{\alpha_\pm(t,y_0^\pm)^2} = \pm M_\pm(t,y_0^\pm) \tag{5.9$_\pm$}$$

及び

$$\frac{1}{\alpha_\pm(t,y_0^\pm)} = \frac{1}{\alpha_\pm(0,y_0^\pm)} \pm \int_0^t M_\pm(t',y_0^\pm)dt' \tag{5.10$_\pm$}$$

を得る。このとき $T_m = \infty$ であると仮定すると $(5.8)_\pm$ より

$$\int_0^t M_\pm(t',y_0^\pm)dt' \le -\frac{3}{4}(1+M^2)^{-5/8}\ \delta t \downarrow -\infty \quad (t \uparrow \infty)$$

故 $1/\alpha_\pm(t_*^\pm, y_0^\pm) = 0$ なる $t_*^\pm \in (0,T_m)$ が存在する事となり矛盾である。従って $T_m < \infty$ となる。以上を定理の形に纏めて置こう。

定理２ $(u_0,v_0) \in (C^2 \cap W^2_\infty)(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ とし定理１ (4) で与えられる (HS) の解を $(u,v) \in C\left(I_m;(C^2\cap W^2_\infty)(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)\right) \cap C^1\left(I_m;(C^1\cap W^1_\infty)(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)\right)$ とする。(3.12) で与えられる Q_0 は仮定 (5.2)

$$Q_0 \subset \Phi\left(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})\right)$$

を満たすものとする。このとき次の条件の何れかが満たされれば $T_m < \infty$ となる。

$(\mathrm{i})_+$ $Q_0 \subset \Phi\left(\mathbb{R}\times(0,\infty)\right)$ 且つ $\partial\left(r_+(u_0,v_0)\right)(x_0^+) < 0$ なる $x_0^+ \in \mathbb{R}$ が存在する

$(\mathrm{i})_-$ $Q_0 \subset \Phi\left(\mathbb{R}\times(0,\infty)\right)$ 且つ $\partial\left(r_-(u_0,v_0)\right)(x_0^-) > 0$ なる $x_0^- \in \mathbb{R}$ が存在する

$(\mathrm{ii})_+$ $Q_0 \subset \Phi\left(\mathbb{R}\times(-\infty,0)\right)$ 且つ $\partial\left(r_+(u_0,v_0)\right)(y_0^+) > 0$ なる $y_0^+ \in \mathbb{R}$ が存在する

$(\mathrm{ii})_-$ $Q_0 \subset \Phi\left(\mathbb{R}\times(-\infty,0)\right)$ 且つ $\partial\left(r_-(u_0,v_0)\right)(y_0^-) < 0$ なる $y_0^- \in \mathbb{R}$ が存在する

参考文献：

P. D. Lax, Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations, J. Math. Phys., **5** (1964), 611-613.

N. J. Zabusky, Exact solution for the vibrations of a nonlinear continuous model string, J. Math. Phys., **3** (1962), 1028-1039.

F. John, Formation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation, Comm. Pure Appl. Math., **27** (1974), 377-405.

S. Alinhac, “Blowup for Nonlinear Hyperbolic Equations,” Birkhäuser, 1995.

S. Alinhac, “Hyperbolic Partial Differential Equations,” Springer, 2009.

L. Hörmander, “Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations,” Springer, 1997.

J. Speck, “Shock Formation in Small-Data Solutions to 3-D Quasilinear Wave Equations,” AMS, 2016.

小澤 徹, 一次元横波模型としての波動方程式, http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/pdf/1d_transversal_wave.pdf