球面上の滑らかな函数

平成 20 年 5 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

$\mathbb{R}^n$ の単位球面 S^{n-1} 上の滑らかな函数 (C^∞-函数) の特徴付けについて考える。単位球面 S^{n-1} は

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$$

と定義される。ここに $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し $|x| = \Bigl(\sum_{j=1}^n x_j^2\Bigr)^{1/2}$ と置いた。単位球面上の函数の滑らかさを議論する為には単位球面自身に微分構造を付与して考える必要がある。典型的な地図帳として次の二つを考える。

1. $\{(V_j^\pm, \varphi_j^\pm); 1 \le j \le n\}$:

$$\begin{aligned}
V_j^\pm &= \{x \in S^{n-1}; \pm x_j > 0\} \\
&= \{(x_1, \cdots, x_{j-1}, \pm\Bigl(1 - \sum_{k\neq j} x_k^2\Bigr)^{1/2}, x_{j+1}, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{k \neq j} x_k^2 < 1\},
\end{aligned}$$

$$B^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^{n-1}; \sum_{j=1}^{n-1} y_j^2 < 1\},$$

$$\varphi_j^\pm : V_j^\pm \to B^{n-1},$$

$$\varphi_j^\pm(x_1, \cdots, x_{j-1}, \pm\Bigl(1 - \sum_{k\neq j} x_k^2\Bigr)^{1/2}, x_{j+1}, \cdots, x_n) = (x_1, \overset{\overset{j}{\vee}}{\cdots}, x_n)$$

2. $\{(V_\pm, \varphi_\pm)\}$:

$$V_\pm = S^{n-1} \setminus \{(0, \pm 1)\}, \quad (0, \pm 1) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R},$$

$$\varphi_\pm : V_\pm \to \mathbb{R}^{n-1},$$

$$\varphi_\pm(x', x_n) = (1 \mp x_n)^{-1} x', \quad (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$$

上の 1,2 が S^{n-1} の地図帳となっている事を確かめておこう。

1. 定義より $S^{n-1} = \bigcup_{j=1}^n (V_j^+ \cup V_j^-)$ であり、$(\varphi_j^\pm)^{-1} : B^{n-1} \to V_j^\pm$ は $y \in B^{n-1}$ に対し

$$(\varphi_j^\pm)^{-1}(y) = (y_1, \cdots, y_{j-1}, \pm(1 - \sum_{k=1}^{n-1} y_k^2)^{1/2}, y_j, \cdots, y_{n-1}),\ 1 \le j \le n-1,$$

$$(\varphi_n^\pm)^{-1}(y) = (y_1, \cdots, y_{n-1}, \pm(1 - \sum_{j=1}^{n-1} y_k^2)^{1/2}),\ j = n$$

で与えられ、$1 \leq i < j \leq n$ なる i, j に対し B^{n-1} から B^{n-1} への写像
$\varphi_i^{\pm}\circ(\varphi_j^{\pm}|V_i^{\pm}\cap V_j^{\pm})^{-1}$, $\varphi_j^{\pm}\circ(\varphi_i^{\pm}|V_i^{\pm}\cap V_j^{\pm})^{-1}$, $\varphi_i^{\pm}\circ(\varphi_j^{\mp}|V_i^{\pm}\cap V_j^{\mp})^{-1}$, $\varphi_j^{\pm}\circ(\varphi_i^{\mp}|V_i^{\mp}\cap V_j^{\pm})^{-1}$
は夫々 $y = (y_1, \cdots, y_{n-1}) \in B^{n-1}$ に対し

$$(\varphi_i^{\pm}\circ(\varphi_j^{\pm}|V_i^{\pm}\cap V_j^{\pm})^{-1})(y) = (y_1, \overset{\overset{i}{\vee}}{\cdots}, \pm\Bigl(1 - \sum_{k=1}^{n-1} y_k^2\Bigr)^{1/2},\ y_j, \cdots, y_{n-1})$$

$$(\varphi_j^{\pm}\circ(\varphi_i^{\pm}|V_i^{\pm}\cap V_j^{\pm})^{-1})(y) = (y_1, \cdots, y_{i-1}, \pm\Bigl(1 - \sum_{k=1}^{n-1} y_k^2\Bigr)^{1/2}, \overset{\overset{j}{\vee}}{\cdots}, y_{n-1})$$

$$(\varphi_i^{\pm}\circ(\varphi_j^{\mp}|V_i^{\pm}\cap V_j^{\mp})^{-1})(y) = (y_1, \overset{\overset{i}{\vee}}{\cdots}, \mp\Bigl(1 - \sum_{k=1}^{n-1} y_k^2\Bigr)^{1/2},\ y_j, \cdots, y_{n-1})$$

$$(\varphi_j^{\pm}\circ(\varphi_i^{\mp}|V_i^{\mp}\cap V_j^{\pm})^{-1})(y) = (y_1, \cdots, y_{i-1}, \mp\Bigl(1 - \sum_{k=1}^{n-1} y_k^2\Bigr)^{1/2}, \overset{\overset{j}{\vee}}{\cdots}, y_{n-1})$$

で与えられる事により $\{(V_j^{\pm}, \varphi_j^{\pm}); 1 \leq j \leq n\}$ は S^{n-1} の地図帳となる。

2. 定義より $S^n = V_+ \cup V_-$ であり、$(\varphi_{\pm})^{-1} : \mathbb{R}^{n-1} \to V_{\pm}$ は、

$$\begin{aligned}
&(1 \mp x_n)^{-1}x' = y,\ x = (x', x_n)\ \in S^{n-1},\ y \in \mathbb{R}^{n-1} \\
&\Rightarrow |y|^2 = \frac{|x'|^2}{(1 \mp x_n)^2} = \frac{1 - x_n^2}{(1 \mp x_n)^2} = \frac{1 \pm x_n}{1 \mp x_n} \\
&\Rightarrow (1 \mp x_n)|y|^2 = 1 \pm x_n \\
&\Rightarrow |y|^2 - 1 = \pm(|y|^2 + 1)x_n \\
&\Rightarrow x_n = \pm\frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1},\ x' = (1 \mp x_n)y = \left(1 - \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1}\right)y = \frac{2}{|y|^2 + 1}y
\end{aligned}$$

であるから

$$(\varphi_{\pm})^{-1}(y) = \left(\frac{2}{|y|^2 + 1}y,\ \pm\frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1}\right),\ y \in \mathbb{R}^{n-1}$$

で与えられ、$\varphi_{\pm}(V_+ \cap V_-) = \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ であり $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ から $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ への写像
$\varphi_{\pm} \circ (\varphi_{\mp}|V_+ \cap V_-)^{-1}$ は

$$\begin{aligned}
&(\varphi_{\pm} \circ (\varphi_{\mp}|V_+ \cap V_-)^{-1})(y) \\
&= \varphi_{\pm}\left(\frac{2}{|y|^2 + 1}y, \pm\frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1}\right) = \left(1 - \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1}\right)^{-1} \frac{2}{|y|^2 + 1}y = \frac{y}{|y|^2}
\end{aligned}$$

で与えられる事により $\{(V_{\pm}, \varphi_{\pm})\}$ は S^{n-1} の地図帳となる。

二つの地図帳で与えられる微分構造が同値である事は次の様に確かめられる。

$$
\begin{aligned}
&V_j^{\pm}\cap V_{\pm}=\{x\in S^{n-1};\pm x_j>0, x_n\neq\pm1\},\\
&V_j^{\pm}\cap V_{\mp}=\{x\in S^{n-1};\pm x_j>0, x_n\neq\mp1\},\\
&\varphi_j^{\pm}(V_j^{\pm}\cap V_{\pm})=\varphi_j^{\pm}(V_j^{\pm}\cap V_{\mp})=\begin{cases} B^{n-1}, & j\neq n,\\ B^{n-1}\setminus\{0\}, & j=n,\end{cases}\\
&(\varphi_{\mp}\circ(\varphi_j^{\pm}|V_j^{\pm}\cap V_{\mp})^{-1})(y)\\
&=\begin{cases} (1\mp y_{n-1})^{-1}\left(y_1,\cdots,y_{j-1},\pm\left(1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}y_k^2\right)^{1/2},y_j,\cdots,y_{n-2}\right),\ j\neq n,\\ \left(1-\left(1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}y_k^2\right)^{1/2}\right)^{-1}(y_1,\cdots,y_{n-1}),\ j=n,\end{cases}\\
&(\varphi_{\mp}\circ(\varphi_j^{\pm}|V_j^{\pm}\cap V_{\mp})^{-1})(y)\\
&=\begin{cases} (1\pm y_{n-1})^{-1}\left(y_1,\cdots,y_{j-1},\pm\left(1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}y_k^2\right)^{1/2},y_j,\cdots,y_{n-2}\right), & j\neq n,\\ \left(1+\left(1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}y_k^2\right)^{1/2}\right)^{-1}(y_1,\cdots,y_{n-1}), & j=n,\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_j^{\pm}\circ(\varphi_{\pm}|V_j^{\pm}\cap V_{\pm})^{-1})(y)=(\varphi_j^{\mp}\circ(\varphi_{\pm}|V_j^{\pm}\cap V_{\pm})^{-1})(y)\\
&=\begin{cases} \dfrac{1}{|y|^2+1}(2y_1,\overset{\overset{j}{\vee}}{\cdots},2y_{n-1},\pm(|y|^2-1)), & j\neq n,\\ \dfrac{2}{|y|^2+1}y, & j=n\end{cases}
\end{aligned}
$$

以下では、S^{n-1} の微分構造は上記の地図帳の属すものとする。

さて、S^{n-1} 上定義された函数 u が滑らかであるとは、滑らかな多様体 S^{n-1} 上滑らかと云う事と定義する。即ち、S^{n-1} の微分構造を定める地図帳の任意の地図 (U,φ) に対し $u\circ\varphi^{-1}\in C^\infty(\varphi(U))$ となる事と定義する。

命題　S^{n-1} 上定義された函数 u に対し、次は同値である。

(1) $u\in C^\infty(S^{n-1})$

(2) $((\varphi_j^{\pm})^{-1})^*u\in C^\infty(B^{n-1}),\ j=1,\ \cdots,n$

(3) $((\varphi_{\pm})^{-1})^*u\in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$

(4) $Eu\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$　但し $(Eu)(x)=u\left(\dfrac{x}{|x|}\right)$

(5) $\mathbb{R}^n$ に於ける S^{n-1} の開近傍 V と $v\in C^\infty(V)$ が在って $v|S^{n-1}=u$

(証明)(1) $\Leftrightarrow$ (2), (1) $\Leftrightarrow$ (3) は定義により直ちに従う。

(2) $\Rightarrow$ (4)： $U_j^{\pm} = \{x \in \mathbb{R}^n ; \pm x_j > 0\}$ と置くと $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} (U_j^+ \cup U_j^-)$ となるので各 j に対し $Eu|U_j^{\pm} \in C^\infty(U_j^{\pm})$ となる事を示せば良い。$x \in U_j^{\pm}$ に対し

$$\frac{x}{|x|} \in V_j^{\pm},\ \frac{1}{|x|}(x_1, \overset{\overset{j}{\vee}}{\cdots}, x_n) \in B^{n-1},\ (\varphi_j^{\pm})^{-1}\Big(\frac{1}{|x|}(x_1, \overset{\overset{j}{\vee}}{\cdots}, x_n)\Big) = \frac{x}{|x|}$$

となるので

$$(Eu)(x) = u\left(\frac{x}{|x|}\right) = (u \circ (\varphi_j^{\pm}))^{-1}\Big(\frac{1}{|x|}(x_1, \overset{\overset{j}{\vee}}{\cdots}, x_n)\Big),\ x \in U_j^{\pm}$$

となり $Eu|U_j^{\pm}$ は C^∞ 写像 $U_j^{\pm} \ni x \mapsto \dfrac{1}{|x|}(x_1, \overset{\overset{j}{\vee}}{\cdots}, x_n) \in B^{n-1}$ と $((\varphi_j^{\pm})^{-1})^* u \in C^\infty(B^{n-1})$ との合成写像となるので $Eu|U_j^{\pm} \in C^\infty(U_j^{\pm})$ が従う。

(4) $\Rightarrow$ (3)： $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対し

$$(u \circ (\varphi_{\pm})^{-1})(y) = u\left(\frac{2}{|y|^2+1}y, \pm\frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}\right) = (Eu)(2y, \pm(|y|^2-1))$$

であり $\mathbb{R}^{n-1} \ni y \mapsto (2y, \pm(|y|^2-1)) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は C^∞ 写像なので、(4) より (3) が従う。

(4) $\Rightarrow$ (5)： (5) は (4) の特別な場合である。

(5) $\Rightarrow$ (1)： S^{n-1} の任意の地図 (U, φ) に対し $u \circ \varphi^{-1} = v \circ \varphi^{-1}$ であり

$$\varphi(U) \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \hookrightarrow S^{n-1} \hookrightarrow V \xrightarrow{v} \mathbb{C}$$

は C^∞ なので $u \circ \varphi^{-1}$ は C^∞ となる。

参考文献： R. Abraham, J.E. Marsden and T. Ratiu, Manifolds, Tensor Analysis, and Application, Second Edition, Applied Mathematical Sciences 75, Springer