

多重指数

平成 20 年 12 月

小澤 徹

<http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html>

多重指数とは $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n = (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ の元の事である。ここに $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は非負整数の全体である。 \mathbb{R}^n 上の微分積分の記述は多重指数を用いると著しく簡潔になる。ここではその標準的な記法を纏めて置こう。

多重指数は通常 α, β, γ 等のギリシャ文字で表し成分表示には

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$$

なる記法を用いる。

多重指数の相等

$\alpha = \beta$ とは任意の $j \in \{1, \dots, n\}$ に対し $\alpha_j = \beta_j$ である事と定める。

多重指数の加法

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ に対し $\alpha + \beta$ を $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ で定める。多重指数の零元 0 を $0 = (0, \dots, 0)$ と定めれば加法に関する零元となる。

多重指数のスカラー倍

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $k\alpha$ を $k\alpha = (k\alpha_1, \dots, k\alpha_n)$ で定める。

多重指数の順序

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ に対し $\alpha \leq \beta$ とは任意の $j \in \{1, \dots, n\}$ に対し $\alpha_j \leq \beta_j$ である事と定める。 $\alpha \leq \beta$ は $\beta \geq \alpha$ とも表す。従って一般的に $\alpha \geq 0$ である。 $\alpha \leq \beta$ である時に限り多重指数 $\beta - \alpha$ が $\beta - \alpha = (\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_n - \alpha_n)$ で定まる。よって次の関係が成立つ：

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha \geq 0$$

多重指数の長さ

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ に対し全成分の和

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j$$

を α の長さとする。これは ($\mathbb{Z}_{\geq 0}^n \subset \mathbb{R}^n$ と見做した) ユークリッド的長さと同じ記号で表されるので注意を要する。

多重指数の階乗

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ に対し各成分の階乗の積

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n! = \prod_{j=1}^n \alpha_j!$$

を α の階乗と定める。 $0! = 1$ より $0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対しても $0! = 1$ が従う。

多重指数の二項係数

$\alpha \geq \beta$ なる多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ に対し各成分の二項係数の積

$$\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{j=1}^n \binom{\alpha_j}{\beta_j} = \prod_{j=1}^n \frac{\alpha_j!}{\beta_j! (\alpha_j - \beta_j)!} = \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!}$$

を二項係数と定める ($\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の元 n 個の組から見れば多項係数)。 $\alpha \geq \beta$ でない時は

$$\binom{\alpha}{\beta} = 0$$

と定める。

数ベクトルの多重指数による冪

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ の多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ による冪 x^α を

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}$$

で定める。 $0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対しては $x^0 = 1$ となる。

勾配作用素の多重指数による冪

勾配作用素 $\partial = \nabla = \text{grad} = (\partial_1, \dots, \partial_n)$, $\partial_j = \partial / \partial x_j$ の多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ による冪 ∂^α を

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} = \prod_{j=1}^n \partial_j^{\alpha_j}$$

で定める。

以上の準備の下で多重指数を用いる基本的な命題を纏めて置こう。

命題 1 次は同値である。

(1)(二項定理)

$x, y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$(x + y)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x^{k-j} y^j = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ i+j=k}} \frac{k!}{i!j!} x^i y^j$$

(2)(多項定理)

$n, k \in \mathbb{Z}_{>0}, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j \right)^k = (x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha$$

(3)(ユークリッド空間に於ける二項定理)

$n \in \mathbb{Z}_{>0}, \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$(x + y)^\alpha = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} y^\beta = \sum_{\substack{(\beta, \gamma) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \\ \beta + \gamma = \alpha}} \frac{\alpha!}{\beta! \gamma!} x^\beta y^\gamma$$

(4)(ユークリッド空間に於ける内積の冪の展開)

$n, k \in \mathbb{Z}_{>0}, x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$(x \cdot y)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha y^\alpha$$

注 1. (1) は成立するので命題 1 の (1) から (4) は全て成立する。

注 2. (2) の別証明 $t \in \mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned} \exp \left(t \sum_{j=1}^n x_j \right) &= \prod_{j=1}^n \exp(tx_j) = \prod_{j=1}^n \sum_{\alpha_j \geq 0} \frac{1}{\alpha_j!} (tx_j)^{\alpha_j} = \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} (tx)^\alpha \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} x^\alpha \right) t^k \end{aligned}$$

となるので両辺を t に就いて k 回微分し $t = 0$ とすれば (2) を得る。

(証明)(1) \Rightarrow (2): (2) を n に関する次の命題と見做す:

(P) $_n$: 任意の $k \in \mathbb{Z}_{>0}, x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j \right)^k = \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k}} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

(P) $_n$ が全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して成立つ事を n に関する帰納法で示そう。

(P) $_1$ は $\alpha_1 = k$ 故両辺共に x_1^k となり成立する。 $n \geq 2$ とし (P) $_{n-1}$ が成立すると仮定し (P) $_n$

を導こう。

$$\sum_{j=1}^n x_j = \sum_{j=1}^{n-1} x_j + x_n \text{ として (1) を用いると}$$

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^k = \sum_{\substack{\ell+m=k \\ \ell, m \geq 0}} \frac{k!}{\ell!m!} \left(\sum_{j=1}^{n-1} x_j\right)^\ell x_n^m$$

そこで $(P)_{n-1}$ を用いると

$$\left(\sum_{j=1}^{n-1} x_j\right)^\ell = \sum_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}=\ell \\ \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \geq 0}} \frac{\ell!}{\alpha_1! \dots \alpha_{n-1}!} x_1^{\alpha_1} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$$

となるから m を α_n と書き換える事により

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^k &= \sum_{\substack{\ell+m=k \\ \ell, m \geq 0}} \sum_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}=\ell \\ \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \geq 0}} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_{n-1}! m!} x_1^{\alpha_1} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^m \\ &= \sum_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_n=k \\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0}} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_{n-1}! \alpha_n!} x_1^{\alpha_1} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

を得る。これが示すべき事であった。

(2)⇒(1): (2) の $n = 2$ の場合が (1) である。

(1)⇒(3): 定義により

$$(x+y)^\alpha = \prod_{j=1}^n (x_j + y_j)^{\alpha_j}$$

となる。ここで $\alpha_j = 0$ なる j が存在する (自明な) 場合も含めて右辺に (1) を用いると次の様に (3) が従う。

$$\begin{aligned} (x+y)^\alpha &= \prod_{j=1}^n \sum_{0 \leq \beta_j \leq \alpha_j} \binom{\alpha_j}{\beta_j} x_j^{\alpha_j - \beta_j} y_j^{\beta_j} \\ &= \sum_{0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1} \dots \sum_{0 \leq \beta_n \leq \alpha_n} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \dots \binom{\alpha_n}{\beta_n} x_1^{\alpha_1 - \beta_1} \dots x_n^{\alpha_n - \beta_n} \cdot y_1^{\beta_1} \dots y_n^{\beta_n} \\ &= \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha - \beta} y^\beta \end{aligned}$$

(3)⇒(1): (3) の $n = 1$ の場合が (1) である。

(2)⇒(4): $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

であるから (2) の x_j の代わりに $x_j y_j$ として (2) を適用すると

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n x_j y_j \right)^k &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} (x_1 y_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n y_n)^{\alpha_n} \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \cdot y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha y^\alpha \end{aligned}$$

となり (4) を得る。

(4) \Rightarrow (2): (4) に於いて $y = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ とすれば $y^\alpha = 1$ により (2) を得る。

命題 2 $n, k \in \mathbb{Z}_{>0}^n$ に対し次の等式が成立する :

$$(1) \quad \#\{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n; |\alpha| = k\} = \sum_{|\alpha|=k} 1 = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$

$$(2) \quad \#\{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n; |\alpha| \leq k\} = \sum_{|\alpha| \leq k} 1 = \frac{(n+k)!}{n!k!}$$

(証明) $t \in (0, 1)$ に対し $\varphi(t) = (1-t)^{-n}$ と置くと

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (1-t)^{-n} = \left(\sum_{\alpha_1=0}^{\infty} t^{\alpha_1} \right) \cdots \left(\sum_{\alpha_n=0}^{\infty} t^{\alpha_n} \right) \\ &= \sum_{\alpha \geq 0} t^{|\alpha|} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=j} t^{|\alpha|} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=k} 1 \right) t^k \end{aligned}$$

よって

$$\sum_{|\alpha|=k} 1 = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n(n+1) \cdots (n+k-1)}{k!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$

これより (1) が従う。さてこの右辺は $k=0$ なら 1 に等しく $k \geq 1$ なら

$$\begin{aligned} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} &= \frac{(n+k-1)!}{n!k!} \cdot n \\ &= \frac{(n+k-1)!}{n!k!} ((n+k) - k) \\ &= \frac{(n+k)!}{n!k!} - \frac{(n+(k-1))!}{n!(k-1)!} \end{aligned}$$

と表されるので

$$\begin{aligned}
 \sum_{|\alpha| \leq k} 1 &= \sum_{j=0}^k \sum_{|\alpha|=j} 1 \\
 &= \sum_{j=1}^k \sum_{|\alpha|=j} 1 + \sum_{|\alpha|=0} 1 \\
 &= \sum_{j=1}^k \left(\frac{(n+j)!}{n!j!} - \frac{(n+(j-1))!}{n!(j-1)!} \right) + 1 \\
 &= \left(\frac{(n+k)!}{n!k!} - 1 \right) + 1 = \frac{(n+k)!}{n!k!}
 \end{aligned}$$

となり (2) が従う。

命題 3 $n, k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $x \in \mathbb{R}^n$ に対し次の不等式が成立つ。

$$(1) \quad n^{-k/2} |x|^k \leq \left(\sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|^2 \right)^{1/2} \leq |x|^k$$

$$(2) \quad n^{-k/2} |x|^k \leq \left(\sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha| \leq \sqrt{\binom{n+k-1}{k}} \left(\sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{\binom{n+k-1}{k}} |x|^k$$

$$(3) \quad (n+1)^{-k/2} (1+|x|^2)^{k/2} \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |x^\alpha|^2 \right)^{1/2} \leq (1+|x|^2)^{k/2}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad (n+1)^{-k/2} (1+|x|^2)^{k/2} &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |x^\alpha|^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{|\alpha| \leq k} |x^\alpha| \leq \sqrt{\binom{n+k}{k}} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |x^\alpha|^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq \sqrt{\binom{n+k}{k}} (1+|x|^2)^{k/2}
 \end{aligned}$$

注 3. この形の不等式はフーリエ変数で用いられる事が多い。

(証明) 命題 1 の (4) を $x = y$ に適用し展開に現れる係数は全て正の整数である事に注意すると

$$|x|^{2k} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^{2\alpha} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |x^\alpha|^2 \geq \sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|^2$$

が得られる。一方、命題1の(2)を $x_1 = \dots = x_n = 1$ に適用すれば

$$\begin{aligned} |x|^{2k} &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |x^\alpha|^2 \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \right) \max_{|\alpha|=k} |x^\alpha|^2 = n^k \max_{|x|=k} |x^\alpha|^2 \\ &\leq n^k \sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|^2 \end{aligned}$$

が従う。以上で(1)が示された。さて

$$\left(\sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha| \right)^2 = \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=k} |x^{\alpha+\beta}|$$

の右辺の和の取り方に於いて $\alpha = \beta$ の場合はその一部であるから

$$\sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=k} |x^{\alpha+\beta}| \geq \sum_{|\alpha|=k} |x^{2\alpha}| = \sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|^2$$

となり(2)の二番目の不等式が従う。また命題2の(1)より

$$\begin{aligned} \left(\sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|^2 \right)^2 &= \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=k} |x^\alpha| |x^\beta| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=k} |x^\alpha|^2 + \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=k} |x^\beta|^2 \\ &= \binom{n+k-1}{k} \sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|^2 \end{aligned}$$

となるので(2)の三番目の不等式が得られる。(2)の最初と最後の不等式は(1)より従う。以上で(2)が示された。(3)の二つの不等式は上と同様に

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha|^2 &= \sum_{j=0}^k \sum_{|\alpha|=j} |x^{2\alpha}| \\ &\leq \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} |x^{2\alpha}| = \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} |x|^{2j} = (1 + |x|^2)^k \\ &\leq \left(\sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} \right) \max_{|\alpha|\leq k} |x^{2\alpha}| = \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} n^j \right) \max_{|\alpha|\leq k} |x^{2\alpha}| \\ &= (n+1)^k \max_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha|^2 \leq (n+1)^k \sum_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha|^2 \end{aligned}$$

として得られる。(4) は (3) と次の不等式より従う：

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq k} |x^\alpha|^2 &\leq \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{|\beta| \leq k} |x^{\alpha+\beta}| = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |x^\alpha| \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{|\beta| \leq k} |x^\alpha|^2 + \frac{1}{2} \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{|\beta| \leq k} |x^\beta|^2 \\ &= \binom{n+k}{k} \sum_{|\alpha| \leq k} |x^\alpha|^2 \end{aligned}$$

命題 4 (テイラーの公式) $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合、 $f \in C^{k+1}(U; \mathbb{C})$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $a \in U$ とする。 $h \in \mathbb{R}^n$ を $\{a + th \in \mathbb{R}^n; t \in [0, 1]\} \subset U$ を満たすものとする。と次のテイラーの公式が成立つ。

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(a) h^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{k+1}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^k (\partial^\alpha f)(a+th) h^\alpha dt$$

(証明) 一変数関数のテイラーの公式

$$\varphi(1) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \varphi^{(j)}(0) + \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k \varphi^{(k+1)}(t) dt$$

を考える。 $\varphi(t) = f(a+th)$ とすれば

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= (\nabla f)(a+th) \cdot h = \sum_{\ell=1}^n (\partial_\ell f)(a+th) h_\ell = \sum_{|\alpha|=1} (\partial^\alpha f)(a+th) h^\alpha, \\ \varphi^{(j)}(t) &= \sum_{|\alpha^{(1)}|=1} \cdots \sum_{|\alpha^{(j)}|=1} (\partial^{\alpha^{(1)}+\cdots+\alpha^{(j)}} f)(a+th) h^{\alpha^{(1)}+\cdots+\alpha^{(j)}} \\ &= \sum_{|\alpha|=j} (\#M(j, \alpha)) (\partial^\alpha f)(a+th) h^\alpha \end{aligned}$$

となる。ここに

$$M(j, \alpha) = \{(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(j)}) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0}^n)^j; |\alpha^{(1)}| = \cdots = |\alpha^{(j)}| = 1, \alpha^{(1)} + \cdots + \alpha^{(j)} = \alpha\}$$

とする。

$$N(j, \alpha) = \{(\ell_1, \dots, \ell_j) \in \{1, \dots, n\}^j; \alpha_i = \#\{m; \ell_m = i\}, 1 \leq i \leq n\}$$

とすると $\#M(j, \alpha) = \#N(j, \alpha)$ であり

$$\left(\sum_{\ell=1}^n x_\ell \right)^j = \sum_{|\alpha|=j} (\#N(j, \alpha)) x^\alpha$$

となるから命題 1 の (2) より

$$\#M(j, \alpha) = \#N(j, \alpha) = \frac{j!}{\alpha!}$$

が従う。故に $1 \leq j \leq k$ なる j に対し

$$\varphi^{(j)}(0) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(a) h^\alpha$$

及び

$$\varphi^{(k+1)}(t) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(k+1)!}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(a + th) h^\alpha$$

となり $\varphi(1) = f(a + h), \varphi(0) = f(a)$ であるから一変数のテイラーの公式より命題 4 が従う。

参考文献 : G.B. Folland, *Real Analysis*, Pure and Applied Mathematics.

島倉紀夫、楢円型偏微分作用素、紀伊国屋書店