

集合の生成する自由加群, R 加群のテンソル積

平成 19 年 12 月

小澤 徹

<http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html>

空でない集合 X 、単位元 1 を持つ環 R に対し、 X から R への写像で有限な台を持つもの全体の成す R 加群を $\mathcal{F}_0(X; R)$ と表す :

$$\mathcal{F}_0(X; R) = \{f : X \rightarrow R ; \#\{x \in X ; f(x) \neq 0\} < \infty\}$$

$x \in X$ に対し $\iota_x \in \mathcal{F}_0(X; R)$ が $\iota_x(x) = 1, \iota_x(y) = 0 (y \neq x)$ で定まる。このとき $\iota : x \mapsto \iota_x$ により X から $\mathcal{F}_0(X; R)$ への単射が定まる。 $x \in X$ に対し $\text{ev}_x : \mathcal{F}_0(X; R) \rightarrow R$ が $\text{ev}_x(f) = f(x)$ で定まる。このとき任意の $f \in \mathcal{F}_0(X; R)$ に対し

$$f = \sum_{x \in X} \text{ev}_x(f) \iota_x$$

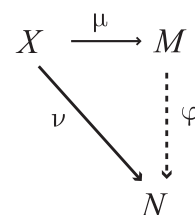
が成立つ (右辺の総和は f の台の有限性より常に有限和であり各点に於いて一つの項以外は 0 となる)。言い換えると $\mathcal{F}_0(X; R)$ 上

$$\text{id} = \sum_{x \in X} \text{ev}_x(\cdot) \iota_x$$

なる等式が成立つことになる。

定義 一つの空でない集合 X に対し、 R 加群 M と写像 $\mu : X \rightarrow M$ の組 (M, μ) が普遍的 (universal) であるとは次の性質が成立する事と定義する :

任意の R 加群 N と任意の写像 $\nu : X \rightarrow N$ に対し唯一つの準同型写像 $\varphi : M \rightarrow N$ が存在し $\varphi \circ \mu = \nu$ が成立つ。



命題 空でない集合 X に対し $(\mathcal{F}_0(X; R), \iota)$ は普遍的である。

(証明) R 加群 N と写像 $\nu : X \rightarrow N$ を与える。 $f \in \mathcal{F}_0(X; R)$ に対し

$$\varphi(f) = \sum_{x \in X} \text{ev}_x(f) \nu(x)$$

と置く。 φ は $\mathcal{F}_0(X; R)$ から N への準同型写像となり

$$(\varphi \circ \iota)(x) = \varphi(\iota_x) = \sum_{y \in X} \text{ev}_y(\iota_x) \nu(y) = \nu(x)$$

が任意の $x \in X$ に成立つので $\varphi \circ \iota = \nu$ が従う。最後に φ の一意性を示そう。 $\psi \circ \iota = \nu$ なる準同型写像 $\psi : \mathcal{F}_0(X; R) \rightarrow N$ があったとすると任意の $f \in \mathcal{F}_0(X; R)$ に対し

$$\begin{aligned}\psi(f) &= \psi\left(\sum_{x \in X} \text{ev}_x(f) \iota_x\right) \\ &= \sum_{x \in X} \text{ev}_x(f) \psi(\iota_x) \\ &= \sum_{x \in X} \text{ev}_x(f) (\psi \circ \iota)(x) \\ &= \sum_{x \in X} \text{ev}_x(f) \nu(x) = \varphi(f)\end{aligned}$$

となり $\psi = \varphi$ が従う。

定義 $\mathcal{F}_0(X; R)$ を X から生成された自由加群と謂う。 R 加群 M が自由加群であるとは、空でない集合 X が存在して M は $\mathcal{F}_0(X; R)$ と同型である事と定義する。

命題 R 加群 M に対し次は同値である。

- (1) M は自由加群である。
- (2) M は基底を持つ。

(証明)(1) \Rightarrow (2) : 定義により、空でない集合 X と同型写像 $\varphi : \mathcal{F}_0(X; R) \rightarrow M$ が存在する。任意の $y \in M$ に対し φ の全射性より $f \in \mathcal{F}_0(X; R)$ が存在して $y = \varphi(f)$ となる。このとき

$$\begin{aligned}y &= \varphi(f) = \varphi\left(\sum_{x \in X} \text{ev}_x(f) \cdot \iota_x\right) = \sum_{x \in X} \text{ev}_x(f) \varphi(\iota_x) \\ &= \sum_{x \in X} \text{ev}_x(f) (\varphi \circ \iota)(x)\end{aligned}$$

であるから $(\varphi \circ \iota)(X) = \{(\varphi \circ \iota)(x); x \in X\}$ は M の生成系となる。次に $\{c_j\}_1^n \subset R$, $\{x_j\}_1^n \subset X$ に対し $\sum_{j=1}^n c_j (\varphi \circ \iota)(x_j) = 0$ であるとする。このとき $\varphi\left(\sum_{j=1}^n c_j \iota_{x_j}\right) = 0$ となる。 φ の単射性より $\sum_{j=1}^n c_j \iota_{x_j} = 0$ となるので相異なる x_j 上の値を取る事により $c_1 = \dots = c_n = 0$ を得る。

(2) \Rightarrow (1) : R 加群 M の基底を X とする。 M は $\mathcal{F}_0(X; R)$ と同型である事を示せば良い。任意の $y \in M$ に対し $\{c_j\}_1^n \subset R$, $\{x_j\}_1^n \subset X$ が一意的に定まり $y = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ と表せる。このとき $\varphi(y) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi(x_j)$ と置けば φ は M から $\mathcal{F}_0(X; R)$ への同型写像となる。

単位元を持つ環 R に対し V, W を R 加群とする。 $\mathcal{F}_0(V \times W; R)$ を直積集合 $V \times W$ から生成された自由加群とする。 K を次の形で表される全ての元 $(x, x' \in V, y, y' \in W, r, r' \in R)$

$$\iota(rx+r'y', y) - r\iota(x, y) - r'\iota(x', y)$$

$$\iota(x, ry+r'y') - r\iota(x, y) - r'\iota(x, y')$$

の生成する $\mathcal{F}_0(V \times W; R)$ の部分加群とする。

定義 V と W のテンソル積を商加群 $\mathcal{F}_0(V \times W; R)/K$ と定義し $V \otimes_R W$ または $V \otimes W$ と表す。付随する完全列を

$$0 \rightarrow K \rightarrow \mathcal{F}_0(V \times W; R) \xrightarrow{j} V \otimes_R W \rightarrow 0$$

と表し $\iota_{(x,y)} \in \mathcal{F}_0(V \times W; R)$ の j による像を $x \otimes y$ と表す：

$$x \otimes y = j(\iota_{(x,y)}) = (j \circ \iota)(x, y)$$

K の定義と j の準同型性により

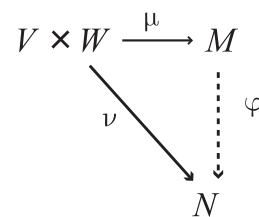
$$(rx + r'x') \otimes y = r(x \otimes y) + r'(x' \otimes y)$$

$$x \otimes (ry + r'y') = r(x \otimes y) + r'(x \otimes y')$$

が従う。これより夫々 $0 \otimes y = x \otimes 0 = 0$ が成立する。

定義 R 加群 V, W に対し、 R 加群 M と双線型写像 $\mu : V \times W \rightarrow M$ の組 (M, μ) が普遍的 (universal) であるとは次の性質が成立する事と定義する：

任意の R 加群 N と任意の双線型写像 $\nu : V \times W \rightarrow N$ に対し唯一つの準同型写像 $\varphi : M \rightarrow N$ が存在し $\varphi \circ \mu = \nu$ が成立つ。



命題 R 加群 V, W に対し $(V \otimes_R W, j \circ \iota)$ は普遍的である。

(証明) R 加群 N と双線型写像 $\nu : V \times W \rightarrow N$ を与える。 $(\mathcal{F}_0(V \times W; R), \iota)$ の普遍性により、唯一つの準同型写像 $\tilde{\varphi} : \mathcal{F}_0(V \times W; R) \rightarrow N$ が存在し $\tilde{\varphi} \circ \iota = \nu$ が成立つ。 $\tilde{\varphi}$ は $f \in \mathcal{F}_0(V \times W; R)$ に対し

$$\tilde{\varphi}(f) = \sum_{(x,y) \in V \times W} \text{ev}_{(x,y)}(f) \nu(x, y)$$

なる表示を持つ。 $\tilde{\varphi} \circ \iota = \nu$ であり ν は双線型であるから $K \subset \text{Ker} \tilde{\varphi}$ となる。よって $\tilde{\varphi} = \varphi \circ j$ なる準同型 $\varphi : \mathcal{F}_0(V \times W; R)/K \rightarrow N$ が定まる。よって φ は $V \otimes_R W$ から N への準同型写像で $\nu = \tilde{\varphi} \circ \iota = \varphi \circ (j \circ \iota)$ を満たす。

最後に φ の一意性を示そう。 $\psi \circ (j \circ \iota) = \nu$ なる準同型 $\psi : V \otimes_R W \rightarrow N$ があつたとする。 $V \otimes_R W = \text{Im } j$ なので任意の $z \in V \otimes_R W$ に対し $f \in \mathcal{F}_0(V \times W; R)$ があつて $z = j(f)$ となる。 f を

$$f = \sum_{(x,y) \in V \times W} \text{ev}_{(x,y)}(f) \iota(x,y)$$

と表すと、 ψ, j, φ の準同型性及び $\psi \circ j \circ \iota = \nu = \varphi \circ j \circ \iota$ より

$$\begin{aligned} \psi(z) &= (\psi \circ j)(f) = \sum_{(x,y) \in V \times W} \text{ev}_{(x,y)}(f) (\psi \circ j)(\iota(x,y)) \\ &= \sum_{(x,y) \in V \times W} \text{ev}_{(x,y)}(f) (\psi \circ j \circ \iota)(x,y) \\ &= \sum_{(x,y) \in V \times W} \text{ev}_{(x,y)}(f) \nu(x,y) \\ &= \sum_{(x,y) \in V \times W} \text{ev}_{(x,y)}(f) (\varphi \circ j \circ \iota)(x,y) \\ &= \sum_{(x,y) \in V \times W} \text{ev}_{(x,y)}(f) (\varphi \circ j)(\iota(x,y)) \\ &= (\varphi \circ j)(f) \\ &= \varphi(z) \end{aligned}$$

となり $\psi = \varphi$ が従う。

参考文献： 彌永昌吉、小平邦彦、現代数学概説、岩波書店
H.K. ニッカーソン、D.C. スペンサー、N.E. スティーンロッド、
現代ベクトル解析、岩波書店