集合の生成する自由加群, R 加群のテンソル積

平成 19 年 12 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

空でない集合 X、単位元 1 を持つ環 R に対し、X から R への写像で有限な台を持つもの全体の成す R 加群を $\mathcal{F}_0(X;R)$ と表す：

$$\mathcal{F}_0(X;R) = \{f : X \to R\ ;\ \sharp\{x \in X; f(x) \neq 0\} < \infty\}$$

$x \in X$ に対し $\iota_x \in \mathcal{F}_0(X;R)$ が $\iota_x(x) = 1,\ \iota_x(y) = 0\ (y \neq x)$ で定まる。このとき $\iota : x \mapsto \iota_x$ により X から $\mathcal{F}_0(X;R)$ への単射が定まる。$x \in X$ に対し $\mathrm{ev}_x : \mathcal{F}_0(X;R) \to R$ が $\mathrm{ev}_x(f) = f(x)$ で定まる。このとき任意の $f \in \mathcal{F}_0(X;R)$ に対し

$$f = \sum_{x \in X} \mathrm{ev}_x(f)\iota_x$$

が成立つ (右辺の総和は f の台の有限性より常に有限和であり各点に於いて一つの項以外は 0 となる)。言い換えると $\mathcal{F}_0(X;R)$ 上

$$\mathrm{id} = \sum_{x \in X} \mathrm{ev}_x(\cdot)\iota_x$$

なる等式が成立つことになる。

定義　一つの空でない集合 X に対し、R 加群 M と写像 $\mu : X \to M$ の組 (M, μ) が普遍的 (universal) であるとは次の性質が成立する事と定義する：

　任意の R 加群 N と任意の写像 $\nu : X \to N$ に対し唯一つの準同型写像 $\varphi : M \to N$ が存在し $\varphi \circ \mu = \nu$ が成立つ。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\nu"'] & M \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & N \end{tikzcd}$$

命題　空でない集合 X に対し $(\mathcal{F}_0(X;R), \iota)$ は普遍的である。

(証明)　R 加群 N と写像 $\nu : X \to N$ を与える。$f \in \mathcal{F}_0(X;R)$ に対し

$$\varphi(f) = \sum_{x \in X} \mathrm{ev}_x(f)\nu(x)$$

と置く。φ は $\mathcal{F}_0(X;R)$ から N への準同型写像となり

$$(\varphi \circ \iota)(x) = \varphi(\iota_x) = \sum_{y \in X} \mathrm{ev}_y(\iota_x)\nu(y) = \nu(x)$$

が任意の $x \in X$ に成立つので $\varphi \circ \iota = \nu$ が従う。最後に φ の一意性を示そう。$\psi \circ \iota = \nu$ なる準同型写像 $\psi : \mathcal{F}_0(X;R) \to N$ があったとすると任意の $f \in \mathcal{F}_0(X;R)$ に対し

$$\begin{aligned} \psi(f) &= \psi\left(\sum_{x\in X} \mathrm{ev}_x(f)\iota_x\right) \\ &= \sum_{x\in X} \mathrm{ev}_x(f)\psi(\iota_x) \\ &= \sum_{x\in X} \mathrm{ev}_x(f)(\psi\circ\iota)(x) \\ &= \sum_{x\in X} \mathrm{ev}_x(f)\nu(x) = \varphi(f) \end{aligned}$$

となり $\psi = \varphi$ が従う。

定義　$\mathcal{F}_0(X;R)$ を X から生成された自由加群と謂う。R 加群 M が自由加群であるとは、空でない集合 X が存在して M は $\mathcal{F}_0(X;R)$ と同型である事と定義する。

命題　R 加群 M に対し次は同値である。

(1) M は自由加群である。

(2) M は基底を持つ。

(証明)**(1) ⇒ (2)：**　定義により、空でない集合 X と同型写像 $\varphi : \mathcal{F}_0(X;R) \to M$ が存在する。任意の $y \in M$ に対し φ の全射性より $f \in \mathcal{F}_0(X;R)$ が存在して $y = \varphi(f)$ となる。このとき

$$\begin{aligned} y &= \varphi(f) = \varphi\left(\sum_{x\in X} \mathrm{ev}_x(f)\cdot\iota_x\right) = \sum_{x\in X} \mathrm{ev}_x(f)\varphi(\iota_x) \\ &= \sum_{x\in X} \mathrm{ev}_x(f)(\varphi\circ\iota)(x) \end{aligned}$$

であるから $(\varphi\circ\iota)(X) = \{(\varphi\circ\iota)(x); x \in X\}$ は M の生成系となる。次に $\{c_j\}_1^n \subset R,\ \{x_j\}_1^n \subset X$ に対し $\displaystyle\sum_{j=1}^n c_j(\varphi\circ\iota)(x_j) = 0$ であるとすると $\varphi\left(\displaystyle\sum_{j=1}^n c_j\iota_{x_j}\right) = 0$ となる。φ の単射性より $\displaystyle\sum_{j=1}^n c_j\iota_{x_j} = 0$ となるので相異なる x_j 上の値を取る事により $c_1 = \cdots = c_n = 0$ を得る。

(2) ⇒ (1)：　R 加群 M の基底を X とする。M は $\mathcal{F}_0(X;R)$ と同型である事を示せば良い。任意の $y \in M$ に対し $\{c_j\}_1^n \subset R,\ \{x_j\}_1^n \subset X$ が一意的に定まり $y = \displaystyle\sum_{j=1}^n c_jx_j$ と表せる。このとき $\varphi(y) = \sum_{j=1}^n c_j\iota_{x_j}$ と置けば φ は M から $\mathcal{F}_0(X;R)$ への同型写像となる。

単位元を持つ環 R に対し V, W を R 加群とする。$\mathcal{F}_0(V\times W; R)$ を直積集合 $V\times W$ から生成された自由加群とする。K を次の形で表される全ての元 $(x, x' \in V, y, y' \in W, r, r' \in R)$

$$
\begin{gathered}
\iota_{(rx+r'x',y)} - r\iota_{(x,y)} - r'\iota_{(x',y)} \\
\iota_{(x,ry+r'y')} - r\iota_{(x,y)} - r'\iota_{(x,y')}
\end{gathered}
$$

の生成する $\mathcal{F}_0(V\times W; R)$ の部分加群とする。

定義　V と W のテンソル積を商加群 $\mathcal{F}_0(V\times W; R)/K$ と定義し $V\otimes_R W$ または $V\otimes W$ と表す。付随する完全列を

$$0 \to K \to \mathcal{F}_0(V\times W; R) \xrightarrow{j} V\otimes_R W \to 0$$

と表し $\iota_{(x,y)} \in \mathcal{F}_0(V\times W; R)$ の j による像を $x\otimes y$ と表す：

$$x\otimes y = j(\iota_{(x,y)}) = (j\circ\iota)(x,y)$$

K の定義と j の準同型性により

$$
\begin{aligned}
(rx+r'x')\otimes y &= r(x\otimes y) + r'(x'\otimes y) \\
x\otimes(ry+r'y') &= r(x\otimes y) + r'(x\otimes y')
\end{aligned}
$$

が従う。これより夫々 $0\otimes y = x\otimes 0 = 0$ が成立する。

定義　R 加群 V, W に対し、R 加群 M と双線型写像 $\mu : V\times W \to M$ の組 (M, μ) が普遍的 (universal) であるとは次の性質が成立する事と定義する：

　任意の R 加群 N と任意の双線型写像 $\nu : V\times W \to N$ に対し唯一つの準同型写像 $\varphi : M \to N$ が存在し $\varphi\circ\mu = \nu$ が成立つ。

$$
\begin{tikzcd}
V\times W \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\nu"'] & M \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\
 & N
\end{tikzcd}
$$

命題　R 加群 V, W に対し $(V\otimes_R W, j\circ\iota)$ は普遍的である。

(証明)　R 加群 N と双線型写像 $\nu : V\times W \to N$ を与える。$(\mathcal{F}_0(V\times W; R), \iota)$ の普遍性により、唯一つの準同型写像 $\tilde{\varphi} : \mathcal{F}_0(V\times W; R) \to N$ が存在し $\tilde{\varphi}\circ\iota = \nu$ が成立つ。$\tilde{\varphi}$ は $f \in \mathcal{F}_0(V\times W; R)$ に対し

$$\tilde{\varphi}(f) = \sum_{(x,y)\in V\times W} \mathrm{ev}_{(x,y)}(f)\nu(x,y)$$

なる表示を持つ。$\tilde{\varphi}\circ\iota = \nu$ であり ν は双線型であるから $K \subset \mathrm{Ker}\tilde{\varphi}$ となる。よって $\tilde{\varphi} = \varphi\circ j$ なる準同型 $\varphi : \mathcal{F}_0(V\times W; R)/K \to N$ が定まる。よって φ は $V\otimes_R W$ から N への準同型写像で $\nu = \tilde{\varphi}\circ\iota = \varphi\circ(j\circ\iota)$ を満たす。

最後に φ の一意性を示そう。$\psi \circ (j \circ \iota) = \nu$ なる準同型 $\psi : V \otimes_R W \to N$ があったとする。$V \otimes_R W = \mathrm{Im}\ j$ なので任意の $z \in V \otimes_R W$ に対し $f \in \mathcal{F}_0(V \times W; R)$ があって $z = j(f)$ となる。f を

$$f = \sum_{(x,y) \in V \times W} \mathrm{ev}_{(x,y)}(f) \iota_{(x,y)}$$

と表すと、ψ, j, φ の準同型性及び $\psi \circ j \circ \iota = \nu = \varphi \circ j \circ \iota$ より

$$\begin{aligned}
\psi(z) &= (\psi \circ j)(f) = \sum_{(x,y) \in V \times W} \mathrm{ev}_{(x,y)}(f)(\psi \circ j)(\iota_{(x,y)}) \\
&= \sum_{(x,y) \in V \times W} \mathrm{ev}_{(x,y)}(f)(\psi \circ j \circ \iota)(x, y) \\
&= \sum_{(x,y) \in V \times W} \mathrm{ev}_{(x,y)}(f)\nu(x, y) \\
&= \sum_{(x,y) \in V \times W} \mathrm{ev}_{(x,y)}(f)(\varphi \circ j \circ \iota)(x, y) \\
&= \sum_{(x,y) \in V \times W} \mathrm{ev}_{(x,y)}(f)(\varphi \circ j)(\iota_{(x,y)}) \\
&= (\varphi \circ j)(f) \\
&= \varphi(z)
\end{aligned}$$

となり $\psi = \varphi$ が従う。

参考文献： 彌永昌吉、小平邦彦、現代数学概説、岩波書店
H.K. ニッカーソン、D.C. スペンサー、N.E. スティーンロッド、
現代ベクトル解析、岩波書店