テンソル空間

平成 26 年 11 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

ベクトル空間のテンソル積を基礎としてテンソル空間を定義し、その基本的な性質を纏めて置こう。ベクトル空間の係数体 K は実数体 $\mathbb{R}$ 又は複素数体 $\mathbb{C}$ とする。

1．集合の生成するベクトル空間

空でない集合 S 上の函数で有限な台をもつもの全体を $\mathscr{F}_0(S)$ と表す：

$$\mathscr{F}_0(S) = \{f : S \to K;\ \sharp\mathrm{Supp}f < \infty\}$$

ここに $\mathrm{Supp}f = \{x \in S; f(x) \neq 0\}$ は f の台とする。各点毎の和とスカラー倍

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x),\\ (af)(x) &= af(x)\end{aligned}$$

により $\mathscr{F}_0(S)$ に和とスカラー倍が定義され $\mathscr{F}_0(S)$ はベクトル空間を成す。各 $x \in S$ に対し

$$\iota_x(y) = \begin{cases} 1,\ y = x \\ 0,\ y \in S \setminus \{x\} \end{cases}$$

として $\iota_x \in \mathscr{F}_0(S)$ が定まる。$\iota(x) = \iota_x$ と置くと写像 $\iota : S \to \mathscr{F}_0(S)$ が定まり $\iota(x) = \iota(y) \Leftrightarrow \iota_x = \iota_y \Rightarrow \iota_x(y) = \iota_y(y) = 1 \Rightarrow x = y$ より ι は単射となる。各 $x \in S$ に対し $\mathrm{ev}_x : \mathscr{F}_0(S) \to K$ が $\mathrm{ev}_x(f) = f(x)$ で定まる。このとき任意の $f \in \mathscr{F}_0(S)$ に対し

$$f = \sum_{x\in S} f(x)\iota_x = \sum_{x\in S} \mathrm{ev}_x(f)\iota_x$$

が成立つ。ここに総和は $\mathrm{Supp}f$ の有限個の点を除いて零であり、$\mathrm{Supp}f$ 上では一つの項のみ零でない値を取る事に注意する。上の等式は $\mathscr{F}_0(S)$ 内の線型変換としての恒等写像の分解

$$\mathrm{id} = \sum_{x\in S} \mathrm{ev}_x(\cdot)\iota_x$$

を与えていると見做す事が出来る。

命題 1　$(\mathscr{F}_0(S), \iota)$ は次の意味で**普遍的** universal である。即ち任意のベクトル空間 X と任意の写像 $\varphi : S \to X$ に対し唯一つの線型写像 $T : \mathscr{F}_0(S) \to X$ が存在し φ は T と ι に分解される：

$$\varphi = T \circ \iota$$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{F}_0(S) \arrow[d, dashed, "T"] \\ & X \end{tikzcd}$$

(証明)　ベクトル空間 X 及び写像 $\varphi : S \to X$ を与える。$f \in \mathscr{F}_0(S)$ に対し

$$T(f) = \sum_{x\in S} \mathrm{ev}_x(f)\varphi(x) \in X$$

と置く。任意の $a, b \in K$ 及び $f, g \in \mathscr{F}_0(S)$ に対し

$$\begin{aligned} T(af+bf) = &\sum_{x\in S} \mathrm{ev}_x(af+bg)\varphi(x) = \sum_{x\in S} (af(x)+bg(x))\varphi(x) \\ &= a\sum_{x\in S} \mathrm{ev}_x(f)\varphi(x) + b\sum_{x\in S} \mathrm{ev}_x(g)\varphi(s) = aT(f) + bT(g) \end{aligned}$$

となるから $T : \mathscr{F}_0(S) \to X$ は線型写像となる。また任意の $x \in S$ に対し

$$(T\circ\iota)(x) = T(\iota_x) = \sum_{y\in S} \mathrm{ev}_y(\iota_x)\varphi(y) = \sum_{y\in S} \iota_x(y)\varphi(y) = \varphi(x)$$

となるから $\varphi = T\circ\iota$ が従う。もう一つ $\varphi = T'\circ\iota$ を満たす線型写像 $T' : \mathscr{F}_0(S) \to X$ が在ったとすると任意の $f \in \mathscr{F}_0(S)$ に対し

$$\begin{aligned} T'(f) = T'(&\sum_{x\in S} \mathrm{ev}_x(f)\iota_x) = \sum_{x\in S} \mathrm{ev}_x(f)T'(\iota_x) \\ =&\sum_{x\in S} \mathrm{ev}_x(f)(T'\circ\iota)(x) = \sum_{x\in S} \mathrm{ev}_x(f)\varphi(x) = T(f) \end{aligned}$$

となるので $T' = T$ が従う。

2．ベクトル空間のテンソル積の定義

三つのベクトル空間 X, Y, Z に対し積ベクトル空間 $X\times Y$ から Z への写像 $B : X\times Y \to Z$ が**双線型** bilinear であるとは各々の変数に就いて線型である事と定義する。即ち任意の $x \in X$ に対し $B(x,\cdot) : Y \ni y \mapsto B(x,y) \in Z$ は線型で、任意の $y \in Y$ に対し $B(\cdot,y) : X \ni x \mapsto B(x,y) \in Z$ は線型である事と定義する。即ち、任意の $x \in X$, 任意の $a, a' \in K$, 任意の $y, y' \in Y$ に対し等式

$$B(x, ay + a'y') = aB(x,y) + a'B(x,y')$$

が成立ち、任意の $y \in Y$, 任意の $a, a' \in K$, 任意の $x, x' \in X$ に対し等式

$$B(ax + a'x', y) = aB(x,y) + a'B(x',y)$$

が成立つ事と定義する。$X \times Y$ から Z への双線型写像全体の集合を $L(X,Y;Z)$ と表す。$L(X,Y;Z)$ は各点毎の和とスカラー倍

$$\begin{aligned} &(B+B')(x,y) = B(x,y) + B'(x,y), \\ &(aB)(x,y) = aB(x,y), \end{aligned}$$

によりベクトル空間を成す。

定理 1　X, Y を二つのベクトル空間とする。この時ベクトル空間 Z 及び $\rho \in L(X, Y; Z)$ に対し次は同値である。

(1)　任意のベクトル空間 Z' 及び任意の $B \in L(X, Y; Z')$ に対し
　唯一つの $T \in L(Z; Z')$ が存在し $B = T \circ \rho$ が成立つ。

(2)　(Z, ρ) は次の二つの性質を満たす。

(T1)　Z は ρ の像に因って生成される：$Z = \mathrm{Span}(\mathrm{Im}\,\rho)$

(T2)　任意のベクトル空間 Z' 及び任意の
　$B \in L(X, Y; Z')$ に対し $T \in L(Z; Z')$ が存在し
　$B = T \circ \rho$ が成立つ。

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "B"'] & Z \arrow[d, dashed, "T"] \\ & Z' \end{tikzcd}$$

（証明）(1)⇒(2)：(T1) を示そう。$Z' = \mathrm{Span}(\mathrm{Im}\ \rho)$ と置く。B を ρ の値域を制限した $\rho' : X \times Y \to Z'$ とすれば (1) により唯一つの $T \in L(Z; Z')$ が存在し $\rho' = T \circ \rho$ が成立つ。Z' から Z への埋め込みを ι とすると $\rho = \iota \circ \rho'$ となるので $\rho = \iota \circ T \circ \rho$ が従う。故に $\iota \circ T : Z \to Z$ は $\rho = (\iota \circ T) \circ \rho$ を満たす線型写像であるが Z 上の恒等写像 $\mathrm{id} : Z \to Z$ もそうであり (1) を $B = \rho, Z' = Z, T = \mathrm{id}$ として適用したものが成立つ。従って (1) の一意性により $\iota \circ T = \mathrm{id}$ が成立つ。よって ι は全射となり $Z' = Z$ を得る。これが示すべき事であった。

(2)⇒(1)：与えられた $B \in L(X, Y; Z')$ に関する $B = T \circ \rho$ なる $T \in L(Z; Z')$ の一意性を示せば良い。もう一つの $B = T' \circ \rho$ なる $T' \in L(Z; X')$ を取る。(T1) により任意の $z \in X$ に対し $\sharp I < \infty$ 及び $c_i \in K,\ (x_i, y_i) \in X \times Y, i \in I$ が存在し $z = \sum_{i \in z} c_i \rho(x_i, y_i)$ と表される。このとき

$$\begin{aligned} T(z) &= T(\sum_{i \in z} c_i \rho(x_i, y_i)) = \sum_{i \in I} c_i (T \circ \rho)(x_i, y_i) = \sum_{i \in I} c_i B(x_i, y_i) \\ &= \sum_{i \in I} c_i (T' \circ \rho)(x_i, y_i) = T'(\sum_{i \in I} c_i \rho(x_i, y_i)) = T'(z) \end{aligned}$$

となるので $T = T'$ が従う。

定理 2　二つのベクトル空間 X, Y に対し定理 1 の同値な命題 (1) 及び（又は）(2) を満たすベクトル空間 Z と $\rho \in L(X, Y; Z)$ の組 (Z, ρ) が存在する。この様なベクトル空間 Z' と

$\rho' \in L(X, Y; Z')$ の組 (Z', ρ') に対し唯一つの線型同型写像 $T' : Z \to Z'$ が存在し $\rho' = T' \circ \rho$ を満たす。

（証明）　積ベクトル空間 $X \times Y$ の生成するベクトル空間 $\mathscr{F}_0(X \times Y)$ を導入する：

$$\mathscr{F}_0(X \times Y) = \{f : X \times Y \to K;\ \sharp\mathrm{Supp} f < \infty\}$$

双線型写像であれば零を与える組を想定して $\mathscr{F}_0(X\times Y)$ の部分集合 M_1, M_2 を次で定義する：

$$M_1 = \{\iota_{(ax+a'x',y)} - a\iota_{(x,y)} - a'\iota_{(x',y)} \in \mathscr{F}_0(X \times Y); x, x' \in X, y \in Y, a, a' \in K\}$$

$$M_2 = \{\iota_{(x,ay+a'y')} - a\iota_{(x,y)} - a'\iota_{(x,y')} \in \mathscr{F}_0(X \times Y); x \in X, y, y' \in Y, a, a' \in K\}$$

$M_1 \cup M_2$ の生成する $\mathscr{F}_0(X \times Y)$ の部分空間を M とする：$M = \mathrm{Span}(M_0 \cup M_1)$
$\mathscr{F}_0(X \times Y)$ を M で割った商ベクトル空間を Z とする：$Z = \mathscr{F}_0(X \times Y)/M$
付随する自然な射影を π と表す：$\pi : \mathscr{F}_0(X \times Y) \to Z$

π は線型全射で $\mathrm{Ker}\ \pi = M$ である。そこで $\rho = \pi \circ \iota : X \times Y \to Z$ とすると (Z, ρ) が求めるのものである事を示そう。

ρ の双線型性：$a, a' \in K$ 及び $x, x' \in X, y, y' \in Y$ を与える。このとき

$$\iota_{(ax+a'x',y)} - a\iota_{(x,y)} - a'\iota_{(x',y)} \in M_1,\ \iota_{(x,ay+a'y')} - a\iota_{(x,y)} - a'\iota_{(x,y')} \in M_2$$

であるから

$$\pi\left(\iota_{(ax+a'x',y)} - a\iota_{(x,y)} - a'\iota_{(x',y)}\right) = 0,\ \pi\left(\iota_{(x,ay+a'y')} - a\iota_{(x,y)} - a'\iota_{(x,y')}\right) = 0$$

が従う。π の線型性と $\rho = \pi \circ \iota$ を用いると

$$\rho(ax + a'x', y) - a\rho(x, y) - a'\rho(x', y) = 0,\ \rho(x, ay + a'y') - a\rho(x, y) - a'\rho(x, y') = 0$$

即ち ρ の双線型性が従う。

(T1) の検証：任意の $\xi \in Z = \mathscr{F}_0(X \times Y)/M$ に対し $f \in \mathscr{F}_0(X \times Y)$ が存在し $\xi = \pi(f)$ と表される。f は

$$f = \sum_{(x,y)\in X\times Y} \mathrm{ev}_{(x,y)}(f)\iota_{(x,y)}$$

と表されるから π の線型性より

$$\begin{aligned}\xi = \pi(f) &= \sum_{(x,y)\in X\times Y} \mathrm{ev}_{(x,y)}(f)\pi(\iota_{(x,y)}) \\ &= \sum_{(x,y)\in X\times Y} \mathrm{ev}_{(x,y)}(f)(\pi \circ \iota)(x, y) \in \mathrm{Span}(\mathrm{Im}(\pi \circ \iota))\end{aligned}$$

が従う。即ち $Z = \mathrm{Span}(\mathrm{Im}\ \rho)$ が成立つ。

(T2) の検証：任意のベクトル空間 Z' 及び任意の $B \in L(X, Y; Z')$ を取る。命題 1 より $(\mathscr{F}_0(X \times Y), \iota)$ の普遍性が従うので唯一つの $T \in L(\mathscr{F}_0(X \times Y); Z')$ が存在し $B = T \circ \iota$ が成立つ。このとき $f \in \mathscr{F}_0(X \times Y)$ に対し $T(f)$ は

$$T(f) = \sum_{(x,y) \in X \times Y} \mathrm{ev}_{(x,y)}(f) T(\iota_{(x,y)}) = \sum_{(x,y) \in X \times Y} \mathrm{ev}_{(x,y)}(f) B(x, y)$$

なる表示を持つ。さて $f \in M$ に対し $a_i, a'_i, c_i \in K; x_i, x'_i \in X; y_i \in Y (i \in I)$ 及び $a_j, a'_j, c_j \in K; x_j \in X; y_j, y'_j \in Y (j \in J)$ が存在し $\sharp I, \sharp J < \infty$,

$$\begin{aligned} f = &\sum_{i \in I} c_i \big(\iota_{(a_i x_i + a'_i x'_i, y_i)} - a_i \iota_{(x_i, y_i)} - a'_i \iota_{(x'_i, y_i)}\big) \\ &+ \sum_{j \in I} c_j \big(\iota_{(x_j, a_j y_j + a'_j y'_j)} - a_j \iota_{(x_j, y_j)} - a'_j \iota_{(x_j, y'_j)}\big) \end{aligned}$$

なる表示が成立つ。このとき $T \circ \iota = B$ であり B は多重線型であるから

$$\begin{aligned} T(f) = &\sum_{i \in I} c_i (B(a_i x_i + a'_i x'_i, y_i) - a_i B(x_i, y_i) - a'_i B(x'_i, y_i)) \\ &+ \sum_{i \in I} c_i (B(x_j, a'_j y_j + a'_j y'_j) - a_j B(x_j, y_j) - a'_j B(x'_j, y'_j)) = 0 \end{aligned}$$

を得る。即ち $M \subset \mathrm{Ker}\, T$ を得る。任意の $\xi \in Z = \mathscr{F}_0(X \times Y))/M$ に対し $f \in \mathscr{F}_0(X \times Y)$ が存在し $\xi = \pi(f)$ となるので $\tilde{T}(\xi) = T(f)$ と置く。この定義は $\xi = \pi(f)$ なる f の取り方に依存しない。実際 $\xi = \pi(f')$ なる $f' \in \mathscr{F}_0(X \times Y)$ に対し $f - f' \in \mathrm{Ker}\, \pi = M \subset \mathrm{Ker}\, T$ となるので $T(f) = T(f')$ が従う。$\tilde{T} : Z \to Z'$ は線型である。実際 $a, b \in K$ 及び $\xi, \eta \in Z$ に対し $\xi = \pi(f), \eta = \pi(g)$ なる $f, g \in \mathscr{F}_0(X \times Y)$ を取れば $a\xi + b\eta = a\pi(f) + b\pi(g) = \pi(af + bg)$ であり $\tilde{T}(a\xi + b\eta) = T(af + bg) = aT(g) + bT(g) = a\tilde{T}(\xi) + b\tilde{T}(g)$ となるからである。以上より $\tilde{T} \in L(Z; Z')$ は $T = \tilde{T} \circ \pi$ 及び $B = T \circ \iota = \tilde{T} \circ (\pi \circ \iota) = \tilde{T} \circ \rho$ を満たす事が示された。

最後に一意性を示そう。定理 1 の (1) を満たすもう一つの組 (Z', ρ') が在ったとする。$\rho \in L(X, Y; Z')$ に対し (1) を適用すれば $\rho' = T \circ \rho$ なる唯一つの $T \in L(Z; Z')$ の存在が従う。一方 (Z, ρ) と (Z', ρ') の役割を変換すれば $\rho = \tilde{T} \circ \rho'$ なる唯一つの $\tilde{T} \in L(Z'; Z)$ の存在が従う。このとき $\rho = \tilde{T} \circ \rho' = (\tilde{T} \circ T) \circ \rho$ が成立つ。定理 1 の (1) に於いて $Z' = Z$ 及び $B = \rho$ とすれば $\tilde{T} \circ T$ も id_Z も $B = T \circ \rho$ なる $T \in L(Z; Z)$ であるから一意性により $\tilde{T} \circ T = \mathrm{id}_Z$ を得る。同様に $\rho' = T \circ \rho = (T \circ \tilde{T}) \circ \rho'$ なる関係に一意性を適用すれば $T \circ \tilde{T} = \mathrm{id}_{Z'}$ を得る。これより T は同型で $T^{-1} = \tilde{T}$ である事が従う。

定義　ベクトル空間 X, Y に対し定理 2 で定まるベクトル空間 Z 及び双線型写像 $\rho \in L(X, Y; Z)$ の組 (Z, ρ) を X と Y との**テンソル積**と謂い $Z = X \otimes Y, \rho(x, y) = x \otimes y$ と表す。$\rho : X \times Y \to X \otimes Y$ をテンソル積 $X \otimes Y$ の**標準写像**と謂う。

命題 2　X, Y, Z をベクトル空間とする。$B \in L(X, Y; Z)$ に対し $T \in L(X \otimes Y; Z)$ が唯一つ存在して $B = T \circ \rho$ を満たす。そこで $T = \varphi(B)$ と置く。このとき $\varphi : L(X, Y; Z) \ni B \mapsto \varphi(B) \in L(X \otimes Y; Z)$ は線型同型となる。

(証明)　$a, a' \in K$ 及び $B, B' \in L(X, Y; Z)$ を与える。φ の定義により $B = \varphi(B) \circ \rho$ 及び $B' = \varphi(B') \circ \rho$ が成立つ。従って $aB + a'B' = (a\varphi(B) + a'\varphi(B')) \circ \rho$ が成立つ。一方 $aB + a'B' = \varphi(aB + a'B') \circ \rho$ であり一意性により $\varphi(aB + a'B') = a\varphi(B) + a'\varphi(B')$ が従い $\varphi \in L(L(X, Y; Z); L(X \otimes Y; Z))$ を得る。$\varphi(B) = 0$ なる $B \in L(X; Y; Z)$ は $B = \varphi(B) \circ \rho = 0$ を満たすので φ は単射である。任意の $T \in L(X \otimes Y; Z)$ に対し $B \equiv T \circ \rho$ と置けば一意性により $T = \varphi(B)$ となり T の全射性が従う。

系　$(X \otimes Y)^* = L(X \otimes Y; K) \simeq L(X, Y; K)$

定理３　ベクトル空間 X 及び Y の基底を夫々$(e_i; i \in I)$ 及び $(f_j; j \in J)$ とすると $(\rho(e_i, f_j); (i, j) \in I \times J)$ は $X \otimes Y$ の基底を成す。X と Y 共に有限次元ならば $X \otimes Y$ も有限次元で $\dim(X \otimes Y) = (\dim X)(\dim Y) = (\sharp I)(\sharp J)$ が成立つ。

(証明)　I 及び J の有限部分集合 I' 及び J' 更に $I' \times J'$ を添字集合とする (c_{ij}) に対し

$$\sum_{(i,j) \in I' \times J'} c_{ij} \rho(e_i, f_j) = 0$$

が成立っているものとする。各 $(k, \ell) \in I' \times J'$ に対し $B_{k\ell} \in L(X, Y; K)$ が $B_{k\ell}(x, y) = e_k^*(x) f_\ell^*(y), (x, y) \in X \times Y$ で定まる。従って $T_{k\ell} \in L(X \otimes Y; K)$ が唯一つ存在して $T_{k\ell} \circ \rho = B_{k\ell}$ を満たす。$T_{k\ell}$ の線型性より

$$0 = T_{k\ell}\left(\sum_{(i,j) \in I' \times J'} c_{ij} \rho(e_i, f_j)\right) = \sum_{(i,j) \in I' \times J'} c_{ij} T_{k\ell}(\rho(e_i, f_j)) = \sum_{(i,j) \in I' \times J'} c_{ij} B_{k\ell}(e_i, f_j) = c_{k\ell}$$

が従う。(k, ℓ) は任意だったので全ての係数 c_{ij} は 0 となり $(\rho(e_i, f_j); (i, j) \in I \times J)$ の独立性が従う。

次に任意の $\xi \in X \otimes Y$ を取る。(T1) により有限個の $c_\lambda \in K, (x_\lambda, y_\lambda) \in X \times Y (\lambda \in \Lambda, \sharp\Lambda < \infty)$ が存在し

$$\xi = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda \rho(x_\lambda, y_\lambda)$$

と表される。各 $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$x_\lambda = \sum_{i \in I_\lambda} a_i^\lambda e_i,\ y_\lambda = \sum_{j \in I_\lambda} b_j^\lambda f_j\ (\sharp I_\lambda, \sharp J_\lambda < \infty)$$

と表される。このとき

$$\begin{aligned} & I' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda, J' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda, \\ & x_\lambda = \sum_{i \in I'} a_i^\lambda e_i\ (a_i^\lambda \equiv 0\ \forall i \in I' \setminus I_\lambda), y_\lambda = \sum_{j \in J'} b_j^\lambda f_j\ (b_j^\lambda \equiv 0\ \forall j \in J' \setminus J_\lambda) \end{aligned}$$

と表し $c_{ij}=\sum_{\lambda\in\Lambda}c_\lambda a_i^\lambda b_j^\lambda$ と置くと $\sharp I',\sharp J'<\infty$ であり

$$\xi=\sum_{\lambda\in\Lambda}c_\lambda\rho(x_\lambda,y_\lambda)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{i\in I'}\sum_{j\in J'}c_\lambda a_i^\lambda b_j^\lambda\rho(e_i,f_j)=\sum_{(i,j)\in I'\times J'}c_{ij}\rho(e_i,f_j)$$

が成立つ。従って $(\rho(e_i,f_j);(i,j)\in I\times J)$ は生成系を成す。

3．テンソル積の同型の構成

定理４　X と Y をベクトル空間とする。夫々の基底を $(e_i;i\in I)$ 及び $(f_j;j\in J)$ とし、添字集合 I と J の直積集合 $I\times J$ の生成するベクトル空間を $\mathscr{F}_0(I\times J)$ とする。各 $(x,y)\in X\times Y$ に対し $\sharp\{i\in I;e_i^*(x)\neq 0\}$ 及び $\sharp\{j\in J;f_j^*(y)\neq 0\}$ は有限であり、一次結合 $\sum_{(i,j)\in I\times J}e_i^*(x)f_j^*(y)\iota_{(x,y)}$ は $\mathscr{F}_0(I\times J)$ の元となる。付随する写像

$$B:X\times Y\ni(x,y)\mapsto B(x,y)=\sum_{(i,j)\in I\times J}e_i^*(x)f_j^*(y)\iota_{(i,j)}\in\mathscr{F}_0(I\times J)$$

は双線型となる。定理 2 に拠って $B=T\circ\rho$ なる $T\in L(X\otimes Y;\mathscr{F}_0(I\times J))$ が一意的に存在する。このとき T は全単射となり $X\otimes Y$ と $\mathscr{F}_0(I\times J)$ との同型を与える。この対応は元毎には

$$\xi=\sum_{(i,j)\in I'\times J'}c_{ij}e_i\otimes f_j\in X\otimes Y\longleftrightarrow\alpha=\sum_{(i,j)\in I'\times J'}c_{ij}\iota_{(i,j)}\in\mathscr{F}_0(I\times J)$$

で与えられる。ここに I' 及び J' は夫々 I 及び J の有限部分集合であり

$$c_{ij}=(T(\xi))(i,j)=\mathrm{ev}_{(i,j)}(\alpha)$$

である。

(証明)　T が同型である事を示せば充分である。

T の単射性：$T(\xi)=0$ なる $\xi\in X\otimes Y$ を取る。定理 3 により I 及び J の有限部分集合 I' 及び J' で $\xi=\sum_{(i,j)\in I'\times J'}c_{ij}e_i\otimes f_j$ なる表示を得る。T の線型性及び $B=T\circ\rho$ に因り等式

$$0=T(\xi)=\sum_{(i,j)\in I'\times J'}c_{ij}T(e_i\otimes f_j)=\sum_{(i,j)\in I'\times J'}c_{ij}B(e_i,f_i)=\sum_{(i,j)\in I'\times J'}c_{ij}\iota_{(i,j)}$$

が従うので両辺を任意の $(k,\ell)\in I'\times J'$ に作用させると

$$0=(T(\xi))(k,\ell)=\left(\sum_{(i,j)\in I'\times J'}c_{ij}\iota_{(i,j)}\right)(k,\ell)=c_{k\ell}$$

を得る。これより $\xi=0$ となり T の単射性が従う。

T の全射性：$\alpha \in \mathscr{F}_0(I \times J)$ を与える。α は $\alpha = \sum_{(i,j)\in I\times J} \mathrm{ev}_{(i,j)}(\alpha)\iota_{(i,j)}$ と表される。そこで $\xi = \sum_{(i,j)\in \mathrm{Supp}\alpha} \mathrm{ev}_{(i,j)}(\alpha)(e_i \otimes f_j)$ と置くと T の線型性と $B = T\circ\rho$ に因り、等式

$$T(\xi) = \sum_{(i,j)\in \mathrm{Supp}\alpha} \mathrm{ev}_{(i,j)}(\alpha)B(e_i, f_j) = \sum_{(i,j)\in \mathrm{Supp}\alpha} \mathrm{ev}_{(i,j)}(\alpha)\iota_{(i,j)} = \alpha$$

が成立ち T の全射性が従う。

定理 5：X と Y をベクトル空間とする。各 $(x,y) \in X \times Y$ に対し $\Phi(x,y) \in L(X^*, Y^*; K)$ が $(\Phi(x,y))(\ell, m) = \ell(x)m(y), (\ell, m) \in X^* \times Y^*$ により定まる。$\Phi : X \times Y \ni (x,y) \mapsto \Phi(x,y) \in L(X^*, Y^*; K)$ は双線型写像となるので定理 2 に拠って $\Phi = T \circ \rho$ なる $T \in L(X \otimes Y; L(X^*, Y^*; K))$ が一意的に存在する。このとき T は単射となり線型単射による埋め込み $X \otimes Y \hookrightarrow L(X^*, Y^*; K)$ を与える。X と Y 共に有限次元ならば T は全射となり線型同型による同一視 $X \otimes Y \simeq L(X^*, Y^*; K)$ を与える。この対応は $(e_i; i \in I)$ 及び $(f_j; j \in J)$ を夫々 X 及び Y の基底とすれば元毎には

$$\xi = \sum_{(i,j)\in I\times J} c_{ij} e_i \otimes f_j \in X \otimes Y \longleftrightarrow \beta = \sum_{(i,j)\in I\times J} c_{ij}\Phi(e_i, f_j)$$

で与えられる。ここに

$$c_{ij} = (T(\xi))(e_i^*, f_j^*) = \beta(e_i^*, f_j^*) \in L(X^*, Y^*; K)$$

である。

（証明）　各 $(x,y) \in X \times Y$ に対する $\Phi(x,y)$ の双線型性は

$$\begin{aligned}(\Phi(x,y))(a\ell + a'\ell', m) &= (a\ell + a'\ell')(x)m(y)\\ &= (a\ell(x) + a'\ell'(x))m(y)\\ &= a\ell(x)m(y) + a'\ell'(x)m(y)\\ &= a(\Phi(x,y))(\ell, m) + a'(\Phi(x,y))(\ell', m),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Phi(x,y))(\ell, am + a'm') &= \ell(x)(am + a'm')(y)\\ &= \ell(x)(am(y) + a'm'(y))\\ &= a\ell(x)m(y) + a'\ell(x)m'(y)\\ &= a(\Phi(x,y))(\ell, m) + a'(\Phi(x,y))(\ell, m')\end{aligned}$$

より従う。Φ の双線型性は

$$\begin{aligned}(\Phi(ax + a'x', y))(\ell, m) &= \ell(ax + a'x')m(y)\\ &= (a\ell(x) + a'\ell(x'))m(y)\\ &= a(\Phi(x,y))(\ell, m) + a'(\Phi(x', y))(\ell, m)\\ &= (a\Phi(x,y) + a'\Phi(x', y))(\ell, m),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\Phi(x, ay + a'y'))(\ell, m) &= \ell(x)m(ay + a'y') \\
&= \ell(x)(am(y) + a'm(y')) \\
&= a(\Phi(x, y))(\ell, m) + a'(\Phi(x, y'))(\ell, m) \\
&= (a\Phi(x, y) + a'\Phi(x, y'))(\ell, m)
\end{aligned}
$$

より従う。

T の単射性：$T(\xi) = 0$ なる $\xi \in X \otimes Y$ を取る。定理 3 により $X \otimes Y$ の基底 $(\rho(e_i, f_j); (i, j) \in I \times J)$ を取り I 及び J の有限部分集合 I' 及び J' で $\xi = \displaystyle\sum_{(i,j) \in I' \times J'} c_{ij}\rho(e_i, f_j)$ と表しておく。このとき T の線型性と $T \circ \rho = \Phi$ により $0 = T(\xi) = \displaystyle\sum_{(i,j) \in I' \times J'} c_{ij}\Phi(e_i, f_j)$ が従う。これを $(e_k^*, f_\ell^*) \in X^* \times Y^*$ に作用させ $c_{k\ell} = 0$ を得る。$(k, \ell) \in I' \times J'$ は任意故 $\xi = 0$ を得る。

T の全射性：$\dim X, \dim Y < \infty$ の場合に T の全射性を示そう。任意に $\beta \in L(X^*, Y^*; K)$ を与える。$(\ell, m) \in X^* \times Y^*$ を $\ell = \displaystyle\sum_{i \in I} \ell(e_i)e_i^*, m = \sum_{j \in J} m(f_j)f_j^*$ と表しておくと β の双線型性より

$$
\begin{aligned}
\beta(\ell, m) &= \beta(\sum_{i \in I} \ell(e_i)e_i^*, \sum_{j \in J} m(f_j)f_j^*) \\
&= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \ell(e_i)m(f_j)\beta(e_i^*, f_j^*) \\
&= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (\Phi(e_i, f_j))(\ell, m)\beta(e_i^*, f_j^*) \\
&= (\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \beta(e_i^*, f_j^*)\Phi(e_i, f_j))(\ell, m)
\end{aligned}
$$

となるから β は

$$
\beta = \sum_{(i,j) \in I \times J} \beta(e_i^*, f_j^*)\Phi(e_i, f_j)
$$

と表される。そこで

$$
\xi = \sum_{(i,j) \in I \times J} \beta(e_i^*, f_j^*)\rho(e_i, f_j)
$$

と置けば $\xi \in X \otimes Y$ が定まり $T(\xi) = \beta$ が成立つ。

定理 6　X と Y をベクトル空間とし、夫々の基底を $(e_i; i \in I)$ 及び $(f_j; j \in J)$ とする。各 $(x, y) \in X \times Y$ に対し $\Phi(x, y) \in L(X^*; Y)$ が $(\Phi(x, y))(\ell) = \ell(x)y, \ell \in X^*$ で定まる。このとき $\Phi : X \times Y \ni (x, y) \mapsto \Phi(x, y) \in L(X^*; Y)$ は双線型となる。定理 2 に拠って $\Phi = T \circ \rho$ なる $T \in L(X \otimes Y; L(X^*; Y))$ が一意的に存在する。このとき T は単射となり線型単射による

埋め込み $X \otimes Y \hookrightarrow L(X^*; Y)$ を与える。X が有限次元ならば T は全射となり線型同型による同一視 $X \otimes Y \simeq L(X^*; Y)$ を与える。この対応は元毎には

$$\xi = \sum_{(i,j)\in I\times J'} c_{ij} e_i \otimes f_j \in X \otimes Y \longleftrightarrow \alpha = \sum_{(i,j)\in I\times J'} c_{ij}\Phi(e_i, f_j) \in L(X^*; Y)$$

で与えられる。ここに J' は J の有限部分集合であり

$$c_{ij} = f_j^*((T(\xi))(e_i^*)) = f_j^*(\alpha(e_i^*))$$

である。

(証明) **T の単射性：**$T(\xi) = 0$ なる $\xi \in X \otimes Y$ を取る。定理 3 により I 及び J の有限部分集合 I' 及び J' で $\xi = \sum_{(i,j)\in I'\times J'} c_{ij} e_i \otimes f_j$ なる表示を得る。T の線型性及び $\Phi = T \circ \rho$ を用いて $0 = T(\xi) = \sum_{(i,j)\in I'\times J'} c_{ij} T(e_i \otimes f_j) = \sum_{(i,j)\in I'\times J'} c_{ij}\Phi(e_i, f_j)$ を得る。任意の $k \in I'$ に対しこの両辺を e_k^* に作用させると $(\Phi(e_i, f_j))(e_k^*) = e_k^*(e_i) f_j = \delta_{ik} f_j$ より $\sum_{j\in J'} c_{kj} f_j = 0$ が従う。$(f_j; j \in J)$ は Y の基底故任意の $j \in J'$ に対し $c_{kj} = 0$ が従う。これより $\xi = 0$ を得る。

T の全射性：$\dim X < \infty$ の場合に T の全射性を示そう。$\alpha \in L(X^*; Y)$ を与える。$\sharp I < \infty$ より $\xi \equiv \sum_{i\in I} e_i \otimes \alpha(e_i^*) \in X \otimes Y$ が定まり任意の $\ell \in X^*$ は $\ell = \sum_{i\in I} \ell(e_i) e_i^*$ なる表示を持つ。このとき T の線型性より $T(\xi) = \sum_{i\in I} T(e_i \otimes \alpha(e_i^*))$ が従い

$$\begin{aligned}
(T(\xi))(\ell) &= \left(\sum_{i\in I} T(e_i \otimes \alpha(e_i^*))\right)(\ell) = \sum_{i\in I} \left(T(e_i \otimes \alpha(e_i^*))\right)(\ell) \\
&= \sum_{i\in I} (\Phi(e_i, \alpha(e_i^*)))(\ell) = \sum_{i\in I} \ell(e_i)\alpha(e_i^*) \\
&= \sum_{i\in I} \alpha(\ell(e_i) e_i^*) = \alpha\left(\sum_{i\in I} \ell(e_i) e_i^*\right) = \alpha(\ell)
\end{aligned}$$

より $T(\xi) = \alpha$ を得る。

定理の最後の等式を示そう。

$$\xi = \sum_{(i,j)\in I\times J'} c_{ij} e_i \otimes f_j$$

に対し

$$T(\xi) = \sum_{(i,j)\in I\times J'} c_{ij} T(e_i \otimes f_j) = \sum_{(i,j)\in I\times J'} c_{ij}\Phi(e_i, f_j)$$

であるから

$$(T(\xi))(e_k^*) = \sum_{j\in J'} c_{kj} f_j$$

を得る。これより $f_\ell^*((T(\xi))(e_k^*)) = c_{k\ell}$ が従う。また

$$\alpha = \sum_{(i,j)\in I\times J'} c_{ij}\Phi(e_i, f_j)$$

に対し

$$\alpha(e_k^*) = \sum_{(i,j)\in I\times J'} c_{ij}(\Phi(e_i, f_j))(e_k^*) = \sum_{j\in J'} c_{kj} f_j$$

となり $f_\ell^*(\alpha(e_k^*)) = c_{k\ell}$ が従う。

定理 7　X と Y をベクトル空間とし、夫々の基底を $(e_i; i \in I)$ 及び $(f_j; j \in J)$ とする。各 $(\ell, y) \in X^* \times Y$ に対し $\Phi(\ell, y) \in L(X; Y)$ が $(\Phi(\ell, y))(x) = \ell(x)y, x \in X$ で定まる。このとき $\Phi : X^* \times Y \ni (\ell, y) \mapsto \Phi(\ell, y) \in L(X; Y)$ は双線型となる。定理 2 に拠って $\Phi = T \circ \rho$ なる $T \in L(X^* \otimes Y; L(X; Y))$ が一意的に存在する。このとき T は単射となり線型単射による埋め込み $X^* \otimes Y \hookrightarrow L(X; Y)$ を与える。X が有限次元ならば T は全射となり線型同型による同一視 $X^* \otimes Y \simeq L(X; Y)$ を与える。この対応は元毎には

$$\xi = \sum_{(i,j)\in I\times J'} c_{ij} e_i^* \otimes f_j \in X^* \otimes Y \longleftrightarrow \alpha = \sum_{(i,j)\in I\times J'} c_{ij}\Phi(e_i^*, f_j) \in L(X; Y)$$

で与えられる。ここに J' は J の有限部分集合であり

$$c_{ij} = f_j^*((T(\xi))(e_j)) = f_j^*(\alpha(e_i))$$

である。

（証明）T の単射性：　$T(\xi) = 0$ なる $\xi \in X^* \otimes Y$ を取る。定理 3 により I 及び J の有限部分集合 I' 及び J' で

$$\xi = \sum_{(i,j)\in I'\times J'} c_{ij} e_i^* \otimes f_j$$

なる表示を得る。T の線型性及び $\Phi = T \circ \rho$ を用いて

$$0 = T(\xi) = \sum_{(i,j)\in I'\times J'} c_{ij}\Phi(e_i^*, f_j)$$

を得る。任意の $k \in I'$ に対してこの両辺を e_k に作用させると $(\Phi(e_i^*, f_j))(e_k) = e_i^*(e_k) f_j = \delta_{ik} f_j$ より

$$\sum_{j\in J'} c_{kj} f_j = 0$$

が従う。$(f_i; j \in J)$ は Y の基底故任意の $j \in J'$ に対し $c_{kj} = 0$ が従う。これより $\xi = 0$ を得る。

T の全射性：　$\dim X < \infty$ の場合に T の全射性を示そう。$\alpha \in L(X; Y)$ を与える。$\sharp I < \infty$ より

$$\xi = \sum_{i\in I} e_i^* \otimes \alpha(e_i) \in X^* \otimes Y$$

が定まる。このとき T の線型性及び $\Phi = T \circ \rho$ より

$$T(\xi) = \sum_{i \in I} T(e_i^* \otimes \alpha(e_i)) = \sum_{i \in I} \Phi(e_i^*, \alpha(e_i))$$

が従い、任意の $x \in X$ に対し

$$\begin{aligned}(T(\xi))(x) &= (\sum_{i \in I} \Phi(e_i^*, \alpha(e_i)))(x) = \sum_{i \in I} (\Phi(e_i^*, \alpha(e_i)))(x) \\ &= \sum_{i \in I} e_i^*(x)\alpha(e_i) = \alpha(\sum_{i \in I} e_i^*(x)e_i) = \alpha(x)\end{aligned}$$

となるから $T(\xi) = \alpha$ を得る。

　定理の最後の等式を示そう。

$$\xi = \sum_{(i,j) \in I \times J'} c_{ij} e_i^* \otimes f_j$$

に対し

$$\begin{aligned}(T(\xi))(e_k) &= (\sum_{(i,j) \in I \times J'} c_{ij} T(e_i^*, \otimes f_j))(e_k) = (\sum_{(i,j) \in I \times J'} c_{i,j}(e_i^*, f_j))(e_k) \\ &= \sum_{(i,j) \in I \times J'} c_{ij} \Phi(e_i^*, f_j)(e_k) = \sum_{(i,j) \in I \times J'} c_{ij} e_i^*(e_k) f_j = \sum_{j \in J'} c_{kj} f_j\end{aligned}$$

となるから両辺に f_ℓ^* を作用させ $f_\ell^*((T(\xi))(e_k)) = c_{k\ell}$ を得る。また $\alpha = \sum_{(i,j) \in I \times J'} c_{ij} \Phi(e_i^*, f_j)$ に対し

$$\alpha(e_k) = \sum_{(ij) \in I \times J'} c_{ij} \Phi(e_i^*, f_j))(e_k) = \sum_{j \in J'} c_{ij} f_j$$

となるから両辺に f_ℓ^* を作用させ $f_\ell^*(\alpha(e_k)) = c_{k\ell}$ を得る。

4．テンソル積の基本性質

X, Y を二つのベクトル空間とし $(X \otimes y, \rho)$ をそのテンソル積とする。各 $(x, y) \in X \times Y$ に対し $x \otimes y = \rho(x, y)$ と表したのであった。$\rho : X \times Y \to X \otimes Y$ の双線型性は

$$\begin{aligned}(ax + a'x') \otimes y &= a(x \otimes y) + a'(x' \otimes y), \\ x \otimes (ay + a'y') &= a(x \otimes y) + a'(x' \otimes y')\end{aligned}$$

と書き換えられる。

定理８　各 $(a, x) \in K \times X$ に対し $\beta(a, x) = ax$ と置くと $\beta \in L(K, X; X)$ が定まる。定理 2 に拠って唯一つの $T \in L(K \otimes X; X)$ が存在し $\beta = T \circ \rho$ を満たす。このとき T は線型同型となる。

（証明）　先ず (X,β) の組が (T1) 及び (T2) を満たす事を示す。(T1) は $X = \mathrm{Im}\ \beta(1,\cdot) \subset \mathrm{Im}\ \beta \subset X$ より従う。任意のベクトル空間 Z' 及び任意の $B \in L(K,X;Z')$ に対し $T(x) = B(1,x), x \in X$ と定義すると $B(a,x) = B(1,ax) = T(ax) = T(\beta(a,x)) = (T\circ\beta)(a,x)$ となるので (T2) が成立つ。

定理 2 の後半に拠って唯一つの線型同型写像 $T' : K\otimes X \to X$ が存在し $\beta = T'\circ\rho$ を満たす事となる。一意性より $T = T'$ となり T' は同型であるから T も同型となる。

定理９　各 $(x,y) \in X\times Y$ に対し $\beta(x,y) = y\otimes x$ と置くと $\beta \in L(X,Y;Y\otimes X)$ が定まる。定理 2 に拠って唯一つの $T \in L(X\otimes Y;Y\otimes X)$ が存在し $\beta = T\circ\rho$ を満たす。このとき T は線型同型となる。

（証明）　各 $(x,y) \in X\times Y$ に対し $\alpha(y,x) = x\otimes y$ と置くと $\alpha \in L(Y,X;X\otimes Y)$ が定まる。定理 2 に拠って唯一つの $S \in L(Y\otimes X;X\otimes Y)$ が存在し $\alpha = S\circ\tilde{\rho}$ を満たす。ここに $\tilde{\rho} : Y\times X \ni (y,x) \mapsto y\otimes x \in Y\otimes X$ は標準写像とする。

さて

$$y\otimes x = \beta(x,y) = (T\circ\rho)(x,y) = T(x\otimes y)$$

$$x\otimes y = \alpha(y,x) = (S\circ\tilde{\rho})(y,x) = S(y\otimes x)$$

より $(S\circ T)(x\otimes y) = x\otimes y, (T\circ S)(y\otimes x) = y\otimes x$ が従う。T と S の線型性と $\mathrm{Span\ Im}\rho = X\otimes Y,\ \mathrm{Span}\ \tilde{\rho} = Y\otimes X$ より $S\circ T = \mathrm{id}_{X\otimes Y}$ 及び $T\circ S = \mathrm{id}_{Y\otimes X}$ が従う。故に T は同型である。

定理１０　X,Y,Z を三つのベクトル空間とする。各 $z \in Z$ に対し $L_z(y) = y\otimes z, y \in Y$ と置くと $L_z \in L(Y;Y\otimes Z)$ が定まり $B_z(x,y) = x\otimes L_z(y), (x,y) \in X\times Y$ と置くと $B_z \in L(X,Y;X\otimes(Y\otimes Z))$ が定まる。定理 2 に拠って唯一つの $T_z \in L(X\otimes Y;X\otimes(Y\otimes Z))$ が存在し $B_z = T_z\circ\rho$ を満たす。ここに $\rho : X\times Y \to X\otimes Y$ は標準写像とする。各 $(\xi,z) \in (X\otimes Y)\times Z$ に対し $B(\xi,z) = T_z(\xi)$ と置くと $B \in L((X\otimes Y),Z;X\otimes(Y\otimes X))$ が定まる。定理 2 に拠って唯一つの $T \in L((X\otimes Y)\otimes Z;X\otimes(Y\otimes Z))$ が存在し $B = T\circ\tilde{\rho}$ を満たす。ここに $\tilde{\rho} : (X\otimes Y)\times Z \to (X\otimes Y)\otimes Z$ は標準写像とする。このとき T は線型同型となり任意の $(x,y,z) \in X\times Y\times Z$ に対し $T((x\otimes y)\otimes z) = x\otimes(y\otimes z)$ を満たす。

（証明）　先ず B の双線型性を示そう。任意の $a,a' \in K;\xi,\xi' \in X\otimes Y;z,z' \in Z$ に対し

$$\begin{aligned}
B(a\xi + a'\xi',z) &= T_z(a\xi + a'\xi') = aT_z(\xi) + a'T_z(\xi') = aB(\xi,z) + a'B(\xi',z),\\
B(\xi,az + a'z') &= T_{az+a'z'}(\xi) = aT_z(\xi) + a'T_{z'}(\xi) = a'B(\xi,z') + a'B(\xi,z')
\end{aligned}$$

が成立つ事を示せば良い。第一式は T_z の線型性から直ちに従う。第二式は一連の等式

$$
\begin{aligned}
T_{az+a'z'}(\xi) = T_{az+a'z'}\left(\sum_{i,j} c_{ij} x_i \otimes y_j\right) &= \sum_{i,j} c_{ij} T_{az+a'z'}(x_i \otimes y_j) \\
&= \sum_{i,j} c_{ij} B_{az+a'z'}(x_i, y_j) = \sum_{i,j} c_{ij} x_i \otimes L_{az+a'z'}(y_j) \\
&= \sum_{i,j} c_{ij} x_i \otimes (y_j \otimes (az + a'z')) = \sum_{i,j} c_{ij} x_i \otimes (a(y_j \otimes z) + a'(y_j \otimes z')) \\
&= \sum_{i,j} c_{ij}(a(x_i \otimes (y_j \otimes z)) + a'(x_i \otimes (y_j \otimes z'))) \\
&= a\sum_{i,j} c_{ij}(x_i \otimes (y_j \otimes z)) + a'\sum_{i,j} c_{ij}(x_i \otimes (y_j \otimes z')) \\
&= a\sum_{i,j} c_{ij} x_i \otimes L_z(y_j) + a'\sum_{i,j} c_{ij} x_i \otimes L_{z'}(y_j) \\
&= a\sum_{i,j} c_{ij} B_z(x_i, y_j) + a'\sum_{i,j} c_{ij} B_{z'}(x_i, y_j) \\
&= a\sum_{i,j} c_{ij} T_z(x_i \otimes y_j) + a'\sum_{i,j} c_{ij} T_{z'}(x_i \otimes y_j) = aT_z(\xi) + a'T_{z'}(\xi)
\end{aligned}
$$

より従う。さて任意の $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$ に対し

$$
\begin{aligned}
T((x \otimes y) \otimes z) \otimes z) = (T \circ \tilde{\rho})(x \otimes y, z) &= B(x \otimes y, z) = T_z(x \otimes y) = (T_z \circ \rho)(x, y) \\
&= B_z(x, y) = x \otimes L_z(y) = x \otimes (y \otimes z)
\end{aligned}
$$

が成立つ。

各 $x \in X$ に対し $L'_x(y) = x \otimes y, y \in Y$ と置くと $L'_x \in L(Y; X \otimes Y)$ が定まり $B'_x(y, z) = L'_x(y) \otimes z, (y, z) \in Y \times Z$ と置くと $B'_x \in L(Y, Z; (X \otimes Y) \otimes Z)$ が定まる。定理 2 に拠って唯一つの $S_x \in L(Y \otimes Z; (X \otimes Y) \otimes Z)$ が存在し $B'_x = S_x \circ \rho'$ を満たす。ここに $\rho' : Y \times Z \to Y \otimes Z$ は標準写像とする。各 $(x, \eta) \in X \times (Y \otimes Z)$ に対し $B'(x, \eta) = S_x(\eta)$ と置くと $B' \in L(X, Y \otimes Z; X \otimes (Y \otimes Z))$ が定まる。定理 2 に拠って唯一つの $S \in L(X \otimes (Y \otimes Z); X \otimes (Y \otimes Z))$ が存在し $B' = S \circ \tilde{\rho}'$ を満たす。ここに $\tilde{\rho}' : X \times (Y \otimes Z) \to X \otimes (Y \otimes Z)$ は標準写像とする。さて任意の $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$ に対し

$$
\begin{aligned}
S(x \otimes (y \otimes z)) =& (S \circ \tilde{\rho}')(x, y \otimes z) = B'(x, y \otimes z) = S_x(y \otimes z) = (S_x \circ \tilde{\rho}')(y, z) \\
&= B'_x(y, z) = L'_x(y) \otimes z = (x \otimes y) \otimes z
\end{aligned}
$$

が成立つ。

$$
(S \circ T)((x \otimes y) \otimes z) = S(x \otimes (y \otimes z)) = (x \otimes y) \otimes z
$$

従って

$$
(T \circ S)(x \otimes (y \otimes z)) = T((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)
$$

を得る。T 及び S は線型で生成系 $\mathrm{Im}\ \tilde{\rho}$ 及び $\mathrm{Im}\ \tilde{\rho}'$ 上で $S \circ T$ 及び $T \circ S$ は恒等写像となるので $S \circ T = \mathrm{id}_{(X \otimes Y) \otimes Z}$ 及び $T \circ S = \mathrm{id}_{X \otimes (Y \otimes Z)}$ が成立つ。従って T は線型同型となる。

5．多重線型写像とテンソル積

ベクトル空間 $X_1,\cdots,X_n;Y$ に対し積ベクトル空間 $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} X_j = X_1\times\cdots\times x_n$ から Y への写像 $L: X_1\times\cdots\times X_n\to Y$ が**多重線型** multilinear であるとは各々の変数に就いて線型である事と定義する。即ち $1\leq j\leq n$ なる任意の j に対し等式

$$L(x_1,\cdots,ax_j+a'x_j',\cdots,x_n)=aL(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)+a'L(x_1,\cdots,x_j',\cdots,x_n),$$

$(a,a'\in K, x_i\in X_i(i\neq j), x_j,x_j'\in X_j)$ が成立つ事と定義する。$X_1\times\cdots\times X_n$ から Y への多重線型写像全体の集合を $L(X_1,\cdots,X_n;Y)$ と表す。$L(X_1,\cdots,X_n;Y)$ は各点毎の和とスカラー倍に依りベクトル空間を成す。

定理１１　$X_1,\cdots,X_n$ を与えられたベクトル空間とする。このときベクトル空間 Y 及び $\rho\in L(X_1,\cdots,X_n;Y)$ に対し次は同値である。

(1) 任意のベクトル空間 Y' 及び任意の $L\in L(X_1,\cdots,X_n;Y')$ に対し唯一つの $T\in L(Y;Y')$ が存在し $L=T\circ\rho$ が成立つ。

(2) (Y,ρ) は次の二つの性質を満たす。

(T1) Y は ρ の像に因って生成される：$Y=\mathrm{Span}(\mathrm{Im}\ \rho)$

(T2) 任意のベクトル空間 Y' 及び任意の $L\in L(X_1,\cdots,X_n;Y')$ に対し $T\in L(Y;Y')$ が存在し $L=T\circ\rho$ が成立つ。

（証明）　定理１の証明と同様である。

定理１２　与えられたベクトル空間 $X_1,\cdots,X_n$ に対し定理 11 の同値な命題 (1) 及び（又は）(2) を満たすベクトル空間 Y と $\rho\in L(X_1,\cdots,X_n;Y)$ の組 (Y,ρ) が存在する。この様なベクトル空間 Y' 及び $\rho'\in L(X_1,\cdots,X_n;Y')$ の組 (Y',ρ') に対し唯一つの線型同型写像 $T';Y\to Y'$ が存在し $\rho'=T\circ\rho$ を満たす。

$$\begin{tikzcd}
X_1\times\cdots\times X_n \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "L"'] & Y \arrow[d, dashed, "T"] \\
 & Y'
\end{tikzcd}$$

（証明）　積ベクトル空間 $X\equiv\displaystyle\prod_{j=1}^{n}X_j$ の生成するベクトル空間を $\mathscr{F}_0(X)$ とする：

$$\mathscr{F}_0(X)=\{f:X\to K;\ \sharp\mathrm{Supp}f<\infty\}$$

多重線型写像であれば零を与える組を想定して $\mathscr{F}_0(X)$ の部分集合 $M_j(a\leq j\leq n)$ を次で定義する：

$$M_j=\{\iota_{(x_1,\cdots,\ ax_j+a'x_j',\cdots,x_n)}-a\iota_{(x_1,\cdots,\ x_j,\cdots,x_n)}-a'\iota_{(x_1,\cdots,\ x_j',\cdots,x_n)}\in\mathscr{F}_0(X);$$
$$a,a'\in K, x_i\in X_i(i\neq f), x_j,x_j'\in X_j\}$$

そこで $M = \mathrm{Span}(\bigcup_{j=1}^{n} M_j)$ と置き $\mathscr{F}_0(X)$ を M で割った商ベクトル空間を $Y = \mathscr{F}_0(X)/M$ とし付随する自然な射影を $\pi : \mathscr{F}_0(X) \to Y$ と表す。π は線型全射で $\mathrm{Ker}\ \pi = M$ である。$\rho \equiv \pi \circ \iota : X \to Y$ とした組 (Y, ρ) が求めるものである事を示そう。

ρ の多重線型性：　等式

$$\rho(x_1, \cdots,\ ax_j + a'x'_j, \cdots, x_n) = a\rho(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) + a'\rho(x_1, \cdots, x'_j, \cdots, x_n)$$

を示そう。

$$\iota_{(x_1,\ \cdots,\ ax_j+a'x'_j, \cdots, x_n)} - a\iota_{(x_1,\ \cdots,\ x_j, \cdots, x_n)} - a'\iota_{(x_1, \cdots, x'_j, \cdots, x_n)} \in M_j$$

であるから

$$\pi(\iota_{(x_1,\ \cdots, ax_j+a'x'_j, \cdots, x_n)} - a\iota_{(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n)} - a'\iota_{(x_1, \cdots, x'_j, \cdots, x_n)}) = 0$$

が従う。π の線型性と $\rho = \pi \circ \iota$ より

$$\rho(x_1, \cdots,\ ax_j + a'x'_j, \cdots, x_n) - a\rho(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) - a'\rho(x_1, \cdots, x'_j, \cdots, x_n) = 0$$

を得る。これが示すべきものであった。

(T1) の検証：　任意の $\xi \in Y = \mathscr{F}_0(X)/M$ に対し $f \in \mathscr{F}_0(X)$ が存在し $\xi = \pi(f)$ と表される。f は

$$f = \sum_{x \in X} \mathrm{ev}_x(f)\iota_x$$

と表されるから π の線型性より

$$\xi = \pi(f) = \sum_{x \in X} \mathrm{ev}_x(f)\pi(\iota_x) = \sum_{x \in X} \mathrm{ev}_x(f)(\pi \circ \iota)(x) = \sum_{x \in X} \mathrm{ev}_x(f)\rho(x)$$

となり $\xi \in \mathrm{Span}(\mathrm{Im}\ \rho)$ が従う。即ち $Y = \mathrm{Span}(\mathrm{Im}\ \rho)$ が成立つ。

(T2) の検証：　任意のベクトル空間 Y' 及び任意の $L \in L(X_1, \cdots, X_n; Y')$ を取る。命題 1 より唯一つの $T \in L(\mathscr{F}_0(X); Y')$ が存在し $L = T \circ \iota$ が成立つ。このとき $f \in \mathscr{F}_0(X)$ に対し $T(f)$ は

$$T(f) = \sum_{x \in X} \mathrm{ev}_x(f)T(\iota_x) = \sum_{x \in X} \mathrm{ev}_x(f)L(x) = \sum_{x \in X} \mathrm{ev}_x(f)L(x_1, \cdots, x_n)$$

なる表示を持つ。さて $f \in M$ に対し $a_{ji}, a'_{ij}, c_{ij} \in K, x_{ki} \in X_k (k \neq j), x_{ji}, x'_{ji} \in X_j, i \in I_j, 1 \leq j \leq n,$ が存在し $\sharp I_j < \infty$,

$$f = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in I_j} c_{ij}\big(\iota_{(x_{1i}, \cdots,\ a_{ji}x_{ji}+a'_{ji}x'_{ji}, \cdots x_{ni})} - a_{ji}\iota_{(x_{1i}, \cdots, x_{ji}, \cdots, x_{ni})} - a'_{ji}\iota_{(x_{1i}, \cdots,\ x'_{ji}, \cdots, x_{ni})}\big)$$

なる表示が成立つ。このとき $T\circ\iota = L$ であり L は多重線型であるから

$$T(f) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i\in I_j} c_{ij}(L(x_{1i},\cdots,\ a_{ji}x_{ji}+a'_{ji}x'_{ji},\cdots x_{ni})$$
$$- a_{ji}L(x_{1i},\cdots,\ x_{ji},\cdots,x_{ni}) - a'_{ji}L(x_{1i},\cdots,\ x'_{ji},\cdots,x_{ni})) = 0$$

を得る。即ち $M\subset \mathrm{Ker}\ T$ を得る。任意の $\xi\in Y=\mathscr{F}_0(X)/M$ に対し $f\in\mathscr{F}_0(X)$ が存在し $\xi=\pi(f)$ となるので $\tilde{T}(\xi)=T(f)$ と置く。$\tilde{T}$ は $\xi=\pi(f)$ なる f の取り方に依らず定まり $\tilde{T}:Y\to Y'$ は線型となる。更に $T=\tilde{T}\circ\pi$ 及び $L=T\circ\iota=\tilde{T}\circ(\pi\circ\iota)=\tilde{T}\circ\rho$ が従う。

(Y,ρ) の同型を除く一意性の証明は定理 2 の証明の最後の部分と同様である。

定理１３　X,Y,Z を三つのベクトル空間とする。

(1) 各 $(x,y,z)\in X\times Y\times Z$ に対し $L(x,y,z)=(x\otimes y)\otimes z$ と置くと

$$L: X\times Y\times Z\ni (x,y,z)\mapsto (x\otimes y)\otimes z\in (X\otimes Y)\otimes Z$$

は三重線型となる。定理 12 に拠って唯一つの $T\in L(X\otimes Y\otimes Z;(X\otimes Y)\otimes Z)$ が存在し $L=T\circ\rho$ を満たす。ここに $\rho: X\times Y\times Z\to X\otimes Y\otimes Z$ は標準写像とする。このとき T は同型であり任意の $(x,y,z)\in X\times Y\times Z$ に対し $(x\otimes y\otimes z)=(x\otimes y)\otimes z$ を満たす。

(2) 各 $(x,y,z)\in X\times Y\times Z$ に対し $L'(x,y,z)=x\otimes(y\otimes z)$ と置くと

$$L': X\times Y\times Z\ni (x,y,z)\mapsto x\otimes(y\otimes z)\in X\otimes(Y\otimes Z)$$

は三重線型となる。定理 12 に拠って唯一つの $T'\in L(X\otimes Y\otimes Z;X\otimes(Y\otimes Z))$ が存在し $L'=T'\circ\rho$ を満たす。このとき T' は同型であり任意の $(x,y,z)\in X\times Y\times Z$ に対し $T'(x\otimes y\otimes z)=x\otimes(y\otimes z)$ を満たす。

（証明）　各 $z\in Z$ に対し $B_z(x,y)=x\otimes y\otimes z, (x,y)\in X\times Y$ と置くと $B_z: X\times Y\ni(x,y)\mapsto B_z(x,y)\in X\otimes Y\otimes Z$ は双線型となるので定理 2 に拠って唯一つの $S_z\in L(X\otimes Y;X\otimes Y\otimes Z)$ が存在して $B_z=S_z\circ\rho'$ を満たす。ここに $\rho': X\times Y\to X\otimes Y$ は標準写像とする。このとき

$$B_{az+a'z'}(x,y) = x\otimes y\otimes(az+a'z') = a(x\otimes y\otimes z)+a'(x\otimes y\otimes z')$$
$$= aB_z(x,y)+a'B_{z'}(x,y) = (ab_z+a'B_{z'})(x,y)$$

より $B_{az+a'z'}=aB_z+a'B_{z'}$ が従うので $S_{az+a'z'}\circ\rho'=(aS_z+a'S_{z'})\circ\rho'$ を得る。$X\otimes Y$ は $\mathrm{Im}\ \rho'$ で生成されるので $S_{az+a'z'}=aS_z+aS'_{z'}$ を得る。そこで各 $(\xi,z)\in(X\otimes Y)\times Z$ に対し $B(\xi,z)=S_z(\xi)$ と置くと $B:(X\otimes Y)\times Z\ni(\xi,z)\mapsto B(\xi,z)\in X\otimes Y\otimes Z$ は双線型となる。定理 2 に拠って唯一つの $S\in L((X\otimes Y)\otimes Z;X\otimes Y\otimes Z)$ が存在して $B=S\circ\tilde{\rho}$ を満たす。ここに $\tilde{\rho}:(X\otimes Y)\times Z\to(X\otimes Y)\otimes Z$ は標準写像とする。任意の $(x,y,z)\in X\times Y\times Z$ に対し $S((x\otimes y)\otimes z)=B(x\otimes y,z)=S_z(x\otimes y)=B_z(x,y)=x\otimes y\otimes z$ となるので $(S\circ T)(x\otimes y\otimes z)=x\otimes y\otimes z,\ (T\circ S)((x\otimes y)\otimes z)=(x\otimes y)\otimes z$ を得る。S 及び T は線

型で生成系 $\mathrm{Im}\,\rho$ 及び $\mathrm{Im}\,\tilde{\rho}$ 上 $S\circ T$ 及び $T\circ S$ は恒等写像となるので $S\circ T=\mathrm{id}_{X\otimes Y\otimes Z}$ 及び $T\circ S=\mathrm{id}_{(X\otimes Y)\otimes Z}$ が成立つ。これより (1) が従う。(2) の証明も同様である。

6．テンソル空間

ベクトル空間 X 及びその双対空間 X^* の幾つかのテンソル積として得られるベクトル空間を**テンソル空間**と謂う。テンソル積の結合則と交換則を用いれば、テンソル空間の線型構造は、線型同型を除いて構成に係る X と X^* の数 (p,q) にのみ依存する。従って p 個の X 及び q 個の X^* を用いて得られたテンソル空間は全て (p,q) **型テンソル空間**

$$T^p_q(X)\equiv\underbrace{X\otimes\cdots\otimes X}_{p\text{ 個}}\otimes\underbrace{X^*\otimes\cdots\otimes X^*}_{q\text{ 個}}$$

なる標準的なテンソル空間に同一視される。ここで $T^0_0(X)=K, T^1_0(X)=X, T^0_1(X)=X^*$ と約束して置く。$T^p_q(X)$ の元を (p,q) **型テンソル**又は p **型反変** q **階共変テンソル**と謂う。特に $T^0_0(X), T^1_0(X), T^0_1(X)$ の元を夫々**スカラー**、**反変ベクトル**、**共変ベクトル**と謂う。

有限次元の例 (1)：　定理 7 より $X^*\otimes X\simeq L(X;X)$ であるので X 内の線型変換は (1,1) 型テンソルと見做される：$L(X;X)\simeq T^1_1(X)$

有限次元の例 (2)：　定理 5 より $X\otimes X\simeq L(X^*;X^*;K)$ であるので X^* 上の双線型形式は (2,0) 型テンソル（2 階の反変テンソル）と見做される：$L(X^*,X^*;K)\simeq T^2_0(X)$

有限次元の例 (3)：　$(X^*)^*\simeq X$ を用いると定理 5 は $X^*\otimes X^*\simeq L(X,X:K)$ であるので X 上の双線型形式は (0,2) 型テンソル (2 階の共変テンソル）と見做される：$L(X,X:K)\simeq T^0_2(X)$

有限次元の例 (4)：　上の例を一般化した

$$\begin{aligned}T^p_q(X)=&\underbrace{X\otimes\cdots\otimes X}_{p\text{ 個}}\otimes\underbrace{X^*\otimes\cdots\otimes X^*}_{q\text{ 個}}\simeq\underbrace{X^*\otimes\cdots\otimes X^*}_{q\text{ 個}}\otimes\underbrace{X\otimes\cdots\otimes X}_{p\text{ 個}}\\ &\simeq\underbrace{X^*\otimes\cdots\otimes X^*}_{q\text{ 個}}\otimes\underbrace{(X^*)^*\otimes\cdots\otimes(X^*)^*}_{p\text{ 個}}\\ &\simeq L\,(\underbrace{X\cdots,X,}_{q\text{ 個}}\underbrace{X^*,\cdots,X^*}_{p\text{ 個}};K)\end{aligned}$$

を用いると $\underbrace{X\times\cdots\times X}_{q\text{ 個}}\times\underbrace{(X^*)\times\cdots\times X^*}_{p\text{ 個}}$ 上の多重線型形式 ($(p+q)$ 重線型形式）は (p,q) 型テンソルと見做される。

参考文献：

横沼健雄、テンソル空間と外積代数、岩波講座「基礎数学」
ブルバキ、数学原論 代数２、東京図書