ガウスの和とヤコビのテータ函数から観たガウス分布函数の積分

平成 20 年 12 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

ガウス分布函数の定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx$ は複素函数論を通じて**ガウスの和**

$$\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{n}k^2\right)$$

及び**ヤコビのテータ函数**

$$\vartheta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi n^2 t), \quad t > 0$$

と深い関係を持っている。実際、次の命題が成立つ。

定理　次は同値である。

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$

(2) 任意の $n \geq 1$ に対し

$$\sum_{k=1}^{n-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{n}k^2\right) = \frac{\sqrt{n}(1+(-1)^n}{1-i}$$

(3) 任意の $t > 0$ に対し

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi n^2 t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi n^2}{t}\right)$$

(4) $\mathrm{Re} z > 0$ なる任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi n^2 z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi n^2}{z}\right)$$

但し $\sqrt{z}$ は正の実軸上正値となる分岐を取る。

証明　(1),(2),(3) の同値性は次の等式を示す事により従う。

$$\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{n}k^2\right) = \frac{1+(-1)^n}{1-i}\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx, \quad n \geq 1 \tag{5}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi n^2 t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi t x^2)dx \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi n^2}{t}\right), \quad t > 0 \tag{6}$$

実際、(5) を仮定すれば直接 (1) $\Rightarrow$ (2) が従い、(2) $\Rightarrow$ (1) は

$$\frac{\sqrt{n}(1+(-1)^n)}{1-i}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)dx\right)=0 \quad \forall n\geq 1$$

なる等式より従う ((5) に於いて $n=1$ としても良い)。

また、(6) を仮定すれば積分の変数変換 $x\mapsto\sqrt{\pi t}x=y$ により直接 (1) $\Rightarrow$ (3) が従い、(3) $\Rightarrow$ (1) は

$$\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi tx^2)dx\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi n^2}{t}\right)=0 \quad \forall t>0$$

なる等式より従う ((6) に於いて $t=1$ としても良い)。ここで (3),(6) に現れる正項級数は $0<\varepsilon<R$ なる任意の ε,R に対し $[\varepsilon,R]$ 上一様収束する事に注意する。実際

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq\varepsilon}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-\pi n^2 t)&=\sup_{t\geq\varepsilon}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\pi n^2 t)\right)\leq 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\pi n^2\varepsilon)\\&\leq 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\pi n\varepsilon)=1+\frac{2e^{-\pi\varepsilon}}{1-e^{-\pi\varepsilon}}=\frac{e^{\pi\varepsilon}+1}{e^{\pi\varepsilon}-1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sup_{0<t\leq R}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{\pi n^2}{t})&=\sup_{0<t\leq R}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi n^2}{t}\right)\right)\\&\leq 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi n^2}{R}\right)\leq\frac{e^{\pi/R}+1}{e^{\pi/R}-1}\end{aligned}$$

となるからである。同様に (4) に現れる級数は $0<\varepsilon<R$ なる任意の ε,R に対し $\{z\in\mathbb{C};\mathrm{Re}\,z\geq\varepsilon,(\mathrm{Re}\,z-R)^2+(\mathrm{Im}\,z)^2\leq R^2\}$ 上一様に絶対収束する。実際 $x=\mathrm{Re}\,z,\ y=\mathrm{Im}\,z$ として

$$\begin{aligned}&|\exp(-\pi n^2 z)|=\exp(-\pi n^2 x)\leq\exp(-\pi n^2\varepsilon),\\&\left|\exp\left(-\frac{\pi n^2}{z}\right)\right|=\exp\left(-\frac{\pi n^2 x}{x^2+y^2}\right)\leq\exp\left(-\frac{\pi n^2}{2R}\right)\end{aligned}$$

となるからである。ここに $x>0,\ y\in\mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned}-\frac{x}{x^2+y^2}\leq-\frac{1}{2R}&\iff\frac{1}{2R}\leq\frac{x}{x^2+y^2}\\&\iff x^2+y^2\leq 2Rx\\&\iff(x-R)^2+y^2\leq R^2\end{aligned}$$

なる関係を用いた。

以上より (4) の両辺は

$$\{z\in\mathbb{C};\mathrm{Re}\ z>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{z\in\mathbb{C};\mathrm{Re}\ z\geq\frac{1}{n},\ (\mathrm{Re}\ z-n)^2+(\mathrm{Im}\ z)^2\leq n^2\}$$

で正則となり、一致の定理より (3) と (4) の同値性が従う。
　よって命題1は等式 (5),(6) に帰着された事になる。以下 (5),(6) を示そう。その為に幾つかの補題を準備する。

補題1．　$z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ に対し

$$f(z) = \frac{1}{\exp(2\pi i z) - 1} \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{n}(z+k)^2\right)$$

と置く。このとき次が成立つ。

(1) 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ に対し

$$f(z+1) - f(z) = e^{2\pi i z^2/n}(e^{2\pi i z} + 1)$$

(2) 任意の $r \in [2n, \infty)$ に対し

$$\sup_{|t| \le 1/2} |f(t \pm \sqrt{2} e^{\pi i/4} r)| \le \frac{en}{e-1} \exp\left(-\frac{2\pi}{n} r^2\right)$$

(3) 任意の $r \in (n, \infty)$ に対し

$$\Big| \int_{-r}^{r} \left(f\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} e^{\pi i/4} s\right) - f\left(-\frac{1}{2} + (\sqrt{2} e^{\pi i/4} s)\right)\right) ds \\ - (1 + (-i)^n) \int_{-r}^{r} \exp\left(\frac{2\pi i}{n}(\sqrt{2} e^{\pi i/4} s)^2\right) ds \Big| \le n \exp\left(-\frac{2\pi}{n} r^2\right)$$

(証明) (1) 定義より

$$\begin{aligned}(\exp(2\pi i z) - 1)(f(z+1) - f(z)) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\exp\left(\frac{2\pi i}{n}(z+1+k)^2\right) - \exp\left(\frac{2\pi i}{n}(z+k)^2\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{2\pi i}{n}(z+n)^2\right) - \exp\left(\frac{2\pi i}{n} z^2\right) \\ &= \exp\left(\frac{2\pi i}{n} z^2\right)\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{n}(z+n)^2 - \frac{2\pi i}{n} z^2\right) - 1\right) \\ &= \exp\left(\frac{2\pi i}{n} z^2\right)\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{n}(2nz + n^2)\right) - 1\right) \\ &= \exp\left(\frac{2\pi i}{n} z^2\right)(\exp(4\pi i z) - 1) \\ &= \exp\left(\frac{2\pi i}{n} z^2\right)(\exp(2\pi i z) + 1)(\exp(2\pi i z) - 1)\end{aligned}$$

となるので両辺を $\exp(2\pi iz)-1\neq 0$ で割って (1) を得る。

(2) 任意の $t,r\in\mathbb{R}$ に対し

$$\exp(2\pi i(t\pm\sqrt{2}e^{\pi i/4}r))=\exp(2\pi i(t\pm(1+i)r))=\exp(2\pi i(t\pm r)\mp 2\pi r)$$

となるから $r\geq 1/2\pi$ ならば

$$\begin{aligned}|\exp(2\pi i(t+\sqrt{2}e^{\pi i/4}r))-1|&\geq 1-|\exp(2\pi i(t+\sqrt{2}e^{\pi i/4}r))|\\&=1-e^{-2\pi r}\\&\geq 1-e^{-1}=(e-1)/e,\\|\exp(2\pi i(t-\sqrt{2}e^{\pi i/4}r))-1|&\geq|\exp(2\pi i(t-\sqrt{2}e^{\pi i/4}r))|-1\\&=e^{2\pi r}-1\geq e-1\end{aligned}$$

が従う。一方、$0\leq k\leq n-1$ なる任意の $k\in\mathbb{Z}$ と任意の $t\in[-1/2,1/2]$ に対し

$$\begin{aligned}(t\pm\sqrt{2}e^{\pi i/4}r+k)^2&=(t\pm(1+i)r+k)^2\\&=(t\pm r+k)^2\pm 2ir(t\pm r+k)-r^2\end{aligned}$$

となるから $r\geq 2(k+1)$ ならば

$$\begin{aligned}\left|\exp\left(\frac{2\pi i}{n}(t\pm\sqrt{2}e^{\pi i/4}r+k)^2\right)\right|&=\exp\left(\mp\frac{4\pi}{n}r(t\pm r+k)\right)\\&=\exp\left(-\frac{4\pi}{n}r^2\left(1\pm\frac{t+k}{r}\right)\right)\leq\exp\left(-\frac{2\pi}{n}r^2\right)\end{aligned}$$

が従う。ここに $r\geq 2(k+1)$ に対し

$$\sup_{|t|\leq 1/2}\left|\frac{t+k}{r}\right|=\frac{\frac{1}{2}+k}{r}=\frac{2k+1}{2r},$$

$$\begin{aligned}&4\left(1\pm\frac{t+k}{r}\right)\geq 4\left(1-\frac{2k+1}{2r}\right)\\&=\frac{4(2r-(2k+1))}{2r}\\&\geq\frac{4(r+(2k+2)-(2k+1))}{2r}=\frac{4(r+1)}{2r}\geq 2\end{aligned}$$

を用いた。

(3)　(1) を用いると初めの積分の被積分函数は

$$
\begin{aligned}
&f\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}e^{\pi i/4}s\right)-f\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}e^{\pi i/4}s\right)\\
&=\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{2}e^{\pi i/4}s\right)^2\right)\left(\exp\left(2\pi i\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{2}e^{\pi i/4}s\right)\right)+1\right)\\
&=\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{2}e^{\pi i/4}s\right)^2\right)+\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{2}e^{\pi i/4}s\right)^2+2\pi i\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{2}e^{\pi i/4}s\right)\right)\\
&=\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{2}e^{\pi i/4}s\right)^2\right)+\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\left(\left(\frac{n}{2}+\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{2}e^{\pi i/4}s\right)\right)^2-\frac{n^2}{4}\right)\right)\\
&=\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{2}e^{\pi i/4}s\right)^2\right)+\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}+\sqrt{2}e^{\pi i/4}s\right)^2\right)\exp\left(-\frac{n\pi i}{2}\right)\\
&=\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{2}e^{\pi i/4}s\right)^2\right)+(-i)^n\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\left(\frac{n-1}{2}+\sqrt{2}e^{\pi i/4}s\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

と表される。

そこで (3) は次の不等式を示せば充分である ($a=-\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}$ とする):

$r\geq 2|a|$ なる任意の $a,r\in\mathbb{R}$ に対し

$$
\left|\int_{-r}^{r}\exp\left(\frac{2\pi i}{n}(a+\sqrt{2}e^{\pi i/4}s)^2\right)ds-\int_{-r}^{r}\exp\left(\frac{2\pi i}{n}(\sqrt{2}e^{\pi i/4}s)^2\right)ds\right|\leq 2|a|\exp\left(-\frac{2\pi}{n}r^2\right)
$$

この不等式を証明する為、正則函数 $\mathbb{C}\ni z\mapsto\exp\left(\frac{2\pi i}{n}z^2\right)\in\mathbb{C}$ を領域

$$
D=\{z\in\mathbb{C};\mathrm{Re}\ z-a<\mathrm{Im}\ y<\ \mathrm{Re}\ z,\ -r<\mathrm{Im}\ y<r\}
$$

の境界 $C=\partial D$ の正の向きに積分すると

$$
\begin{aligned}
0=&\int_C\exp\left(\frac{2\pi i}{n}z^2\right)dz\\
=&\int_0^a\exp\left(\frac{2\pi i}{n}(t-\sqrt{2}e^{\pi i/4}s)^2\right)ds\\
&+\int_{-r}^{r}\exp\left(\frac{2\pi i}{n}(a+\sqrt{2}e^{\pi i/4}s)^2\right)2e^{\pi i/4}ds\\
&-\int_0^a\exp\left(\frac{2\pi i}{n}(t+\sqrt{2}e^{\pi i/4}r)^2\right)dt\\
&-\int_{-r}^{r}\exp\left(\frac{2\pi i}{n}(\sqrt{2}e^{\pi i/4}s)^2\right)2e^{\pi i/4}ds
\end{aligned}
$$

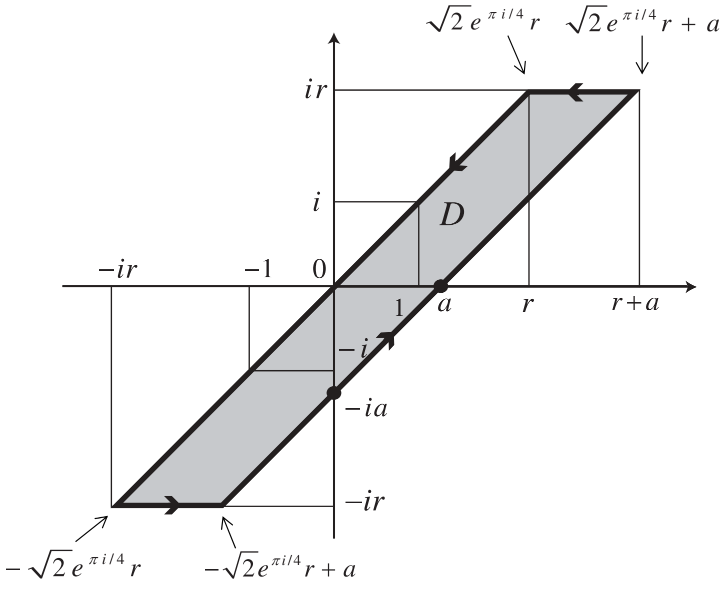


図 1 (図は $a>0$ の場合)

を得る。上記 (2) の計算と同様

$$
\left|\exp\left(\frac{2\pi}{n}(t+\sqrt{2}e^{\pi i/4}r)^2\right)\right|=\exp\left(\mp\frac{4\pi}{n}r(t\pm r)\right)\leq\exp\left(-\frac{2\pi}{n}r^2\right)
$$

が従う。ここに

$$\mp rt - r^2 \le -\frac{r^2}{2} \iff \frac{r^2}{2} \pm rt \ge 0 \iff \frac{r}{2}(r \pm 2t) \ge 0$$

であり最後の不等式は $r \ge 2|a| \ge \pm 2t$ から従う事を用いた。

以上より

$$\left|\int_{-r}^{r} \exp\left(\frac{2\pi i}{n}(a+\sqrt{2}e^{\pi i/4}s)^2\right) ds - \int_{-r}^{r} \exp\left(\frac{2\pi i}{n}(\sqrt{2}e^{\pi i/4}s)^2\right) ds\right|$$

$$= \left|\int_{0}^{a} \exp\left(\frac{2\pi i}{n}(t+\sqrt{2}e^{\pi i/4}r)^2\right) dt - \int_{0}^{a} \exp\left(\frac{2\pi i}{n}(t-\sqrt{2}e^{\pi i/4}r)^2\right) dt\right|$$

$$\le 2|a| \exp\left(-\frac{2\pi}{n}r^2\right)$$

となり (3) の証明は完結する。

(5) の証明

領域 $D = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\, z - \frac{1}{2} < \mathrm{Im}\, z < \mathrm{Re} z + \frac{1}{2}, -r < \mathrm{Im}\, z < r\}$ を考える。$f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ は正則故 f は $D \setminus \{0\}$ で正則で原点を極として持つ。極は一位でその留数は

$$\mathrm{Res}_0\ f = \lim_{z \to 0} z f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{n}k^2\right)$$

である。f を D の境界 $C = \partial D$ の正の向きに積分すると留数定理により

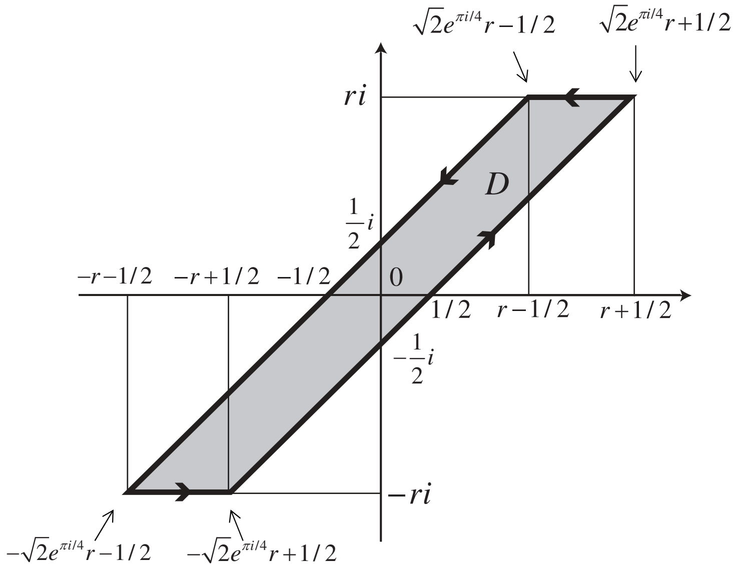


図 2

$$2\pi i\ \mathrm{Res}_0\ f = \int_C f(z)dz$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} f(t-\sqrt{2}e^{\pi i/4}r)dt + \int_{-r}^{r} f\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}e^{\pi i/4}s\right)\sqrt{2}e^{\pi i/4}ds$$

$$- \int_{-1/2}^{1/2} f(t+\sqrt{2}e^{\pi i/4}r)dt - \int_{-r}^{r} f\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{2}e^{\pi i/4}s\right)\sqrt{2}e^{\pi i/4}ds$$

を得る。従って

$$\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{2\pi}{n}k^2\right)-\frac{1+(-1)^n}{1-i}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-2\sqrt{\frac{\pi}{n}}r}^{2\sqrt{\frac{\pi}{n}}r}\exp(-x^2)dx$$

$$=\int_{-1/2}^{1/2}(f(t-\sqrt{2}e^{\pi i/4}r)-f(t+\sqrt{2}e^{\pi i/4}r))dt$$

$$+\sqrt{2}e^{\pi i/4}\left(\int_{-r}^{r}\left(f\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}e^{\pi i/4}s\right)-f\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{2}e^{\pi i/4}s\right)\right)ds\right.$$

$$\left.-(1+(-1)^n)\int_{-r}^{r}\exp\left(-\frac{4\pi}{n}s^2\right)ds\right)$$

となり補題１の (2) と (3) を用いると

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{2\pi i}{n}k^2\right)-\frac{1+(-1)^n}{1-i}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-2\sqrt{\frac{\pi}{n}}r}^{2\sqrt{\frac{\pi}{n}}r}\exp(-x^2)dx\right|$$

$$\leq\sup_{|t|\leq 1/2}|f(t-\sqrt{2}e^{\pi i/4}r)|+\sup_{|t|\leq 1/2}|f(t+\sqrt{2}e^{\pi i/4}r)|$$

$$+\sqrt{2}\left|\int_{-r}^{r}\left(f\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}e^{\pi i/4}s\right)-f\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{2}e^{\pi i/4}s\right)\right)ds-(1+(-1)^n)\int_{-r}^{r}\exp\left(\frac{2\pi i}{n}(\sqrt{2}e^{\pi i/4}s)^2\right)ds\right|$$

$$\leq\left(\frac{2e}{e-1}+\sqrt{2}\right)n\exp\left(-\frac{2\pi}{n}r^2\right)$$

となり $r\to\infty$ として (5) を得る。

補題２．　$t>0,\ z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ に対し

$$f(z)=\frac{1}{\exp(2\pi z)-1}\exp(-\pi t z^2)$$

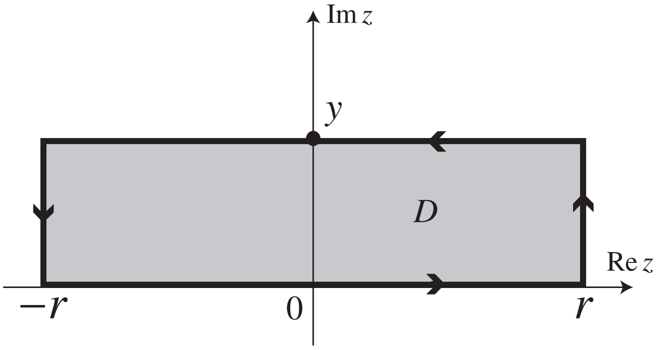
と置く。このとき次が成立つ。

(1) $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}}\exp(-\pi t y^2)\left|\int_{-r}^{r}\exp(-\pi t(x+iy)^2)dx-\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi t x^2)dx\right|=0$

(2) $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}f(x+i)dx=-\left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi t x^2)dx\right)\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-\pi n^2/t)$

(3) $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}f(x-i)dx=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi t x^2)dx\right)\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\pi n^2/t)$

証明　(1) 簡単の為 $y>0$ の場合を考える。$y<0$ の場合も同様である。正則函数 $\mathbb{C}\ni z\mapsto \exp(-\pi t z^2)\in\mathbb{C}$ を領域 $D=\{z\in\mathbb{C}; 0<\mathrm{Im}\ z<y,\ -r<\mathrm{Re}\ z<y\}$ の境界 $C=\partial D$ 上を正の向きに積分すると



$$0=\int_C \exp(-\pi t z^2)dz$$
$$=\int_{-r}^{r}\exp(-\pi t x^2)dx+\int_0^y \exp(-\pi t(r+is)^2)ds-\int_{-r}^{r}\exp(-\pi t(x+iy)^2)dx-\int_0^y \exp(-\pi t(-r+is)^2)ds$$

となる。右辺の第二番目と第四番目の積分は

$$\int_0^y |\exp(-\pi t(\pm r+is)^2)|ds=\exp(-\pi t r^2)\int_0^y \exp(\pi t s^2)ds$$

と評価されるので $r\to\infty$ のとき

$$\left|\int_{-r}^{r}\exp(-\pi t(x+iy)^2)dy-\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi t x^2)dx\right|$$
$$\le\left|\int_{-r}^{r}\exp(-\pi t(x+iy)^2)dy-\int_{-r}^{r}\exp(-\pi t x^2)dx\right|+\int_{|x|>r}\exp(-\pi t x^2)dx$$
$$\le 2\exp(-\pi t r^2)\int_0^y \exp(\pi t s^2)ds+2\int_r^{\infty}\exp(-\pi t x^2)dx$$
$$\to 0$$

を得る。更に $R>r>0$ に対し

$$\exp(-\pi t y^2)\left|\int_{-R}^{R}\exp(-\pi t(x+iy)^2)dx-\int_{-r}^{r}\exp(-\pi t(x+iy)^2)dx\right|$$
$$=\left|\left(\int_{-R}^{-r}+\int_r^R\right)\exp(-\pi t x^2-2i\pi t x y)dx\right|$$
$$\le\left(\int_{-R}^{-r}+\int_r^R\right)\exp(-\pi t x^2)dx=2\int_r^R \exp(-\pi t x^2)dx$$

となるので $R\to\infty$ とすると

$$\exp(-\pi t y^2)\left|\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi t(x+iy)^2)dx-\int_{-r}^{r}\exp(-\pi t(x+iy)^2)dx\right|$$
$$\le 2\int_r^{\infty}\exp(-\pi t x^2)dx$$

以上より $r\to\infty$ として

$$\begin{aligned}&\sup_{y>0}\exp(-\pi ty^2)\left|\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi tx^2)dx-\int_{-r}^{r}\exp(-\pi t(x+iy)^2)dx\right|\\&\leq 2\int_r^{\infty}\exp(-\pi tx^2)dx\\&\to 0\end{aligned}$$

を得る。

(2) $z=x+i,\ x\in\mathbb{R}$ に対し

$$|\exp(2\pi iz)|=|\exp(2\pi i(x+i))|=|\exp(2\pi ix-2\pi)|=\exp(-2\pi)<1$$

であるから

$$\begin{aligned}f(x+i)=&\ \frac{1}{\exp(2\pi i(x+i))-1}\exp(-\pi t(x+i)^2)\\&=-\sum_{n=0}^{\infty}\exp(2n\pi i(x+i))\exp(-\pi t(x+i)^2)\\&=-\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-\pi t\left(x+i-i\frac{n}{t}\right)^2\right)\exp\left(-\pi\frac{n^2}{t}\right)\end{aligned}$$

に於ける級数は x に就いて $\mathbb{R}$ 上一様に絶対収束する。よって

$$\begin{aligned}&\int_{-r}^{r}f(x+i)dx\\&=-\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-\pi\frac{n^2}{t}\right)\int_{-r}^{r}\exp\left(-\pi t\left(x+i-i\frac{n}{t}\right)^2\right)dx\\&=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\exp\left(-\pi t\left(1-\frac{n}{t}\right)^2\right)\int_{-r}^{r}\exp\left(-\pi t\left(x+i-i\frac{n}{t}\right)^2\right)dx\right]\exp(\pi t-2\pi n)\end{aligned}$$

となる。(1) より

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{n\geq 0}\exp\left(-\pi t\left(1-\frac{n}{t}\right)^2\right)\left|\int_{-r}^{r}\exp\left(-\pi t\left(x+i\left(1-\frac{n}{t}\right)\right)^2\right)dx-\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi tx^2)dx\right|=0$$

となるので

$$\lim_{r\to\infty}\left|\int_{-r}^{r} f(x+i)dx + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\exp\left(-\pi t\left(1-\frac{n}{t}\right)^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi t x^2)dx\right]\exp(\pi t - 2\pi n)\right|$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\left[\exp\left(-\pi t\left(1-\frac{n}{t}\right)^2\right)\left(\int_{-r}^{r}\exp\left(-\pi t\left(x+i\left(1-\frac{n}{t}\right)\right)^2\right)dx\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi t x^2)dx\right)\right]\exp(\pi t - 2\pi n)\right|$$

$$\leq \lim_{r\to\infty}\sup_{n\geq 0}\exp\left(-\pi t\left(1-\frac{n}{t}\right)^2\right)\left|\int_{-r}^{r}\exp\left(-\pi t\left(x+i\left(1-\frac{n}{t}\right)\right)^2\right)dx\right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi t x^2)dx\right|\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\exp(\pi t - 2\pi n)$$

$$= 0$$

を得る。これより (2) が従う。

(3) $z = x - i,\ x \in \mathbb{R}$ に対し

$$|\exp(-2\pi i z)| = |\exp(-2\pi i(x-i))| = |\exp(-2\pi i x - 2\pi)| = \exp(-2\pi) < 1$$

であるから

$$\begin{aligned}
f(x-i) &= \frac{1}{\exp(2\pi i(x-i)) - 1}\exp(-\pi t(x-i)^2) \\
&= \frac{\exp(-2\pi i(x-i))}{1-\exp(-2\pi i(x-i))}\exp(-\pi t(x-i)^2) \\
&= \exp(-2\pi i(x-i))\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-2n\pi i(x-i))\exp(-\pi t(x-i)^2) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\exp(-2n\pi i(x-i))\exp(-\pi t(x-i)^2) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\pi t\left(x-i+i\frac{n}{t}\right)^2\right)\exp\left(-\pi\frac{n^2}{t}\right)
\end{aligned}$$

に於ける級数は x に就いて $\mathbb{R}$ 上一様に絶対収束する。よって

$$\int_{-r}^{r} f(x-i)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\pi\frac{n^2}{t}\right)\int_{-r}^{r}\exp\left(-\pi t\left(x-i+i\frac{n}{t}\right)^2\right)dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\exp\left(-\pi t\left(\frac{n}{t}-1\right)^2\right)\int_{-r}^{r}\exp\left(-\pi t\left(x+i\left(\frac{n}{t}-1\right)\right)^2\right)dx\right]\exp(\pi t - 2\pi n)$$

となる。(1) より

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{n\geq 1}\exp\left(-\pi t\left(\frac{n}{t}-1\right)^2\right)\left|\int_{-r}^{r}\exp\left(-\pi t\left(x+i\left(\frac{n}{t}-1\right)\right)^2\right)dx - \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi t x^2)dx\right| = 0$$

となるので

$$\lim_{r\to\infty}\left|\int_{-r}^{r} f(x-i)dx - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\exp\left(-\pi t\left(\frac{n}{t}-1\right)^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi t x^2)dx\right]\exp(\pi t - 2\pi n)\right|$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{\pi}{t}\left(\frac{n}{t}-1\right)^2\right)\left(\int_{-r}^{r}\exp\left(-\pi t\left(x+i\left(\frac{n}{t}-1\right)\right)^2\right)dx\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi t x^2)dx\right)\right]\exp(\pi t - 2\pi n)\right|$$

$$\leq \lim_{r\to\infty}\sup_{n\geq 1}\exp\left(-\frac{\pi}{t}\left(\frac{n}{t}-1\right)^2\right)\left|\int_{-r}^{r}\exp\left(-\pi t\left(x+i\left(\frac{n}{t}-1\right)\right)^2\right)dx\right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi t x^2)dx\right|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\exp(\pi t - 2\pi n)$$

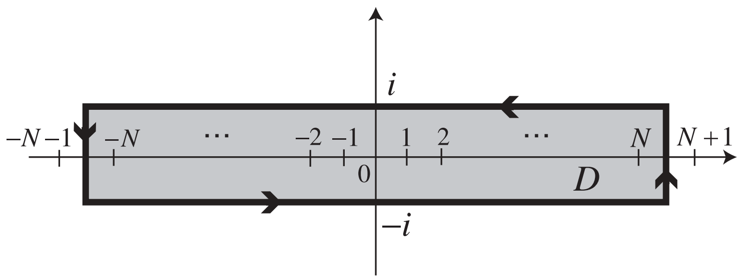
$$= 0$$

を得る。これより (3) が従う。

(6) の証明　補題 2 の正則函数

$$f : \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \ni z \mapsto \frac{\exp(-\pi t z^2)}{\exp(2\pi i z)-1} \in \mathbb{C}$$

は $\mathbb{Z}$ の各点を一位の極として持ち $m\in\mathbb{Z}$ に於ける留数は



$$\mathrm{Res}_m\, f = \lim_{z\to m}(z-m)\frac{\exp(-\pi t z^2)}{\exp(2\pi i z)-1}$$

$$= \lim_{z\to m}(z-m)\frac{\exp(-\pi t z^2)}{\exp(2\pi i z)-\exp(2\pi i m)} = \frac{\exp(-\pi t m^2)}{2\pi i\exp(2\pi i m)}$$

$$= \frac{\exp(-\pi m^2 t)}{2\pi i}$$

と計算される。そこで $N\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し f を領域

$$D = \left\{z\in\mathbb{C}; -1 < \mathrm{Im}\, z < 1,\ -N-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\, z < N+\frac{1}{2}\right\}$$

の境界 $C = \partial D$ の正の向きに沿って積分すると留数定理により

$$2\pi i\sum_{m=-N}^{N}\mathrm{Res}_m\, f = \int_C f(z)dz$$

$$= \int_{-N-1/2}^{N+1/2} f(x-i)dx + \int_{-1}^{1} f\left(N+\frac{1}{2}+is\right)ds - \int_{-N-1/2}^{N+1/2} f(x+i)dx - \int_{-1}^{1} f(-N-\frac{1}{2}+is)ds$$

を得る。$z=\pm\left(N+\frac{1}{2}\right)+is,\ s\in[-1,1]$ に対して

$$\begin{aligned}1-\exp(2\pi iz)&=1-\exp(\pm(2N+1)\pi i)\exp(-2\pi s)\\&=1+\exp(-2\pi s)\geq 1\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}\left|f\left(\pm\left(N+\frac{1}{2}\right)+is\right)\right|&\leq\left|\exp\left(-\pi t\left(\pm\left(N+\frac{1}{2}\right)+is\right)^2\right)\right|\\&=\exp\left(-\pi t\left(N+\frac{1}{2}\right)^2\right)\exp(\pi ts^2)\end{aligned}$$

が従う。よって $N\to\infty$ とするとき

$$\left|\int_{-1}^{1}f\left(\pm\left(N+\frac{1}{2}\right)+is\right)ds\right|\leq\exp\left(-\pi t\left(N+\frac{1}{2}\right)^2\right)\int_{-1}^{1}\exp(\pi ts^2)ds$$

は 0 に収束する。補題 2 の (2) と (3) より上の留数計算にて $N\to\infty$ とする事により

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-\pi n^2t)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi tx^2)dx\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi n^2}{t}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi n^2}{t}\right)\right)$$

を得る。これは (6) に外ならない。

参考文献： 高橋礼司、[新版] 複素解析、東京大学出版会
R. B. Burckel, *An Introduction to Classical Complex Analysis*,
Vol.1, Pure and Applied Mathematics 82, Academic Press.