トーラスと回転行列

平成 20 年 7 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ を $(2\pi\mathbb{Z})^n$ で割った商空間 $\mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ をトーラスと謂い $\mathbb{T}^n$ で表し付随する商写像を $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ で表す。即ち $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow x - y \in (2\pi\mathbb{Z})^n$$

となる。$\varphi(x)$ は x を代表元とする同値類であり $[x]$ とも表す事にする。即ち

$$[x] = \{y \in \mathbb{R}^n; x - y \in (2\pi\mathbb{Z})^n\}$$

である。$[x], [y] \in \mathbb{T}^n$ に対し、その和 $[x] + [y]$ を $[x + y]$ とするとこの値は代表元の取り方に依らず定まる。実際 $[x] = [x'],\ [y] = [y']$ ならば $x - x',\ y - y' \in (2\pi\mathbb{Z})^n$ であるから $(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y') \in (2\pi\mathbb{Z})^n$ 即ち $[x + y] = [x' + y']$ となるからである。この算法の零元は $[0]$ であり $[x]$ の逆元は $[-x]$ で与えられる。以上より $\mathbb{T}^n$ は加法群となり $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ は準同型写像となる：

$$\varphi(x + y) = [x + y] = [x] + [y] = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$\mathbb{T}^n$ に $\mathbb{R}^n$ から商位相を導入する。具体的には $\mathbb{T}^n$ の開集合族を

$$\{U \subset \mathbb{T}^n; \varphi^{-1}(U) \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の開集合}\}$$

と定義する。このとき $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ は連続となる。この位相は φ を連続とする $\mathbb{T}^n$ の位相のうちで最強のものである。

$\mathbb{C}^n$ の単位多重円周

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}^n &= \underbrace{\mathbb{U} \times \cdots \times \mathbb{U}}_{n} \\
&= \{z \in \mathbb{C}^n; |z_1| = \cdots = |z_n| = 1\} \\
&= \{(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}) \in \mathbb{C}^n; \theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n\}
\end{aligned}$$

を考える。$\mathbb{U}^n$ は $\mathbb{C}^n$ の乗法

$$z = (z_1, \cdots, z_n),\ z' = (z'_1, \cdots, z'_n) \text{ に対して } zz' = (z_1 z'_1, \cdots, z_n z'_n)$$

によって可換群を成し、単位元は $(1, \cdots, 1)$ である。$\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$E(\theta) = (e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})$$

と置くと $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{U}^n$ への写像 $E:\mathbb{R}^n\to\mathbb{U}^n$ が定まる。$\theta,\theta'\in\mathbb{R}^n$ に対し $E(\theta+\theta')=E(\theta)E(\theta')$ となるので E は加法群 $\mathbb{R}^n$ から乗法群 $\mathbb{U}^n$ への準同型写像となる。更に $\mathrm{Ker}\ E=E^{-1}((1,\cdots,1))=(2\pi\mathbb{Z})^n$ であるから $E=\bar{E}\circ\varphi$ なる同型写像 $\bar{E}:\mathbb{T}^n=\mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n\to\mathbb{U}^n$ が誘導される。$\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{U}^n$ に誘導された相対位相と、$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{T}^n$ に誘導された商位相の定義により $\bar{E}$ は連続となる。$\mathbb{T}^n=\mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ は $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合 $[0,2\pi]^n$ の連続写像 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{T}^n$ の像 $\varphi([0,2\pi]^n)$ と一致するのでコンパクトである。$\bar{E}$ はコンパクト空間 $\mathbb{T}^n$ からハウスドルフ空間 $\mathbb{U}^n$ への全単射連続写像故同相写像となる。

実 2 次正方行列の成す空間 $M(2;\mathbb{R})$ の直積空間 $M(2;\mathbb{R})^n=\underbrace{M(2;\mathbb{R})\times\cdots\times M(2;\mathbb{R})}_{n}$ を考える。$M(2;\mathbb{R})^n$ は各成分毎の積

$$(A_1,\cdots,A_n)(A_1',\cdots,A_n')=(A_1A_1',\cdots,A_nA_n')$$

により (非可換) 半群を成し、$GL(2;\mathbb{R})^n$ は (非可換) 群を成す。単位元は $(I,\cdots,I)$ である。ここに $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ は 2 次単位行列である。$z\in\mathbb{C}^n$ に対し

$$\begin{aligned}T(z)&=T(z_1,\cdots,z_n)\\&=((\mathrm{Re}\ z_j)I+(\mathrm{Im}\ z_j)J)_{1\le j\le n}\\&=((\mathrm{Re}\ z_1)I+(\mathrm{Im}\ z_1)J,\cdots,(\mathrm{Re}\ z_n)I+(\mathrm{Im}\ z_n)J),\quad J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

と置くと $T:\mathbb{C}^n\to M(2;\mathbb{R})^n$ が定まる。$z=x+iy,\ z'=x'+iy'\in\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^n+i\mathbb{R}^n$ に対し

$$\begin{aligned}T(zz')&=T(z_1z_1',\cdots,z_nz_n')\\&=((\mathrm{Re}\ (z_jz_j'))I+(\mathrm{Im}\ (z_jz_j'))J)_{1\le j\le n}\\&=((x_jx_j'-y_jy_j')I+(x_jy_j'+x_j'y_j)J)_{1\le j\le n}\\&=\left(\begin{pmatrix}x_jx_j'-y_jy_j'&-(x_jy_j'+x_j'y_j)\\x_jy_j'+x_j'y_j&x_jx_j'-y_jy_j'\end{pmatrix}\right)_{1\le j\le n}\\&=\left(\begin{pmatrix}x_j&-y_j\\y_j&x_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_j'&-y_j'\\y_j'&x_j'\end{pmatrix}\right)_{1\le j\le n}\\&=\left(\begin{pmatrix}x_j&-y_j\\y_j&x_j\end{pmatrix}\right)_{1\le j\le n}\left(\begin{pmatrix}x_j'&-y_j'\\y_j'&x_j'\end{pmatrix}\right)_{1\le j\le n}\\&=((\mathrm{Re}\ z_j)I+(\mathrm{Im}\ z_j)J)_{1\le j\le n}\ ((\mathrm{Re}\ z_j')I+(\mathrm{Im}\ z_j')J)_{1\le j\le n}\\&=T(z)T(z')\end{aligned}$$

となるので T は乗法群 $\mathbb{C}^n$ から $M(2;\mathbb{R})^n$ への準同型写像である。$z\in\mathbb{U}^n$ に対しては

$$\det((\mathrm{Re}\ z_j)I+(\mathrm{Im}\ z_j)J)=(\mathrm{Re}\ z_j)^2+(\mathrm{Im}\ z_j)^2=1,$$

$$
\begin{aligned}
&{}^t((\mathrm{Re}\ z_j)I+(\mathrm{Im}\ z_j)J)((\mathrm{Re}\ z_j)I+(\mathrm{Im}\ z_j)J)\\
&=((\mathrm{Re}\ z_j)I-(\mathrm{Im}\ z_j)J)((\mathrm{Re}\ z_j)I+(\mathrm{Im}\ z_j)J)\\
&=((\mathrm{Re}\ z_j)^2+(\mathrm{Im}\ z_j)^2)I=I
\end{aligned}
$$

となるので $T(z)\in SO(2)^n$ である。ここで等式 $J^2=-I$ を用いており $SO(2)^n$ は実 2 次特殊直交群

$$SO(2)=\{A\in GL(2;\mathbb{R});{}^tAA=I,\ \det A=1\}$$

の直積空間である。$SO(2)^n$ の単位元は $(I,\cdots,I)$ である、以下 T を $\mathbb{U}^n$ から $SO(2)^n$ への準同型写像と考える。T は全射である事は次の様にして分かる。簡単の為 $n=1$ の場合について示そう。
$A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SO(2)$ に対し

$$
\begin{aligned}
{}^tAA=I\quad&\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow\quad\begin{cases} a^2+c^2=1\\ ab+cd=0\\ b^2+d^2=1\end{cases}
\end{aligned}
$$

であるから最後の第一式より $\theta\in\mathbb{R}$ が存在して $a=\cos\theta,\ c=\sin\theta$ となる。第二式に代入すると $b\cos\theta+d\sin\theta=0$ となるから $\sin\theta\neq0$ 且つ $\cos\theta\neq0$ ならば $b/\sin\theta=-d/\cos\theta\equiv\ell$ によって $b=\ell\sin\theta,\ d=-\ell\cos\theta$ を得る。この表し方は $\sin\theta=0$ 又は $\cos\theta=0$ の場合も $(b,d)=(0,\pm\ell)$ 又は $(b,d)=(\pm\ell,0)$ として成立する。そこで $b^2+d^2=1$ に代入する事により $\ell^2=1$ を得る。このとき $\det A=ad-bc=1$ なる条件に $a=\cos\theta,\ b=\ell\sin\theta,\ c=\sin\theta,\ d=-\ell\cos\theta$ を代入する事により $\ell=-1$ を得るので $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ となる。即ち $A=(\cos\theta)I+(\sin\theta)J$ であるから $A=T(e^{i\theta})$ となる $\theta\in\mathbb{R}$ の存在が従う。一方

$$
\begin{aligned}
&z\in\ \mathrm{Ker}\ T=T^{-1}(I,\cdots,I)\\
&\Leftrightarrow\ \mathrm{Re}\ z_1=\cdots=\ \mathrm{Re}\ z_n=1,\ \mathrm{Im}\ z_1=\cdots=\ \mathrm{Im}\ z_n=0\\
&\Leftrightarrow z=(1,\cdots,1)
\end{aligned}
$$

となるので T は単射である。よって $T:\mathbb{U}^n\to SO(2)^n$ は同型写像である。$\mathrm{Re}:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ 及び $\mathrm{Im}:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ は連続であるから、$\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{U}^n$ に誘導された相対位相と $M(2;\mathbb{R})^n$ から $SO(2)^n$ に誘導された相対位相に関し T は連続である。T はコンパクト空間 $\mathbb{U}^n$ からハウスドルフ空間 $SO(2)^n$ への全単射連続写像故同相写像である。

$\mathbb{R}^n$ から $SO(2)^n$ への写像

$$R : (\theta_1, \cdots, \theta_n) \mapsto \left(\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix} \right)$$

を考える。$R = T \circ E$ であるから R は連続な準同型全射となる。具体的には R の定義と E と T の準同型性により R の準同型性

$$\begin{aligned} R(\theta + \theta') &= (T \circ E)(\theta + \theta') = T(E(\theta + \theta')) \\ &= T(E(\theta)E(\theta')) \\ &= T(E(\theta))T(E(\theta')) \\ &= R(\theta)R(\theta') \end{aligned}$$

が従う。これより三角函数の一連の加法定理が得られる。($e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$ からも容易に得られる。) Ker R = Ker $E = (2\pi\mathbb{Z})^n$ であるから

$$R = \bar{R} \circ \varphi \text{ なる同型写像 } \bar{R} : \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n \to SO(2)^n$$

が得られる。$\bar{R}$ はコンパクト空間 $\mathbb{T}^n$ からハウスドルフ空間 $SO(2)^n$ への全単射連続写像故同相写像である。

さて上に現れた空間及び写像を図式にしておこう。$\bar{E} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{U}^n$, $T : \mathbb{U}^n \to SO(2)^n$, $\bar{R} : \mathbb{T}^n \to SO(2)^n$ は位相群の位相同型写像であり Ker E = Ker $R = (2\pi\mathbb{Z})^n$ である。

$$\begin{tikzcd} & & SO(2)^n \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "E"] \arrow[urr, bend left, "R"] \arrow[drr, bend right, "\varphi"'] & \mathbb{U}^n \arrow[ur, "T"] & \\ & & \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n = \mathbb{T}^n \arrow[ul, "\bar{E}"'] \arrow[uu, "\bar{R}"'] \end{tikzcd}$$

最後に $n=1$ の場合に対応する関係式を纏めて置こう。

定義

$E(\theta)=e^{i\theta}$

$$R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=(T\circ E)(\theta)=T(e^{i\theta})$$

特別な値

$E(0)=1$

$$R(0)=(T\circ E)(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

$E(\frac{\pi}{2})=i$

$$R(\tfrac{\pi}{2})=(T\circ E)(\tfrac{\pi}{2})=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=J$$

虚数単位

$i^2=-1$

$J^2=-I$

オイラーの公式

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=(\cos\theta)I+(\sin\theta)J$$

$E(\theta)=(\cos\theta)E(0)+(\sin\theta)E(\frac{\pi}{2})$

$R(\theta)=(\cos\theta)R(0)+(\sin\theta)R(\frac{\pi}{2})$

指数法則

$e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta}e^{i\theta'}$

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta')\\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta')\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta' & -\sin\theta'\\ \sin\theta' & \cos\theta'\end{pmatrix}$$

$E(\theta+\theta')=E(\theta)E(\theta')$

$R(\theta+\theta')=R(\theta)R(\theta')$

微分法

$\frac{d}{d\theta}(e^{i\theta})=ie^{i\theta}=e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$

$$\frac{d}{d\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & -\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$E'(\theta)=iE(\theta)=E(\theta+\frac{\pi}{2})$

$R'(\theta)=JR(\theta)=R(\theta+\frac{\pi}{2})$

参考文献： 小林俊行、大島利雄、リー群と表現論、岩波書店
森毅、現代の古典解析、現代数学社
H. カルタン、複素函数論、岩波書店