三角函数と回転

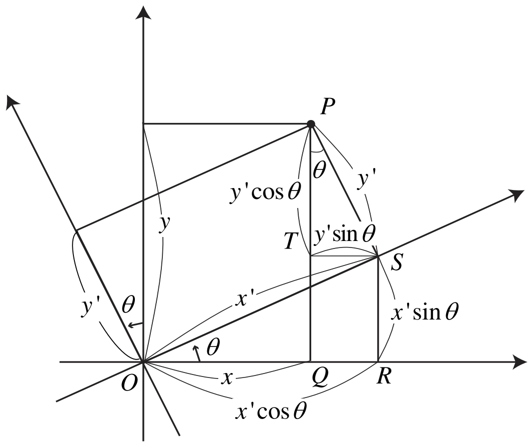
平成 20 年 10 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

1. 座標系の回転

直交座標を原点 O の周りに角度 θ だけ回転させた座標を考え、元の座標系を基準座標、回転後の座標系を新座標と呼ぶ事にしよう。平面上の一点 P を両座標系で表示した時、基準座標で (x, y), 新座標で (x', y') となったとする。

このとき $OS = x',\ PS = y'$ であるから

$$x = OR - TS = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$
$$y = RS + TP = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$



となる。即ち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

と表示される。基準座標だけで考えると (x', y') を角度 θ だけ回転させた点は (x, y) と表示される。そこで

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

を角度 θ による回転行列と呼ぼう。特別な場合を列挙する。

$$R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ 恒等変換

$$R\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \end{pmatrix}$$ 座標の差と和で表される変換[注 1]

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$ 直交するベクトルへの変換 (交代行列)

$$R(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$ 反転 (対称行列)

[注 1] この形の変換は物を斜め 45 度から見直す操作に対応し応用上重要な役割を果たす場合がある。例えば
1.$(1+1)$ 次元の線型波動方程式の解法
2. 分子の振動モデル (ランダウ・リフシッツ「力学」東京図書)
3. 磁場における荷電粒子の運動 (湯川秀樹・豊田利幸編「現代物理学の基礎 3、量子力学 I」岩波書店)
4. ワイル方程式とディラック方程式の関係 (同上)
5. 量子統計力学における固有函数の対称化・反対称化 (ハイゼンベルグ「量子論の物理的基礎」みすず書房)

回転行列の性質を幾何学的な考察から導き、対応する三角函数の性質を考えよう。

(a) **回転の合成**
平面上の一点を角度 θ 回転させた点を更に角度 φ 回転させた点は元の点を角度 $(\theta+\varphi)$ だけ回転させた点に等しいので、等式 $R(\theta+\varphi)=R(\varphi)R(\theta)$ が成立つ。即ち

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

この等式を成分毎に比較することにより三角函数の加法定理を得る。

(b) **回転の逆**
平面上の点を角度 θ だけ回転させる変換の逆変換は、角度 $(-\theta)$ だけ回転させる変換に等しいので $R(\theta)^{-1}=R(-\theta)$ が成立つ。即ち

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

この等式を成分毎に比較することにより、$\sin$ は奇函数であり $\cos$ は偶函数であることが分かる。

原点を中心とした角度 θ による回転が線型変換であり、その回転で x 軸方向の単位ベクトル $(1,0)$ は $(\cos\theta,\sin\theta)$ に移り y 軸方向の単位ベクトル $(0,1)$ は $(-\sin\theta,\cos\theta)$ に移ると云う事を仮定すると回転行列は次の様に自然に現れる。即ち

$$\begin{aligned} & f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \quad \text{を線型変換とし} \\ & f(1,0)=(\cos\theta,\sin\theta) \\ & f(0,1)=(-\sin\theta,\cos\theta) \end{aligned}$$

であると仮定する。$x,y\in\mathbb{R}$ に対し f の線型性より

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x(1,0)+y(0,1)) \\ &= xf(1,0)+yf(0,1) \\ &= x(\cos\theta,\sin\theta)+y(-\sin\theta,\cos\theta) \\ &= (x\cos\theta,x\sin\theta)+(-y\sin\theta,y\cos\theta) \\ &= (x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta) \end{aligned}$$

これを行列表示すると

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R(\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる。

2. 円周上の運動

平面内の単位円周上に拘束された点の運動を考えよう。

命題１.　$\mathbf{x} : \mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ は C^2 級であり、単位円上を動くものとする。即ち $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ とするとき、$\mathbf{x}(t)$ は定ベクトルではなく任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $|\mathbf{x}(t)|^2 = \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t) = x(t)^2 + y(t)^2 = 1$ が成立つものとする。このとき速度ベクトル $\mathbf{x}'(t)$ は $\mathbf{x}(t)$ に垂直である。即ち、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $\mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}(t) = 0$ である。また、次は同値である。

(1) 速度ベクトルの大きさは 0 ではなく一定である。即ち任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し

$$|\mathbf{x}'(t)| = |\mathbf{x}'(0)| > 0$$

(2) 速度ベクトルは 0 ではなく、加速度ベクトルと速度ベクトルは垂直である。即ち任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $\mathbf{x}'(t) \neq 0$ であり

$$\mathbf{x}''(t) \cdot \mathbf{x}'(t) = 0$$

(3) 加速度ベクトルと位置ベクトルは平行である。即ち、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $k(t) \in \mathbb{R}$ があって

$$\mathbf{x}''(t) = k(t)\mathbf{x}(t)$$

(4) $\mathbf{x}$ は微分方程式

$$\mathbf{x}''(t) + |\mathbf{x}'(t)|^2\mathbf{x}(t) = 0$$

の解である。(注 2)

(証明)　$\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ に対し

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$$

であるから $|\mathbf{x}(t)|^2 = 1$ を t で微分して 2 で割って $\mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}(t) = 0$ を得る。

(1) ⇒ (2) :　$|\mathbf{x}'(t)|^2 = |\mathbf{x}'(0)|^2$ を t で微分し 2 で割って $\mathbf{x}''(t) \cdot \mathbf{x}'(t) = 0$ を得る。

(2) ⇒ (3) :　$\mathbf{x}(t)$ と $\mathbf{x}'(t)$ は垂直なので任意の平面ベクトルは $\mathbf{x}(t)$ と $\mathbf{x}'(t)$ の一次結合で表される。よって任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $k(t), l(t) \in \mathbb{R}$ があって $\mathbf{x}''(t) = k(t)\mathbf{x}(t) + l(t)\mathbf{x}'(t)$ と表される。この両辺と $\mathbf{x}'(t)$ との内積を取ると $\mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}(t) = 0$ なので

$$\mathbf{x}''(t) \cdot \mathbf{x}'(t) = l(t)|\mathbf{x}'(t)|^2$$

$|\mathbf{x}'(t)| \neq 0$ 及び (2) より $l(t) = 0$ となるので (3) が従う。

(3) ⇒ (4) :　$\mathbf{x}''(t) = k(t)\mathbf{x}(t)$ より

$$\mathbf{x}''(t) \cdot \mathbf{x}(t) = k(t)\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t) = k(t)$$

(注 2) この微分方程式は調和写像の方程式の特別な場合と見做す事が出来る。

一方 $\mathbf{x}'(t)\cdot\mathbf{x}(t)=0$ を微分すると

$$\mathbf{x}''(t)\cdot\mathbf{x}(t)+\mathbf{x}'(t)\cdot\mathbf{x}'(t)=0$$

よって $k(t)=-\mathbf{x}'(t)\cdot\mathbf{x}'(t)=-|\mathbf{x}'(t)|^2$

　これより $\mathbf{x}''(t)=-|\mathbf{x}'(t)|^2\mathbf{x}(t)$

(4) ⇒ (1) :　(4) の微分方程式と $\mathbf{x}(t)\cdot\mathbf{x}'(t)=0$ を用いて

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\mathbf{x}'(t)|^2 &= 2\mathbf{x}''(t)\cdot\mathbf{x}'(t)\\ &= -2|\mathbf{x}'(t)|^2\mathbf{x}(t)\cdot\mathbf{x}'(t)=0\end{aligned}$$

　これより $|\mathbf{x}'(t)|=|\mathbf{x}'(0)|$ を得る。$\mathbf{x}'(0)=0$ ならば $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(0)+\int_0^t\mathbf{x}'(s)ds=\mathbf{x}(0)$ より $\mathbf{x}(t)$ は定ベクトルとなってしまうので $\mathbf{x}'(0)\neq 0$ である。

3. 三角函数

単位円周を定角速度 ω で動く点は、命題 1 の (1) で $|\mathbf{x}'(t)|=|\omega|$ としたものになるので (4) より微分方程式 $\mathbf{x}''(t)+\omega^2\mathbf{x}(t)=0$ を満たす。$\mathbf{x}(0)=(1,0)$ とすると $\mathbf{x}'(0)$ は (1,0) に直交する長さ $|\omega|$ のベクトルとして $\mathbf{x}'(0)=(0,\pm\omega)$ で与えられる。そこで $\mathbf{x}'(0)=(0,\omega)$ と定めると $\mathbf{x}(t)=(\cos\omega t,\sin\omega t)$ が解となる。よって、単位円周上を (1,0) から出発し単位角速度 $(\omega=1)$ で等速円運動する点の x 座標と y 座標が三角函数である。

　このとき初期速度ベクトルは $\mathbf{x}'(0)=(0,1)$ であり $\mathbf{x}'(0)=\lim_{t\to 0}t^{-1}(\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}(0))=(0,1)$ を座標毎に考えると $\mathbf{x}(0)=(1,0)$ なので

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t}=0,\quad \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

となる。前者は後者から導かれる。実際次の命題が成立つ。

命題 2 .　次の三つと cos の原点での連続性を仮定する：

(a) $\cos^2 t+\sin^2 t=1,\ t\in\mathbb{R}$

(b) $\cos(0)=1$

(c) $\pm\, t>0 \Rightarrow \pm\sin t>0$

このとき次は同値である：

(1) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

(2) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2}$

(証明)　次の等式と cos の連続性を用いれば良い：

$$\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1-\cos t}{t^2}\,\frac{1+\cos t}{1+\cos t}=\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\frac{1}{1+\cos t},$$

$$\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1-\cos t}{t^2}\cdot(1+\cos t)$$

参考文献： 森毅, 現代の古典解析-微積分基礎課程, 現代数学社
M. Giaquinta and G. Modica, Mathematical Analysis,
Function of One Variable, Birkhäuser.
M. Giaquinta, G. Modica and J. Souček, Cartesian Currents in the Calculus of Variations II, Springer