単位球面上の積分

平成 23 年 1 月
平成 27 年 11 月改訂
令和 3 年 2 月改訂
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

"I saw the crescent. You saw the Whole of the Moon."
Mike Scott, The Whole of the Moon

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に於ける $(n-1)$ 次元単位球面 $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$ 上の積分表示に就いて、単位球面の典型的な認識方法に従って述べ、対応する面積要素の変換則を纏めて置こう。

１．単位球面の媒介変数に依る表示方法

単位球面の媒介変数表示方法として典型的と思われるのは次の 4 つである：

I. 極座標表示

n 次元極座標として $(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\begin{aligned}&\Phi_n(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1})\\ &= (r\cos\theta_1, r\sin\theta_1\cos\theta_2, \cdots, r(\prod_{k=1}^{j-1}\sin\theta_k)\cos\theta_j, \cdots, r(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\theta_k)\ \cos\theta_{n-1}, r\prod_{k=1}^{n-1}\sin\theta_k)\end{aligned}$$

と置いて定まる写像 $\Phi_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を考える。定義より $\Phi_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ であり

$$\begin{aligned}&\Phi_n([0,\infty) \times [0,\pi]^{n-2} \times [0,2\pi)) = \mathbb{R}^n,\\ &\Phi_n((0,\infty) \times [0,\pi]^{n-2} \times [0,2\pi)) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\\ &\Phi_n(\{1\} \times [0,\pi]^{n-2} \times [0,2\pi)) = S^{n-1}\end{aligned}$$

となる事が従う。よって

$$\Phi(1,\cdot) : [0,\pi]^{n-2} \times [0,2\pi) \ni (\theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) \mapsto \Phi_n(1, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) \in S^{n-1}$$

は S^{n-1} の一つの媒介変数表示を与える。

II. 回転体表示

単位球面は原点を通る任意の直線を軸として回転しても不変であり、その軸に垂直に切断した切片は（一次元低い）球面を成す。その事情を具体的に記述する為に回転軸を第 1 座標軸とし単位球

面をを切断する点を $(\rho, 0, \cdots, 0) \in [-1,1] \times \mathbb{R}^{n-1}$ としよう。このとき垂直に切断された切片 S_ρ は $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 内で

$$
\begin{aligned}
S_\rho &= \{\xi \in \mathbb{R}^n \ ; \xi \cdot (\rho, 0, \cdots, 0) = 0, \ |\xi|^2 + \rho^2 = 1\} \\
&= \{\xi \in \mathbb{R}^n \ ; \xi_2^2 + \cdots + \xi_2^n = 1 - \rho^2\} \\
&= \{(0, (1-\rho^2)^{1/2}\omega') \in \mathbb{R}^n; \omega' \in S^{n-2}\}
\end{aligned}
$$

と表される。そこで $S^{n-1} = \displaystyle\bigcup_{\rho \in [-1,1]} \{(\rho, 0, \cdots, 0)\} \times S_\rho$ と見做し、写像

$$
\Theta : [-1,1] \times S^{n-2} \ni (\rho, \omega') \mapsto (\rho, (1-\rho^2)^{1/2}\omega') \in S^{n-1}
$$

を定めると $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x')$ に対し

$$
\Theta^{-1}(x_1, x') = \begin{cases} (x_1, (1-x_1^2)^{-1/2}x'), & x_1 \in (-1,1), \\ (\pm 1, 0), & x_1 = \pm 1 \end{cases}
$$

となり Θ は S^{n-1} と直積空間 $[-1,1] \times S^{n-2}$ との同相写像を与える事となる。

III. グラフ表示

単位球面は第１座標軸にグラフ化すると

$$
\begin{aligned}
S^{n-1} &= S_+^{n-1} \cup S_-^{n-1} \cup \{(0, x') \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}; |x'| = 1\}, \\
S_\pm^{n-1} &= \{(\pm(1-|x'|^2)^{1/2}, x') \in \mathbb{R}^n; x' \in B^{n-1}\}, \\
B^{n-1} &= \{x' = (x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}; x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}
\end{aligned}
$$

と表示する事が出来る。写像

$$
\Psi^\pm : B^{n-1} \ni x' \mapsto (\pm(1-|x'|^2)^{1/2}, x') \in S_\pm^{n-1}
$$

は同相写像であり $(n-1)$ 次元単位球 B^{n-1} をパラメタ空間として単位半球面 $S_\pm^{n-1}$ のグラフ表示を与える。

IV. 立体射影表示

単位球面は第１座標軸に北極 $(1, 0, \cdots, 0)$ 又は南極 $(-1, 0, \cdots, 0)$ を置いたリーマン球面と見做し $\mathbb{R}^{n-1}$ の一点コンパクト化として立体射影表示される。南極表示を取り
$x' = (x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対し

$$
\Psi(x') = \left(\frac{1-|x'|^2}{1+|x'|^2}, \frac{2x_2}{1+|x'|^2}, \cdots, \frac{2x_n}{1+|x'|^2} \right)
$$

と置くと $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1} : \mathbb{R}^{n-1})$ であり任意の $(y_1, \cdots, y_n) \in S^{n-1} \setminus \{(-1, 0, \cdots, 0)\}$ に対し

$$
\Psi\left(\frac{y_2}{1+y_1}, \cdots, \frac{y_n}{1+y_1} \right) = (y_1, \cdots, y_n)
$$

となるので Ψ は $\mathbb{R}^{n-1}$ から $S^{n-1}\setminus\{-1,0,\cdots,0)\}$ への同相写像である。

２．単位球面上の積分表示

前節のパラメタ表示に基づく単位球面上の積分を考えよう。以下 σ は単位球面上のルベーグ測度とする。

定理１　$n\geq 2$ とする。任意の $f\in L^1(S^{n-1};\mathbb{C})$ に対し次は同値である。

I. 極座標座示

$$\int_{S^{n-1}} f(\omega)d\sigma(\omega)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi} f(\Phi_n(1,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}))J_n(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})d\theta_1\cdots d\theta_{n-1} \tag{1}$$

ここに $J_2\equiv 1, n\geq 3$ に対し

$$J_n(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})=\prod_{j=1}^{n-2}(\sin\theta_j)^{n-1-j}$$

とする。

II. 回転体表示

$$\int_{S^{n-1}} f(\omega)d\sigma(\omega) \;=\; \int_{-1}^{1}(1-\rho^2)^{(n-3)/2}\Big(\int_{S^{n-2}} f(\rho,(1-\rho^2)^{1/2}\omega')d\sigma(\omega')\Big)d\rho,\quad n\geq 3$$

$$\int_{S^{1}} f(\omega)d\sigma(\omega) \;=\; \int_{-1}^{1}(1-\rho^2)^{-1/2}(f(\rho,(1-\rho^2)^{1/2})+f(\rho,-(1-\rho^2))d\rho,\ n=2 \tag{2}$$

III. グラフ表示

$$\int_{S^{n-1}} f(\omega)d\sigma(\omega)=\int_{B^{n-1}}(f((1-|x'|^2)^{1/2},x')+f(-(1-|x'|^2)^{1/2},x'))(1-|x'|^2)^{-1/2}dx' \tag{3}$$

IV. 立体射影表示

$$\int_{S^{n-1}} f(\omega)d\sigma(\omega)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f\left(\frac{1-|x'|^2}{1+|x'|^2},\frac{2x_2}{1+|x'|^2},\cdots,\frac{2x_n}{1+|x'|^2}\right)\left(\frac{2}{1+|x'|^2}\right)^{n-1}dx' \tag{4}$$

定理１の系　$g\in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}), n\geq 2,\ x\in\mathbb{R}^n$ に対し

$$\int_{S^{n-1}} g(x\cdot\omega)d\sigma(\omega)=\frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)}\int_{-1}^{1} g(|x|\rho)(1-\rho^2)^{(n-3)/2}d\rho \tag{5}$$

第５節で定理１の証明を与える。第３節及び第４節では夫々$n=2$ 及び $n=3$ の場合を考える。

３．１次元の場合

１次元単位球面とは単位円周の事であり

$$\begin{aligned}
S^1 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2=1\}\\
&= \{(\cos\theta,\sin\theta)\in\mathbb{R}^2; 0\le\theta<2\pi\}\\
&= \{(\rho,\pm(1-\rho^2)^{1/2})\in\mathbb{R}^2; -1\le\rho\le 1\}\\
&= \{(\pm(1-s^2)^{1/2},s)\in\mathbb{R}^2; -1\le s\le 1\}\\
&= \{(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2})\in\mathbb{R}^2; t\in\mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

と表される。$\rho=\cos\theta$ とすると $\sin\theta=\pm(1-\rho^2)^{1/2}$ であり $d\theta=-\frac{1}{\sin\theta}d\rho$ であるから

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta = \int_0^{\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_1^{-1} f(\rho,(1-\rho^2)^{1/2})(1-\rho^2)^{-1/2}d\rho\\
&\quad + \int_{-1}^{1} f(\rho,-(1-\rho^2)^{1/2})(1-\rho^2)^{-1/2}d\rho
\end{aligned}$$

$$= \int_{-1}^{1}(f(\rho,(1-\rho^2)^{1/2})+f(\rho,-(1-\rho^2)^{1/2}))\cdot(1-\rho^2)^{-1/2}d\rho$$

となり (1) と (2) の同値性が従う。$s=\sin\theta$ とすると $\cos\theta=\pm(1-s^2)^{1/2}$ であり $d\theta=\frac{1}{\cos\theta}ds$ であるから

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta\\
&= \int_{-1}^{1} f((1-s^2)^{1/2},s)(1-s^2)^{-1/2}ds - \int_1^{-1} f(-(1-s^2)^{1/2},s)(1-s^2)^{-1/2}ds\\
&= \int_{-1}^{1}(f((1-s^2)^{1/2},s)+f(-(1-s^2)^{1/2},s))(1-s^2)^{-1/2}ds
\end{aligned}$$

となり (1) と (3) の同値性が従う。$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ とすると $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$ であり $d\theta=\frac{2}{1+t^2}dt$ であるから

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

となり (1) と (4) の同値性を得る。これは三角函数（或いは円）の有理化として良く知られたものであり $t=\tan(\theta/2), -\pi<\theta<\pi$ なる変数変換によるものである。実軸 $\mathbb{R}$ を xy 平面の y 軸として考えその一点コンパクト化を、南極 $(-1,0)$ を無限遠点として付け加えたリーマン球面と見做したものが単位円周 S^1 であると云う事情を反映した等式であると考えられる。

４．２次元の場合

２次元単位球面を極座標表示すると

$$S^2 = \{(\cos\theta, \sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi) \in \mathbb{R}^3; 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi\}$$

となる。ここに天頂角は x 軸から、方位角は yz 平面から取っており通常の球座標とは異なっている事に注意する。さて $\rho = \cos\theta$ とすると

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta, \sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \int_1^{-1}(\int_0^{2\pi} f(\rho, (1-\rho^2)^{1/2}\cos\varphi, (1-\rho^2)^{1/2}\sin\varphi)d\varphi)(-d\rho)$$

$$= \int_{-1}^{1}(\int_{S^1} f(\rho, (1-\rho^2)^{1/2})\omega')d\sigma(\omega'))d\rho$$

となり (1) と (2) の同値性を得る。上の等式で $r = \sin\theta$ と置くと $d\theta = \frac{1}{\cos\theta}dr$ であるから

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta, \sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2}(\int_0^{2\pi} f((1-\sin^2\theta)^{1/2}, \sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi)d\varphi)\sin\theta d\theta$$

$$+ \int_{\pi/2}^{\pi}(\int_0^{2\pi} f(-(1-\sin^2\theta)^{1/2}, \sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi)d\varphi)\sin\theta d\theta$$

$$= \int_0^{1}(\int_0^{2\pi} f((1-r^2)^{1/2}, r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\varphi)r(1-r^2)^{-1/2}dr$$

$$+ \int_0^{1}(\int_0^{2\pi} f(-(1-r^2)^{1/2}, r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\varphi)r(1-r^2)^{-1/2}dr$$

$$= \int_0^{1}\int_0^{2\pi}(f((1-r^2)^{1/2}, r\cos\varphi, r\sin\varphi) + f(-(1-r^2)^{1/2}, r\cos\varphi, r\sin\varphi))\cdot(1-r^2)^{-1/2}rd\varphi dr$$

$$= \int_{B^2}(f((1-|x'|^2)^{1/2}, x') + f(-(1-|x'|^2)^{1/2}, x'))(1-|x'|^2)^{-1/2}dx'$$

となり (1) と (3) の同値性を得る。最後に

$$t = \frac{\sin\theta\cos\varphi}{1+\cos\theta}, \quad s = \frac{\sin\theta\sin\varphi}{1+\cos\theta}$$

と置くと

$$\cos\theta = \frac{1-t^2-s^2}{1+t^2+s^2}, \ \sin\theta = \frac{2(t^2+s^2)^{1/2}}{1+t^2+s^2}, \ \cos\varphi = \frac{t}{(t^2+s^2)^{1/2}}, \sin\varphi = \frac{s}{(t^2+s^2)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{4t}{(1+t^2+s^2)^2} = \frac{2t}{(t^2+s^2)^{1/2}(1+t^2+s^2)}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial s} = \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{4s}{(1+t^2+s^2)^2} = \frac{2s}{(t^2+s^2)^{1/2}(1+t^2+s^2)}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{1}{\sin\varphi}\cdot\frac{s^2}{(t^2+s^2)^{3/2}} = -\frac{s}{t^2+s^2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{1}{\sin\varphi}\cdot\frac{st}{(t^2+s^2)^{3/2}} = \frac{t}{t^2+s^2}$$

$$\frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(t,s)} = \frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial s} - \frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{2}{(t^2+s^2)^{1/2}(1+t^2+s^2)}$$

であるから

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{1-t^2-s^2}{1+t^2+s^2}, \frac{2t}{1+t^2+s^2}, \frac{2s}{1+t^2+s^2}\right)\frac{2(t^2+s^2)^{1/2}}{1+t^2+s^2}\left|\frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(t,s)}\right| \ dtds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{1-t^2-s^2}{1+t^2+s^2}, \frac{2t}{1+t^2+s^2}, \frac{2s}{1+t^2+s^2}\right)\frac{4}{(1+t^2+s^2)^2} \ dtds$$

となり (1) と (4) の同値性を得る。

５．定理１の証明

この節では $n \geq 3$ として考える。$n-1$ の場合の等式から n の場合の等式を導こう。

$$\Phi_n(1,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}) = (\cos\theta_1, \sin\theta_1\cdot\Phi_{n-1}(1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-1}))$$
$$J_n(\theta_1,\cdots,\theta_{n-2}) = (\sin\theta_1)^{n-2}J_{n-1}(\theta_2,\cdots,\theta_{n-2})$$

なる関係に注意し $\rho = \cos\theta_1$ とすると

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi} f(\Phi_n(1,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}))J_n(\theta_1,\cdots,\theta_{n-2})d\theta_1\cdots d\theta_{n-1}$$

$$= \int_0^{\pi}\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi} f(\cos\theta_1,\sin\theta_1\Phi_{n-1}(1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-1}))J_{n-1}(\theta_2,\cdots,\theta_{n-2})d\theta_2\cdots d\theta_{n-1}\right]\cdot(\sin\theta_1)^{n-2}d\theta_1$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi} f(\rho,(1-\rho^2)^{1/2}\Phi_{n-1}(1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-1}))J_{n-1}(\theta_2,\cdots,\theta_{n-2})d\theta_2\cdots d\theta_{n-1}\right]$$
$$\cdot(1-\rho^2)^{\frac{n-2}{2}}(1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}}d\rho$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[\int_{S^{n-2}} f(\rho,(1-\rho^2)^{1/2}\omega')d\sigma(\omega')\right](1-\rho^2)^{(n-3)/2}d\rho$$

となり (1) と (2) の同値性が従う。最後の積分で $\rho=\cos\theta_1$ としてから $\sin\theta_1=r$ とすると

$$\int_0^{\pi}\left[\int_{S^{n-2}} f(\cos\theta_1,\sin\theta_1\cdot\omega')d\sigma(\omega')\right](\sin\theta_1)^{n-2}d\theta_1$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left[\int_{S^{n-2}} f(1-\sin^2\theta_1)^{1/2},\sin\theta_1\cdot\omega')d\sigma(\omega')\right](\sin\theta_1)^{n-2}d\theta_1$$

$$+ \int_{\pi/2}^{\pi}\left[\int_{S^{n-2}} f(-(1-\sin^2\theta_1))^{1/2},\sin\theta_1\cdot\omega')d\sigma(\omega')\right](\sin\theta_1)^{n-2}d\theta_1$$

$$= \int_0^{1}\left[\int_{S^{n-2}} f((1-r^2)^{1/2},r\omega')d\sigma(\omega')\right]r^{n-2}(1-r^2)^{-1/2}dr$$

$$+ \int_0^{1}\left[\int_{S^{n-2}} f(-(1-r^2)^{1/2},r\omega')d\sigma(\omega')\right]r^{n-2}(1-r^2)^{-1/2}dr$$

$$= \int_{B^{n-1}}(f((1-|x'|^2)^{1/2},x')+f(-(1-|x'|^2)^{1/2},x'))(1-|x'|^2)^{-1/2}dx'$$

となり (2)(3) の同値性が従う。最後に (3) と (4) の同値性を直接示そう。記号を簡単にする為に $n-1$ を n として $f\in L^1(S^2:\mathbb{C})$ に対して等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{1-|x|^2}{1+|x|^2},\frac{2x_1}{1+|x|^2},\cdots,\frac{2x_n}{1+|x|^2}\right)\left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^n dx$$

$$= \int_{B^n}(f((1-|y|^2)^{1/2},y)+f(-(1-|y|^2)^{1/2},y))(1-|y|^2)^{-1/2}dy$$

を示せば良い。$x \in \mathbb{R}^n$ に対し $y = \frac{2x}{1+|x|^2}$ と置くと

$$1-|y|^2 = 1-\frac{4|x|^2}{(1+|x|^2)^2} = \frac{(1-|x|^2)^2}{(1+|x|^2)^2}$$

であるから $y \in \mathbb{R}^n$ となり

$$\frac{1-|x|^2}{1+|x|^2} = \begin{cases} (1-|y|^2)^{1/2}, & |x| \leq 1 \\ -(1-|y|^2)^{1/2}, & |x| > 1 \end{cases}$$

なる関係が従う。$x \in \mathbb{R}^n$ を縦ベクトルで ${}^t x$ を横ベクトルとし $x^t x$ を n 次正方行列 $(x_i x_j)_{1\leq i,j\leq n}$ と見做せば変数変換 $x \mapsto y$ に対するヤコビ行列は (I を n 次単位行列として)

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2}{1+|x|^2}I - \frac{4}{(1+|x|^2)^2}x^t x = \frac{2}{1+|x|^2}\left(I - \left(\left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^{1/2}x\right)^t\left(\left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^{1/2}x\right)\right)$$

と表される。一般に $\xi \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\det(I-\xi^t\xi) = 1-|\xi|^2$$

となる事は $T\xi = {}^t(|\xi|, 0, \cdots, 0)$ なる $T \in O(n)$ を取り、等式

$$I - \xi^t\xi = {}^tT(I-(T\xi)^t(T\xi))T$$

を用いれば従うので変数変換 $x \mapsto y$ のヤコビ行列式は

$$\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^n\left(1-\frac{2}{1+|x|^2}|x|^2\right) = \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^n\frac{1-|x|^2}{1+|x|^2}$$

と表される。故に

$$\left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right| = \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^{-n}\left|\frac{1+|x|^2}{1-|x|^2}\right| = \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^{-n}(1-|y|^2)^{-1/2}$$

となり

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{1-|x|^2}{1+|x|^2}, \frac{2x_1}{1+|x|^2}, \cdots, \frac{2x_n}{1+|x|^2}\right)\left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^n dx = \int_{|x|\leq 1} + \int_{|x|>1}$$

$$= \int_{B^n}(f((1-|y|^2)^{1/2}, y) + f(-(1-|y|^2)^{1/2}, y))(1-|y|^2)^{-1/2}dy$$

が従う。

６．定理１の系の証明と応用例

(5) の左辺は $x \in \mathbb{R}^n$ の長さ $|x|$ にのみ依存し $\mathbb{R}^n$ の回転に就いて不変である。実際、任意の $T \in O(n)$ に対し

$$\int_{S^{n-1}} g(Tx\cdot\omega)d\sigma(\omega) = \int_{S^{n-1}} g(x\cdot {}^tT\omega)d\sigma(\omega) = \int_{S^{n-1}} g(x\cdot\omega)d\sigma(\omega)$$

となるからである。

そこで任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対し $Tx = (|x|, 0, \cdots, 0)$ なる $T \in O(n)$ を取ると

$$\int_{S^{n-1}} g(x \cdot \omega) d\sigma(\omega) = \int_{S^{n-1}} g(Tx \cdot \omega) d\sigma(\omega) = \int_{S^{n-1}} g(|x|\omega_1) d\sigma(\omega)$$

$$= \int_{-1}^{1} (1-\rho^2)^{(n-3)/2} (\int_{S^{n-2}} g(|x|\rho) d\sigma(\omega')) d\rho$$

$$= \int_{-1}^{1} (1-\rho^2)^{(n-3)/2} g(|x|\rho) \sigma(S^{n-2}) d\rho$$

となり S^{n-2} の表面積は $\sigma(S^{n-2}) = 2\pi^{(n-1)/2}/\Gamma((n-1)/2)$ で与えられるので (5) が従う。

定理１の系の応用として次の等式

$$\int_{S^{n-1}} f(|x + t\omega|) d\sigma(\omega) = \frac{4\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(2|x|t)^{n-2}\ \Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{||x|-t|}^{|x|+t} \rho f(\rho) g(\rho; |x|, t) d\rho \tag{6}$$

を示そう。ここに $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ t > 0,\ n \geq 2,$

$$g(\rho; |x|, t) = (\rho^2 - (|x| - t)^2)^{\frac{n-3}{2}} ((|x| + t)^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}}$$

とする。さて、被積分函数を

$$f(|x + t\omega|) = f(\left| |x|^2 + t^2 + 2tx \cdot \omega \right|^{1/2})$$

と表したとき、右辺の ω 依存性は $x \cdot \omega$ の形で与えられるので (5) を適用すれば

$$\int_{S^{n-1}} f(|x + t\omega|) d\sigma(\omega) = \sigma(S^{n-2}) \int_{-1}^{1} f(\left| |x|^2 + t^2 + 2t|x|\theta)(1 - \theta^2)^{\frac{n-3}{2}} d\theta$$

が得られる。さて $\theta \in [-1, 1]$ に対し

$$\lambda(\theta) = \left| |x|^2 + t^2 + 2t|x|\theta \right|^{1/2}$$

と置くと

$$\begin{aligned}
\lambda(-1) &= \left| |x|^2 + t^2 - 2t|x| \right|^{1/2} = ||x| - t|\,, \\
\lambda(1) &= \left| |x|^2 + t^2 - 2t|x| \right| = |x| + t, \\
\lambda(\theta)\lambda'(\theta) &= \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}(\lambda(\theta))^2 = t|x| > 0
\end{aligned}$$

と計算されるから任意の $\theta \in (-1, 1]$ に対し $\lambda'(\theta) > 0$ となる。これより

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(\lambda(\theta))(1 - \theta - 2)^{\frac{n-3}{2}} d\theta &= \frac{1}{t|x|} \int_{-1}^{1} \lambda(\theta) f(\lambda(\theta))(1 - \theta^2)^{\frac{n-3}{2}} \lambda'(\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{t|x|} \int_{\lambda(-1)}^{\lambda(1)} \rho f(\rho)(1 - \theta^2)^{\frac{n-3}{2}} d\rho
\end{aligned}$$

を得る。ここに $\rho = \lambda(\theta)$ とした。さて

$$\rho^2 = \lambda(\theta)^2 = |x|^2 + t^2 + 2t|x|\theta \iff \theta = \frac{\rho^2 - |x|^2 - t^2}{2|x|t}$$

より

$$\begin{aligned} 1 - \theta^2 &= \frac{(2|x|t)^2 - (\rho^2 - |x|^2 - t^2)^2}{(2|x|t)^2} = \frac{(2|x|t + \rho^2 - |x|^2 - t^2)(2|x|t - \rho^2 + |x|^2 + t^2)}{(2|x|t)^2} \\ &= \frac{(\rho^2 - (|x| - t)^2)((|x| + t)^2 - \rho^2)}{(2|x|t)^2} \end{aligned}$$

となるので (6) を得る。

7．面積要素の変換則

この節では定理 1 を単位球面上の面積要素、即ち $n-1$ 次微分形式

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} x_j dx_1 \wedge \cdots \overset{j}{\check{\cdots}} \cdots \wedge dx_n$$

の変換則の視点から眺めてみよう。先ず極座標変換 Φ_n に対して $\mathbb{R}^n$ の体積要素 $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ は

$$\Phi_n^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = \ r^{n-1} dr \wedge (\Phi_n(1, \cdot)^* \sigma)$$

と変換され単位球面上の $n-1$ 形式 σ は $\Phi_n(1, \cdot) : (\theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) \mapsto \Phi_n(1, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1})$ によって

$$\Phi_n(1, \cdot)^* \sigma = J_n(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) d\theta_1 \wedge \cdots \wedge d\theta_{n-1}$$

と変換される事は良く知られている。次に

$$\Theta : (-1, 1) \times S^{n-2} \ni (\rho, \omega') \mapsto (\rho, (1 - \rho^2)^{1/2} \omega') \in S^{n-1}$$

に対しては

$$\begin{aligned} \Theta^* \sigma &= \rho(-(1-\rho^2)^{-1/2} \omega_2 \rho d\rho + (1-\rho^2)^{1/2} d\omega_2) \wedge \cdots \wedge (-(1-\rho^2)^{-1/2} \omega_n \rho d\rho + (1-\rho^2)^{1/2} d\omega_n) \\ &\quad + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j-1} (1-\rho^2)^{1/2} \omega_j d\rho \wedge (-(1-\rho^2)^{-1/2} \omega_2 \rho d\rho + (1-\rho^2)^{1/2} d\omega_2) \wedge \cdots \overset{j}{\check{\cdots}} \cdots \\ &\qquad\qquad \wedge (-(1-\rho^2)^{-1/2} \omega_n \rho d\rho + (1-\rho^2)^{1/2} d\omega_n) \\ &= \rho^2 (1-\rho^2)^{-1/2 + (n-2)/2} \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j-1} \omega_j d\rho \wedge d\omega_2 \wedge \overset{j}{\check{\cdots}} \wedge d\omega_n \\ &\quad + (1-\rho^2)^{(n-1)/2} \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j-1} \omega_j d\rho \wedge d\omega_2 \wedge \overset{j}{\check{\cdots}} \wedge d\omega_n \\ &= (1-\rho^2)^{(n-3)/2} d\rho \wedge (\sum_{j=2}^{n} (-1)^{j-1} \omega_j d\omega_2 \wedge \overset{j}{\check{\cdots}} \wedge d\omega_n) \end{aligned}$$

となり $(-1,1)$ 上の 1 形式 $(1-\rho^2)^{(n-3)/2}d\rho$ と S^{n-2} 上の $n-2$ 形式に分解される事が分かる。また

$$\Psi^{\pm}: B^{n-1} \ni x' \mapsto (\pm(1-|x'|^2)^{1/2}, x') \in S^{n-1}_{\pm}$$

に対しては $x_1 = \pm(1-|x'|^2)^{1/2},\ dx_1 = \mp(1-|x'|^2)^{-1/2}\sum_{j=2}^{n} x_j dx_j$ より

$$\begin{aligned}
(\Psi^{\pm})^*\sigma =& \pm(1-|x'|^2)^{1/2}dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n + \sum_{j=2}^{n}(-1)^{j-1}x_j\Big(\mp(1-|x'|^2)^{-1/2}\sum_{k=2}^{n}x_k dx_k\Big)\wedge dx_2\wedge \overset{j}{\check{\cdots}} \wedge dx_n\\
=& \pm(1-|x'|^2)^{1/2}dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n \mp (1-|x'|^2)^{-1/2}\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j-1}x_j^2 dx_j\wedge dx_2\wedge \overset{j}{\check{\cdots}} \wedge dx_n\\
=& \pm(1-|x'|^2)^{1/2}dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n \pm (1-|x'|^2)^{-1/2}\sum_{j=2}^{n}x_j^2 dx_2\wedge \overset{j}{\check{\cdots}} \wedge dx_n\\
=& \pm(1-|x'|^2)^{-1/2}dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n
\end{aligned}$$

を得る。最後に

$$\Psi : \mathbb{R}^{n-1} \ni x' \mapsto \left(\frac{1-|x'|^2}{1+|x'|^2}, \frac{2x_2}{1+|x'|^2}, \cdots, \frac{2x_n}{1+|x'|^2}\right) \in S^{n-1}$$

による σ の引き戻しを求める為に $\mathbb{R}^{n-1}\setminus S^{n-2} = B^+ \cup B^-, B^- = B^{n-1}, B^+ = \mathbb{R}^n \setminus (B^{n-1}\cup S^{n-2})$ 上に制限し合成写像

$$\begin{array}{ccccc}
 & \Psi'_{\pm} & & \Psi^{\pm} & \\
B^{\mp} & \longrightarrow & B^{n-1} & \to & S^{n-1}_{\pm}\\
\Cup & & \Cup & & \Cup\\
x' & \longmapsto & \frac{2x'}{1+|x'|^2} & \mapsto & \Psi(x')
\end{array}$$

による引き戻しを計算する。簡単の為に $y' = \Psi'_{\pm}(x') = \frac{2x'}{1+|x'|^2}$ と置くと前節の計算により $B^{\pm}$ 上で

$$\det\left(\frac{\partial y'}{\partial x'}\right) = \left(\frac{2}{1+|x'|^2}\right)^{n-1}\frac{1-|x'|^2}{1+|x'|^2} = \pm\left(\frac{2}{1+|x'|^2}\right)^{n-1}(1-|y'|^2)^{1/2}$$

となるから

$$dy_2\wedge\cdots\wedge dy_n = \det\left(\frac{\partial y'}{\partial x'}\right)dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n = \pm\left(\frac{2}{1+|x'|^2}\right)^{n-1}(1-|y'|^2)^{1/2}dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$$

を得る。一方、既に示した通り

$$(\Psi^{\pm})^*\sigma = \pm(1-|x'|^2)^{-1/2}dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$$

であるから $B^{\mp}$ 上で

$$\begin{aligned}
\Psi^*\sigma &= (\Psi^{\pm}\circ\Psi'_{\pm})^*\sigma = (\Psi'_{\pm})^*(\Psi^{\pm})^*\sigma\\
&= (\Psi'_{\pm})^*(\pm(1-|x'|^2)^{-1/2}dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n)\\
&= \pm(1-|\Psi'_{\pm}(x')|^2)^{-1/2}(\Psi'_{\pm})^*(dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n)\\
&= \pm(1-|y'|^2)^{-1/2}dy_2\wedge\cdots\wedge dy_n\\
&= \left(\frac{2}{1+|x'|^2}\right)^{n-1}dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n
\end{aligned}$$

を得る。連続性によりこの等式は $\mathbb{R}^{n-1}$ 上に拡張される。

8．n 次直交群上のハール測度との関係

この節では単位球面上の積分の座標に依らない方法として、n 次直交群 $O(n)$ 上のハール測度に拠る積分を考える。

定理２　$n \geq 2$ とし $O(n)$ 上の右不変な規格化されたハール測度を μ とする。このとき任意の $f \in L^1(S^{n-1};\mathbb{C})$ 及び任意の $e \in S^{n-1}$ に対し次の等式が成立つ：

$$\frac{1}{\sigma(S^{n-1})}\int_{S^{n-1}} f(\omega)d\sigma(\omega) = \int_{O(n)} f(Te)d\mu(T)$$

(証明)　任意に $e \in S^{n-1}$ 及び $f \in L^1(S^{n-1})$ を取り固定する。任意の $\omega \in S^{n-1}$ に対し $S_\omega \in O(n)$ が存在し $S_\omega e = \omega$ が成立つ。任意の $T \in O(n)$ に対し

$$\int_{S^{n-1}} f(T\omega)d\sigma(\omega) = \int_{S^{n-1}} f(\omega)d\sigma(\omega)$$

であり μ の右不変性より

$$\int_{O(n)} f(TS_\omega e)d\mu(T) = \int_{O(n)} f(Te)d\mu(T)$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma(S^{n-1})}\int_{S^{n-1}} f(\omega)d\sigma(\omega) = \frac{1}{\sigma(S^{n-1})}\mu(O(n))\int_{S^{n-1}} f(\omega)d\sigma(\omega) \\
&= \frac{1}{\sigma(S^{n-1})}\int_{O(n)}\left(\int_{S^{n-1}} f(\omega)d\sigma(\omega)\right)d\mu(T) \\
&= \frac{1}{\sigma(S^{n-1})}\int_{O(n)}\left(\int_{S^{n-1}} f(T\omega)d\sigma(\omega)\right)d\mu(T) \\
&= \frac{1}{\sigma(S^{n-1})}\int_{S^{n-1}}\left(\int_{O(n)} f(T\omega)d\mu(T)\right)d\sigma(\omega) \\
&= \frac{1}{\sigma(S^{n-1})}\int_{S^{n-1}}\left(\int_{O(n)} f(TS_\omega e)d\mu(T)\right)d\sigma(\omega) \\
&= \frac{1}{\sigma(S^{n-1})}\int_{S^{n-1}}\left(\int_{O(n)} f(Te)d\mu(T)\right)d\sigma(\omega) = \int_{O(n)} f(Te)d\mu(T)
\end{aligned}$$

となり定理が従う。

参考文献

J.J. Duistermaat and J.A.C. Kolk, Multidimensional Real Analysis I,II, Cambridge

L. Grafakos, Classical and Modern Fourier Analysis, Pearson

E.M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton

小澤徹, 体積要素の極座標表示, http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/pdf/laplacian.pdf

金子晃, 偏微分方程式入門, 東京大学出版会

杉浦光夫, 解析入門 I,II, 東京大学出版会