体積要素の極座標表示

平成 20 年 3 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ から原点を除いた集合 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 及び $\mathbb{R}^n$ の単位球面 $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$ に $\mathbb{R}^n$ の位相を誘導する。正の実数全体 $(0,\infty)$ に $\mathbb{R}$ の位相を誘導する。$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ から積空間 $(0,\infty) \times S^{n-1}$ への写像 Φ を $\Phi(x) = (|x|, x/|x|)$ で定義し $(0,\infty) \times S^{n-1}$ から $(0,\infty)$ への射影を p_1, S^{n-1} への射影を p_2 とする。$\mathbb{R}^n$ 上の函数 $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ は $||x| - |y|| \le |x - y|$ より連続であるから $p_1 \circ \Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \mapsto |x| \in (0,\infty)$ も連続となる。連続函数 $(0,\infty) \ni t \mapsto 1/t \in (0,\infty)$ との合成函数として $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \mapsto 1/|x| \in (0,\infty)$ も連続となり、スカラー倍 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (t,x) \mapsto tx \in \mathbb{R}^n$ の連続性と合せて写像

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \to & (0,\infty) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \to & \mathbb{R}^n \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ x & \mapsto & (1/|x|, x) & \mapsto & x/|x| \end{array}$$

の連続性が従うので $p_2 \circ \Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \mapsto x/|x| \in S^{n-1}$ も連続となる。
よって $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to (0,\infty) \times S^{n-1}$ は連続である。Φ の逆写像 Φ^{-1} は $\Phi^{-1}(r,\omega) = r\omega$ で与えられ

$$\begin{array}{ccccc} (0,\infty) \times S^{n-1} & \hookrightarrow & (0,\infty) \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ (r,\omega) & \mapsto & (r,\omega) & \mapsto & r\omega \end{array}$$

の連続性より $\Phi^{-1} : (0,\infty) \times S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ の連続性が従う。さて次の図式を考える：

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \arrow[rr, "\Phi"] & & (0,\infty) \times S^{n-1} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & & \\ & (0,\infty) & & S^{n-1} \arrow[r, hook, "\iota"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi_j"] \\ & & & & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

ここで ι は埋め込み、π_j は第 j 成分への射影

$$\pi_j : \mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_j \in \mathbb{R}$$

とし、しばしば π_j を x_j とを混同する。また $\pi_j \circ \iota \circ p_2 \circ \Phi$ とは

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \longmapsto x_j/|x| \in \mathbb{R}$$

に外ならない。

$\mathbb{R}^n$ に正の向き付けを与える体積要素 ω_0 を n-形式

$$\omega_0 = d\pi_1 \wedge \cdots \wedge d\pi_n$$

として定め、$(n-1)$-形式 σ_0 を

$$\sigma_0 = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \pi_j (d\pi_1 \wedge \cdots \overset{j}{\vee} \cdots \wedge d\pi_n)$$

と定める。ここで $\overset{j}{\vee}$ とは j 番目を除くと云う意味である。σ_0 の ι による引戻しとして S^{n-1} に $(n-1)$-形式 σ が $\sigma = \iota^* \sigma_0$ で定まる。一方 $(0,\infty)$ 上に 1-形式 dr を定める。

命題１　$(0,\infty) \times S^{n-1}$ 上に n-形式 $dr \wedge \sigma$ を考え Φ で引戻すと

$$\Phi^*(dr \wedge \sigma) = |x|^{1-n} \omega_0$$

となる。これより体積要素の極座標表示

$$\Phi^*(r^{n-1} dr \wedge \sigma) = \omega_0$$

が従う。

証明　微分形式の基礎的性質に従って計算を実行する。

$$\begin{aligned} d\sigma_0 &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} d\pi_j \wedge (d\pi_1 \wedge \cdots \overset{j}{\vee} \cdots \wedge d\pi_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} d\pi_1 \wedge \cdots \wedge d\pi_n = n\omega_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p_1 \circ \Phi)^* dr &= d((p_1 \circ \Phi)^* r) = d(|x|) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j |x| d\pi_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{|x|} d\pi_j = \sum_{j=1}^{n} (\pi_j \circ \iota \circ p_2 \circ \Phi) d\pi_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p_2 \circ \Phi)^* \sigma &= (p_2 \circ \Phi)^* \iota^* \sigma_0 = (\iota \circ p_2 \circ \Phi)^* \sigma_0 \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} (\iota \circ p_2 \circ \Phi)^* (\pi_j (d\pi_1 \wedge \cdots \overset{j}{\vee} \cdots \wedge d\pi_n)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} ((\iota \circ p_2 \circ \Phi)^* \pi_j)((\iota \circ p_2 \circ \Phi)^* d\pi_1) \wedge \cdots \overset{j}{\vee} \cdots \wedge ((\iota \circ p_2 \circ \Phi)^* d\pi_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} ((\pi_j \circ \iota \circ p_2 \circ \Phi) d(\pi_1 \circ \iota \circ p_2 \circ \Phi) \wedge \cdots \overset{j}{\vee} \cdots \wedge d(\pi_n \circ \iota \circ p_2 \circ \Phi) \end{aligned}$$

最後の右辺は各 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に於て

$$d\left(\frac{x_k}{|x|}\right) = \frac{1}{|x|}dx_k - \sum_{\ell=1}^{n} \frac{x_k x_\ell}{|x|^3} dx_\ell = \frac{1}{|x|}\left(d\pi_k - \sum_{\ell=1}^{n} \frac{x_k x_\ell}{|x|^2} d\pi_\ell\right)$$

となる事により

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{x_j}{|x|^n} \left(d\pi_1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_1 x_k}{|x|^2} d\pi_k\right) \wedge \overset{j}{\overset{\vee}{\cdots\cdots}} \wedge \left(d\pi_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_n x_k}{|x|^2} d\pi_n\right)$$

に等しい。そこでここに現れる各 j に対する $(n-1)$-形式を展開する：

$$\begin{aligned}
&\left(d\pi_1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_1 x_k}{|x|^2} d\pi_k\right) \wedge \overset{j}{\overset{\vee}{\cdots\cdots}} \wedge \left(d\pi_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_n x_k}{|x|^2} d\pi_n\right) \\
= \;& d\pi_1 \wedge \overset{j}{\overset{\vee}{\cdots\cdots}} \wedge d\pi_n \\
& + \sum_{\ell<j} d\pi_1 \wedge \cdots\cdots \wedge \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{x_\ell x_k}{|x|^2} d\pi_k\right) \wedge \overset{j}{\overset{\vee}{\cdots\cdots}} \wedge d\pi_n \\
& + \sum_{\ell>j} d\pi_1 \wedge \overset{j}{\overset{\vee}{\cdots\cdots}} \wedge \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{x_\ell x_k}{|x|^2} d\pi_k\right) \wedge \cdots \wedge d\pi_n \\
= \;& d\pi_1 \wedge \overset{j}{\overset{\vee}{\cdots\cdots}} \wedge d\pi_n \\
& + \sum_{\ell<j} d\pi_1 \wedge \cdots \wedge \left(-\frac{x_\ell^2}{|x|^2} d\pi_\ell - \frac{x_\ell x_j}{|x|^2} d\pi_j\right) \wedge \overset{j}{\overset{\vee}{\cdots\cdots}} \wedge d\pi_n \\
& + \sum_{\ell>j} d\pi_1 \wedge \overset{j}{\overset{\vee}{\cdots\cdots}} \wedge \left(-\frac{x_\ell^2 x_j}{|x|^2} d\pi_j - \frac{x_\ell^2}{|x|^2} d\pi_\ell\right) \wedge \cdots \wedge d\pi_n \\
= \;& \left(1 - \sum_{\ell \neq j} \frac{x_\ell^2}{|x|^2}\right) d\pi_1 \wedge \overset{j}{\overset{\vee}{\cdots\cdots}} \wedge d\pi_n \\
& - \sum_{\ell<j} (-1)^{j-1-\ell} \frac{x_\ell x_j}{|x|^2} d\pi_1 \wedge \overset{\ell}{\overset{\vee}{\cdots\cdots}} \wedge d\pi_n \\
& - \sum_{\ell>j} (-1)^{\ell-j-1} \frac{x_\ell x_j}{|x|^2} d\pi_1 \wedge \overset{\ell}{\overset{\vee}{\cdots\cdots}} \wedge d\pi_n \\
= \;& \frac{x_j^2}{|x|^2} d\pi_1 \wedge \overset{j}{\overset{\vee}{\cdots\cdots}} \wedge d\pi_n + \sum_{\ell \neq j} (-1)^{\ell-j} \frac{x_\ell x_j}{|x|^2} d\pi_1 \wedge \overset{\ell}{\overset{\vee}{\cdots\cdots}} \wedge d\pi_n \\
= \;& (-1)^{j-1} \frac{x_j}{|x|^2} \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell-1} x_\ell (d\pi_1 \wedge \overset{\ell}{\overset{\vee}{\cdots\cdots}} \wedge d\pi_n)
\end{aligned}$$

ここで最初の等式では $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_\ell x_k}{|x|^2} d\pi_k (1 \leq \ell \leq n)$ に関する二次以上の項が消える事を用

いた。実際 $p \neq q$ に対し

$$
\begin{aligned}
& \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_p x_k}{|x|^2} d\pi_k\right) \wedge \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{x_q x_\ell}{|x|^2} d\pi_\ell\right) \\
= \;& \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{x_p x_k x_q x_\ell}{|x|^4} d\pi_k \wedge d\pi_\ell \\
= \;& \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_p x_\ell x_q x_k}{|x|^4} d\pi_\ell \wedge d\pi_k \\
= \;& -\sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_p x_\ell x_q x_k}{|x|^4} d\pi_k \wedge d\pi_\ell \\
= \;& -\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_p x_k}{|x|^2} d\pi_k\right) \wedge \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{x_q x_\ell}{|x|^2} d\pi_\ell\right)
\end{aligned}
$$

となるからである。
以上より

$$
\begin{aligned}
(p_2 \circ \Phi)^* \sigma &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{x_j}{|x|^n} \left((-1)^{j-1} \frac{x_j}{|x|^2} \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell-1} x_\ell (d\pi_1 \wedge \cdots \overset{\ell}{\vee} \cdots \wedge d\pi_n)\right) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell-1} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{|x|^{n+2}}\right) x_\ell (d\pi_1 \wedge \cdots \overset{\ell}{\vee} \cdots \wedge d\pi_n) \\
&= \frac{1}{|x|^n} \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell-1} x_\ell (d\pi_1 \wedge \cdots \overset{\ell}{\vee} \cdots \wedge d\pi_n) \\
&= |x|^{-n} \sigma_0
\end{aligned}
$$

を得る。よって

$$
\begin{aligned}
& \Phi^*(dr \wedge \sigma) \\
&= (p_1 \circ \Phi)^* dr \wedge (p_2 \circ \Phi)^* \sigma \\
&= |x|^{-n} \sum_{j=1}^{n} (\pi_j \circ \iota \circ p_2 \circ \Phi) d\pi_j \wedge \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \pi_k (d\pi_1 \wedge \cdots \overset{k}{\vee} \cdots \wedge d\pi_n) \\
&= |x|^{-n} \sum_{j=1}^{n} (\pi_j \circ \iota \circ p_2 \circ \Phi) d\pi_j \wedge ((-1)^{j-1} \pi_j (d\pi_1 \wedge \cdots \overset{j}{\vee} \cdots \wedge d\pi_n)) \\
&= |x|^{-n} \left(\sum_{j=1}^{n} (\pi_j \circ \iota \circ p_2 \circ \Phi) \pi_j\right) d\pi_1 \wedge \cdots \cdots \wedge d\pi_n \\
&= |x|^{1-n} \omega_0
\end{aligned}
$$

となり $\Phi^*(r^{n-1} dr \wedge \sigma) = \omega_0$ が従う。

σ の極座標表示を具体的に与える為に $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に極座標を導入しよう。$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ を $x = r\omega,\ r = |x|,\ \omega = x/|x|$ と分解し $\omega \in \mathbb{R}^n$ と見做し座標表示 $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ を考える。$\displaystyle\sum_{j=1}^n \omega_j^2 = 1$ であるから $\omega_1 = \cos\theta_1$ なる θ_1 が区間 $[0, \pi]$ で唯一つ定まる。このとき $\displaystyle\sum_{j=2}^n \omega_j^2 = 1 - \omega_1^2 = 1 - (\cos\theta_1)^2 = (\sin\theta_1)^2$ であるから $\theta_1 \in (0, \pi)$ ならば $\displaystyle\sum_{j=2}^n (\omega_j / \sin\theta_1)^2 = 1$ となり $\omega_2 / \sin\theta_1 = \cos\theta_2$ なる θ_2 が区間 $[0, \pi]$ で唯一つ定まる。よって $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$ が定まり $\omega_2 = \cos\theta_2 \sin\theta_1$ となる。このとき

$$\begin{aligned}\sum_{j=3}^n \omega_j^2 = \sum_{j=2}^n \omega_j^2 - \omega_2^2 &= (\sin\theta_1)^2 (1 - (\cos\theta_2)^2) \\ &= (\sin\theta_1 \sin\theta_2)^2\end{aligned}$$

となる。

以下同様に $\theta_1, \cdots, \theta_{n-2} \in [0, \pi]$ が定まり、$2 \le j \le n-2$ に対し $\omega_j = \cos\theta_j \displaystyle\prod_{k=1}^{j-1} \sin\theta_k$ となる。ここで θ_j は $\theta_1, \cdots, \theta_{j-1} \in (0, \pi)$ であれば一意的に定まる。また、$\displaystyle\sum_{k=j+1}^n \omega_k^2 = \left(\prod_{k=1}^j \sin\theta_k\right)^2$ が成立つ。さて $j = n-2$ の場合を考え $\theta_1, \cdots, \theta_{n-2} \in (0, \pi)$ とすると最後の等式より $\displaystyle\left(\omega_{n-1} / \prod_{k=1}^{n-2} \sin\theta_k\right)^2 + \left(\omega_n / \prod_{k=1}^{n-2} \sin\theta_k\right)^2 = 1$ となるので $\theta_{n-1} \in [0, 2\pi)$ が唯一つ定まり $\omega_{n-1} / \displaystyle\prod_{k=1}^{n-2} \sin\theta_k = \cos\theta_{n-1}$, $\omega_n / \displaystyle\prod_{k=1}^{n-2} \sin\theta_k = \sin\theta_{n-1}$ となる。

以上より $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対し $r > 0,\ \theta_1, \cdots, \theta_{n-2} \in [0, \pi], \theta_{n-1} \in [0, 2\pi)$ が定まり

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \cdots, x_n) = (r\omega_1, \cdots, r\omega_j, \cdots, r\omega_{n-1}, r\omega_n) \\ &= \left(r\cos\theta_1, \cdots, r\cos\theta_j \prod_{k=1}^{j-1} \sin\theta_k, \cdots, r\cos\theta_{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} \sin\theta_k, r\prod_{k=1}^{n-1} \sin\theta_k\right)\end{aligned}$$

と表される。そこで $G : \mathbb{R}^{n-1} \to S^{n-1},\ F : (0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ を

$$\begin{aligned}&G(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) = \left(\cos\theta_1, \cdots, \cos\theta_j \prod_{k=1}^{j-1} \sin\theta_k, \cdots, \cos\theta_{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} \sin\theta_k, \prod_{k=1}^{n-1} \sin\theta_k\right), \\ &F(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) = rG(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1})\end{aligned}$$

で定める。このとき次が成立つ。

命題２

$$\begin{aligned}
G^*\sigma &= \left(\prod_{k=1}^{n-2}(\sin\theta_k)^{n-k-1}\right) d\theta_1\wedge\cdots\wedge d\theta_{n-1}, \\
F^*\omega_0 &= r^{n-1}dr\wedge G^*\sigma \\
&= r^{n-1}\left(\prod_{k=1}^{n-2}(\sin\theta_k)^{n-k-1}\right) dr\wedge d\theta_1\wedge\cdots\wedge d\theta_{n-1}.
\end{aligned}$$

証明　これも基礎的性質に従った計算である。標準的なものは省略する。

$$\begin{aligned}
G^*\sigma &= G^*\iota^*\sigma_0 = (\iota\circ G)^*\sigma_0 \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}(\pi_j\circ\iota\circ G)(\iota\circ G)^*(d\pi_1\wedge\cdots\overset{\overset{j}{\vee}}{\cdots}\cdots\wedge d\pi_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}G_j\det\left(\frac{\partial(G_1,\cdots\overset{\overset{j}{\vee}}{\cdots}\cdots,G_n)}{\partial(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})}\right) d\theta_1\wedge\cdots\wedge d\theta_{n-1} \\
&= \det\begin{bmatrix} G_1 & \partial_1 G_1 & \cdots & \partial_{n-1}G_1 \\ G_2 & \partial_1 G_2 & \cdots & \partial_{n-1}G_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_n & \partial_1 G_n & \cdots & \partial_{n-1}G_n \end{bmatrix} d\theta_1\wedge\cdots\wedge d\theta_{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^*\omega_0 &= F^*\Phi^*(r^{n-1}dr\wedge\sigma) \\
&= (\Phi\circ F)^*(r^{n-1}dr\wedge\sigma) \\
&= r^{n-1}\left(\prod_{k=1}^{n-2}(\sin\theta_k)^{n-k-1}\right) dr\wedge d\theta_1\wedge\cdots\wedge d\theta_{n-1}
\end{aligned}$$

参考文献： H. フランダース，微分形式の理論，岩波書店