

等長変換と等角アフィン変換

令和8年8月

小澤 徹

<http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html>

実内積空間に於ける等長変換と等角アフィン変換（共形アフィン変換）に就いて纏めて置こう。

1 等長変換

X を内積 $(\cdot|\cdot)$ を持つ実ベクトル空間とする。 X に於ける有界線型変換の全体を $B(X)$ とし直交変換の全体を $O(X)$ とする。即ち

$$B(X) = \{A : X \rightarrow X; \exists M \geq 0 : \forall x \in X, \|Ax\| \leq M\|x\|\}$$
$$O(X) = \{A \in B(X); {}^tAA = A{}^tA = I\}$$

ここに $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot|\cdot)}$ は内積から定まるノルム、 tA は A の転置変換、 I は恒等変換とする。以下 X 全体で定義された写像 $\varphi : X \rightarrow X$ を考え、 $\varphi(0) \in X$ だけ平行移動した写像を φ_0 と表す：

$$\varphi_0 := \varphi - \varphi(0) : X \ni x \mapsto \varphi_0(x) := \varphi(x) - \varphi(0) \in X$$

このとき次が成立する：

定理 1. 全射 $\varphi : X \rightarrow X$ に対し次は同値である。

- (1) φ は等長 (isometry) : $\forall x, y \in X, \|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y\|$
- (2) φ_0 は等長 : $\forall x, y \in X, \|\varphi_0(x) - \varphi_0(y)\| = \|x - y\|$
- (3) φ_0 は内積を保つ : $\forall x, y \in X, (\varphi_0(x)|\varphi_0(y)) = (x|y)$
- (4) $\varphi_0 \in O(X)$ 即ち

$$\exists A \in O(X) : \forall x \in X, \varphi(x) = Ax + \varphi(0)$$

(証明) (1) $\Rightarrow$ (2) : 任意の $x, y \in X$ に対し

$$\begin{aligned}\|\varphi_0(x) - \varphi_0(y)\| &= \|(\varphi(x) - \varphi(0)) - (\varphi(y) - \varphi(0))\| \\ &= \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \stackrel{(1)}{=} \|x - y\|\end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (3) : 任意の $x, y \in X$ に対し

$$\begin{aligned}(\varphi_0(x)|\varphi_0(y)) &= \frac{1}{2} (\|\varphi_0(x)\|^2 + \|\varphi_0(y)\|^2 - \|\varphi_0(x) - \varphi_0(y)\|^2) \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) = (x|y)\end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (2) : (3) の条件で $x = y$ としたものが (2) である。

(2) $(\Leftrightarrow (3)) \Rightarrow$ (4) : 先ず φ_0 の線型性を示す。任意の $a \in \mathbb{R}$ 及び任意の $x, y \in X$ に対し

$$\begin{aligned} & \|\varphi_0(ax) - a\varphi_0(x)\|^2 \\ &= \|\varphi_0(ax)\|^2 - 2(\varphi_0(ax)|a\varphi_0(x)) - \|a\varphi_0(x)\|^2 \\ &= \|\varphi_0(ax)\|^2 - 2a(\varphi_0(ax)|\varphi_0(x)) + a^2\|\varphi_0(x)\|^2 \\ &\stackrel{(2)(3)}{=} \|ax\|^2 - 2a(ax|x) + a^2\|x\|^2 \\ &= a^2\|x\|^2 - 2a^2\|x\|^2 + a^2\|x\|^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|\varphi_0(x+y) - (\varphi_0(x) + \varphi_0(y))\|^2 \\ &= \|\varphi_0(x+y)\|^2 + \|\varphi_0(x)\|^2 + \|\varphi_0(y)\|^2 \\ &\quad - 2(\varphi_0(x+y)|\varphi_0(x)) - 2(\varphi_0(x+y)|\varphi_0(y)) - 2(\varphi_0(x)|\varphi_0(y)) \\ &\stackrel{(2)(3)}{=} \|x+y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x+y|x) - 2(x+y|y) - 2(x|y) \\ &= \|(x+y) - x - y\|^2 = 0 \end{aligned}$$

となるので $\varphi_0(ax) = a\varphi_0(x)$, $\varphi_0(x+y) = \varphi_0(x) + \varphi_0(y)$ が従い φ_0 は線型となる。 $\varphi_0(x) = Ax$ と表すと φ_0 の等長性より有界性が従うので $A \in B(X)$ を得る。 φ_0 の等長性より A は単射となるので φ_0 の全射性の仮定より A の逆 A^{-1} が存在する。 (3) より任意の $x, y \in X$ に対し

$$({}^tAAx|y) = (Ax|Ay) = (x|y)$$

となるから ${}^tAA = I$ が従う。 A^{-1} が存在するので ${}^tA = A^{-1}$ となり $A {}^tA = AA^{-1} = I$ が従う。これより $A \in O(X)$ が従う。

(4) $\Rightarrow$ (1) :

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(y) &= (Ax + \varphi(0)) - (Ay + \varphi(0)) \\ &= Ax - Ay \\ &= A(x - y) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \|\varphi(x) - \varphi(y)\|^2 &= \|A(x - y)\|^2 = ({}^tAA(x - y)|x - y) = (x - y|x - y) \\ &= \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

註 1. 等長線型変換 φ_0 は単射であるので X が有限次元の場合には φ_0 は全射となる。よって初めの φ の全射性の仮定は不要である。

註 2. X が無限次元の場合には φ の全射性の仮定は必要である。実際

$$X = \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}; \mathbb{R}), \quad \varphi((a_n; n \geq 0)) := \begin{cases} 0, & n = 0 \\ a_{n-1}, & n \geq 1 \end{cases}$$

とした場合 $\varphi = \varphi_0$ は内積を保つ：

$$\begin{aligned} (\varphi_0((a_n; n \geq 0)) | \varphi_0((b_n; n \geq 0))) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} b_{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \\ &= ((a_n; n \geq 0) | (b_n; n \geq 0)) \end{aligned}$$

一方 $\varphi_0(X) \subsetneq X$ 故全射でない。

2 等角アフィン変換

定理 2. $\varphi_0 \in B(X)$ なる全射 $\varphi : X \rightarrow X$ に対し次は同値である。

(1) φ_0 は等角 (共形 conformal) : $\forall x, y \in X \setminus \text{Ker}\varphi_0$,

$$\frac{(\varphi_0(x) | \varphi_0(y))}{\|\varphi_0(x)\| \|\varphi_0(y)\|} = \frac{(x | y)}{\|x\| \|y\|}$$

(2) $\exists 1(A, a) \in O(X) \times [0, +\infty) : \forall x \in X, \varphi_0(x) = aAx$

(証明) (1) $\Rightarrow$ (2) : 先ず $a \geq 0$ が存在し任意の $x \in X$ に対し等式 $\|\varphi_0(x)\| = a\|x\|$ が成立する事を示そう。任意に $t \geq 0$ を与え $\|x\| = \|y\| = t$ となる二つの $x, y \in X$ を任意に取り $z_{\pm} := x \pm y$ と置く。このとき

$$(z_+ | z_-) = (z + y | x - y) = \|x\|^2 - (x | y) + (y | x) - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$$

となるので (1) より

$$(\varphi_0(z_+) | \varphi_0(z_-)) = 0$$

が従う。 φ_0 は線型故

$$\begin{aligned} \|\varphi_0(x)\|^2 - \|\varphi_0(y)\|^2 &= (\varphi_0(x) + \varphi_0(y) | \varphi_0(x) - \varphi_0(y)) \\ &= (\varphi_0(x + y) | \varphi_0(x - y)) = (\varphi_0(z_+) | \varphi_0(z_-)) = 0 \end{aligned}$$

となり $\|\varphi_0(x)\|^2 = \|\varphi_0(y)\|^2$ が従う。この共通の値は t によって唯一つ定まるので $f(t) \in [0, +\infty)$ と表す事にすると $f : [0, +\infty) \ni t \mapsto f(t) \in [0, +\infty)$ が定まる。 φ_0 は線型故 $f(0) = 0$ で任意の $\lambda, t > 0$ に対し

$$f(\lambda t) = \lambda f(t)$$

が成立する。特に任意の $t \geq 0$ に対し

$$f(t) = tf(1)$$

なる等式を得る。そこで $a := f(1)$ とすると任意の $t > 0$ 及び $\|x\| = t$ なる任意の $x \in X$ に対し

$$a = f(1) = \frac{f(t)}{t} = \frac{\|\varphi_0(x)\|}{\|x\|}$$

が従う。これが示すべき事であった。さて二つの場合に分けよう：

- (i) $a = 0$ (ii) $a > 0$

(i) $a = 0$ の場合 $\varphi_0 = 0$ となるから (2) が従う。

(ii) $a > 0$ の場合、仮定 (1) より任意の $x, y \in X$ に対し

$$\left(\frac{1}{a} \varphi_0(x) \middle| \frac{1}{a} \varphi_0(y) \right) = (x|y)$$

が成立する。そこで $A := \frac{1}{a} \varphi_0$ とすると定理 1 より $A \in O(X)$ であり $\varphi_0 = aA$ が従う。

(2) $\Rightarrow$ (1) : 任意の $x, y \in X \setminus \text{Ker} \varphi_0 = X \setminus \text{Ker} A$ に対し

$$\frac{(\varphi_0(x)|\varphi_0(y))}{\|\varphi_0(x)\|\|\varphi_0(y)\|} = \frac{(aAx|aAy)}{\|aAx\|\|aAy\|} = \frac{(Ax|Ay)}{\|Ax\|\|Ay\|} = \frac{(x|y)}{\|x\|\|y\|}$$

参考文献：

岩堀長慶，合同変換群の話，現代数学社

平井武，線形代数と群の表現 I，II，朝倉書店