共形変換

平成 28 年 3 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

実ヒルベルト空間に於ける共形変換に就いて纏めて置こう。

1．共形変換の定義と例

H を内積 $(\cdot|\cdot)$ を備えた実ヒルベルト空間とし $B(H)$ を H の有界線型変換全体の成すバナハ空間とする。

定理 1　U を H の（空でない）開集合とし $f \in C^1(U;H)$ とする。任意の $x \in U$ に於ける微分係数 $f'(x) \in B(H)$ は有界な逆を持つと仮定する。このとき次は同値である。

(1)　任意の $x \in U$ 及び任意の $u, v \in H \backslash \{0\}$ に対し

$$\frac{(f'(x)u|f'(x)v)}{\|f'(x)u\|\|f'(x)v\|} = \frac{(u|v)}{\|u\|\|v\|}$$

(2)　$\sigma \in C(U;\mathbb{R})$ が存在し任意の $x \in U$ 及び $u, v \in H$ に対し

$$(f'(x)u|f'(x)v) = e^{2\sigma(x)}(u|v)$$

(証明)　(1) $\Rightarrow$(2)：　$u = 0$ または $v = 0$ の時は (2) の両辺は 0 に等しい。任意に $u, v \in H \backslash \{0\}$ を取る。f に対する仮定より $U \ni x \mapsto \|f'(x)u\| \in \mathbb{R}$ 及び $U \ni x \mapsto \|f'(x)v\| \in \mathbb{R}$ は非負で零を取らない連続函数となる。そこで

$$\sigma(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\|f'(x)u\|\|f'(x)v\|}{\|u\|\|v\|}\right), \quad x \in U$$

と置くと $\sigma \in C(U;\mathbb{R})$ が定まり (1) より

$$(f'(x)u|f'(x)v) = \left(\frac{\|f'(x)u\|\|f'(x)v\|}{\|u\|\|v\|}\right)(u|v) = e^{2\sigma(x)}(u|v)$$

が従う。
(2) $\Rightarrow$(1)：　任意に $u, v \in H \backslash \{0\}$ を取る。(2) より

$$\|f'(x)u\|^2 = e^{2\sigma(x)}\|u\|^2, \ \|f'(x)v\|^2 = e^{2\sigma(x)}\|v\|^2$$

を得るので

$$\|f'(x)u\|\|f'(x)v\| = e^{2\sigma(x)}\|u\|\|v\|$$

が従う。この両辺は零を取らないので等式

$$e^{2\sigma(x)} = \frac{\|f'(x)u\|\|f'(x)v\|}{\|u\|\|v\|}$$

を (2) に適用すれば (1) が従う。

註　逆写像定理に拠り $f : U \to f(U)$ は C^1 同相であり等式

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1}$$

が任意の $x \in U$ に対して成立つ。

定義　実ヒルベルト空間 H の（空でない）開集合 U 上の C^1-写像 $f : U \to H$ は、任意の $x \in U$ に於ける微分係数 $f'(x) \in B(H)$ が有界な逆を持ち定理 1 の同値な性質 (1)(2) を満たすとき**共形写像** conformal map 又は **共形変換** conformal transformation と謂い、付随する函数 $e^\sigma \in C(U; \mathbb{R})$ を**共形因子** conformal factor 又は **特性函数** characteristic function と謂う。

例 1（並進）　一点 $p \in H$ に対し p に依る並進 τ_p を $\tau_p(x) = x + p,\ x \in H$ と置くと $\tau_p \in C^1(H; H)$ であり任意の $u, v \in H$ に対し等式　$\tau_p^{-1}(y) = y - p$,

$$\begin{aligned}&{\tau_p}'(x)u = u,\ ({\tau_p}'(x))^{-1}u = u,\\ &({\tau_p}'(x)u|{\tau_p}'(x)v) = (u|v)\end{aligned}$$

が成立つので $e^{\sigma(x)} \equiv 1$ として τ_p は共形因子 1 を持つ共形変換である事が分かる。

例 2（伸長）　$t \in \mathbb{R}$ に対し $\delta_t(x) = e^t x,\ x \in H$ と置くと $\delta_t \in C^1(H; H)$ であり任意の $u, v \in H$ に対し等式　$\delta_t^{-1}(y) = e^{-t}y$,

$$\begin{aligned}&{\delta_t}'(x)u = e^t u,\ ({\delta_t}'(x))^{-1}u = e^{-t}u,\\ &({\delta_t}'(x)u|{\delta_t}'(x)v) = e^{2t}(u|v)\end{aligned}$$

が成立つので $e^{\sigma(x)} \equiv e^t$ として δ_t は共形因子 e^t を持つ共形変換である事が分かる。

例 3（回転）　直交変換（全射等距離変換）$T \in O(H)$ に対し $\rho_T(x) = Tx, x \in H$ と置くと $\rho_T \in C^1(H; H)$ であり任意の $u, v \in H$ に対し等式　$(\rho_T)^{-1}(y) = T^{-1}y$,

$$\begin{aligned}&{\rho_T}'(x)u = Tu,\ (\rho'_T(x))^{-1}u = T^{-1}u\\ &(\rho'_T(x)u|\rho'_T(x)v) = (Tu|Tv) = (u|v)\end{aligned}$$

が成立つので $e^{\sigma(x)} \equiv 1$ として ρ_T は共形因子 1 を持つ共形変換である事が分かる。

例 4（反転）　$U = H \setminus \{0\}$ とし $\boldsymbol{\iota}(x) = \dfrac{x}{\|x\|^2}, x \in U$ と置くと $\boldsymbol{\iota} \in C^1(U; H)$ であり任意の $u, v \in H$ に対し等式　$\boldsymbol{\iota}^{-1}(y) = \dfrac{y}{\|y\|^2},\ y \in U$,

$$\boldsymbol{\iota}'(x)u = \frac{u}{\|x\|^2} - 2\frac{(x|u)}{\|x\|^4}x,\ (\boldsymbol{\iota}'(x))^{-1}u = \|x\|^2u - 2(x|u)x,$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\iota}'(x)u|\boldsymbol{\iota}'(x)v) &= \left(\frac{u}{\|x\|^2} - 2\frac{(x|u)}{\|x\|^4}x \,\middle|\, \frac{v}{\|x\|^2} - 2\frac{(x|v)}{\|x\|^4}x\right)\\ &= \frac{(u|v)}{\|x\|^4} - 4\frac{(x|u)(x|v)}{\|x\|^6} + 4\frac{(x|u)(x|v)}{\|x\|^8}(x|x) = \frac{(u|v)}{\|x\|^4}\end{aligned}$$

が成立つ。実際

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\iota}'(x)(\|x\|^2u-2(x|u)x) &= \frac{1}{\|x\|^2}(\|x\|^2u-2(x|u)x)-\frac{2}{\|x\|^4}(x|\|x\|^2u-2(x|u)x)x \\
&= u-\frac{2}{\|x\|^2}(x|u)x-\frac{2}{\|x\|^4}(\|x\|^2(x|u)-2(x|u)\|x\|^2)x \\
&= u, \\
\|x\|^2\boldsymbol{\iota}'(x)u-2(x|\boldsymbol{\iota}'(x)u)x &= \|x\|^2\left(\frac{u}{\|x\|^2}-2\frac{(x|u)}{\|x\|^4}x\right)-2\left(x\middle|\frac{u}{\|x\|^2}-2\frac{(x|u)}{\|x\|^4}x\right)x \\
&= u-\frac{2}{\|x\|^2}(x|u)x-2\left(\frac{(x|u)}{\|x\|^2}-2\frac{(x|u)}{\|x\|^2}\right)x \\
&= u
\end{aligned}$$

となるから $(\boldsymbol{\iota}'(x))^{-1}u$ の表示が導かれる。以上より $e^{\sigma(x)}=\dfrac{1}{\|x\|^2}$ として $\boldsymbol{\iota}$ は共形因子 $U\ni x\mapsto\dfrac{1}{\|x\|^2}\in\mathbb{R}$ を持つ共形変換である事が分かる。

$\|\nu\|=1$ なる $\nu\in H$ を法線ベクトルとし一点 $q\in H$ を通る平面 $H_\nu(q)$ を

$$H_\nu(q)=\{x\in H;(x-q|\nu)=0\}$$

で定義する。また、一点 $q\in H$ を中心とする半径 $r>0$ の球面 $S_r(q)$ を

$$S_r(q)=\{x\in H;\|x-q\|=r\}$$

で定義する。

定理２（共形変換に因る平面の像の特徴付け）

(1) $\tau_p(H_\nu(q))=H_\nu(\tau_p(q))=H_\nu(p+q)$

(2) $\delta_t(H_\nu(q))=H_v(\delta_t(q))=H_\nu(e^tq)$

(3) $\rho_T(H_\nu(q))=H_{\rho_T(\nu)}(\rho_T(q))=H_{T\nu}(Tq)$

(4) $$\boldsymbol{\iota}(H_\nu(q)\backslash\{0\})=\begin{cases} S_r(r\nu)\backslash\{0\},\ (q|\nu)\neq 0 \text{ の場合} \\ \\ H_\nu(0)\backslash\{0\},\ (q|\nu)=0 \text{ の場合}\end{cases}$$

ここに $r=\dfrac{1}{2(q|\nu)}$ とする。

(証明) (1) 任意に $x\in H_\nu(q)$ を取る。この時 $((x+p)-(p+q)|\nu)=(x-q|\nu)=0$ となるから $x+p\in H_\nu(p+q)$ 即ち $\tau_p(x)\in H_\nu(p+q)$ を得る。一方、任意に $y\in H_\nu(p+q)$ を取る。この時

$((y-p)-q|\nu) = (y-(p+q)|\nu) = 0$ となるから $y-p \in H_\nu(q)$ 即ち $y = \tau_p(y-p) \in \tau_p(H_\nu(q))$ を得る。

(2) 任意に $x \in H_\nu(q)$ を取る。この時 $(e^t x - e^t q|\nu) = e^t(x-q|\nu) = 0$ となるから $e^t x \in H_\nu(e^t q)$ 即ち $\delta_t(x) \in H_\nu(e^t q)$ を得る。一方、任意に $y \in H_\nu(e^t q)$ を取る。この時 $(e^{-t}y - q|\nu) = e^{-t}(y - e^t q|\nu) = 0$ となるから $e^{-t}y \in H_\nu(q)$ 即ち $y = \delta_t(e^{-t}y) \in \delta_t(H_\nu(q))$ を得る。

(3) 任意に $x \in H_\nu(q)$ を取る。この時 $(Tx - Tq|T\nu) = (x-q|\nu) = 0$ となるから $Tx \in H_{T\nu}(Tq)$ 即ち $\rho_T(x) \in H_{T\nu}(Tq)$ を得る。一方、任意に $y \in H_{T\nu}(Tq)$ を取る。この時 $(T^{-1}y - q|\nu) = (y - Tq|T\nu) = 0$ となるから $T^{-1}y \in H_\nu(q)$ 即ち $y = \rho_T(T^{-1}y) \in \rho_T(H_\nu(q))$ を得る。

(4) 任意に $x \in H_\nu(q)\backslash\{0\}$ を取る。$y = \boldsymbol{\iota}(x) = \dfrac{x}{\|x\|^2}$ と置くと $\|y\| = \dfrac{1}{\|x\|}$ より $y \neq 0$ 及び $x = \|x\|^2 y = \dfrac{y}{\|y\|^2}$ を得る。更に $(y|\nu) - (q|\nu)\|y\|^2 = \|y\|^2 \left(\dfrac{y}{\|y\|^2} - q \middle| \nu\right) = \|y\|^2(x-q|\nu) = 0$ が従う。

$(q|\nu) \neq 0$ の場合: $\|y\|^2 - \dfrac{1}{(q|\nu)}(y|\nu) = 0$ は $\left\|y - \dfrac{1}{2(q|\nu)}\nu\right\|^2 = \left(\dfrac{1}{2(q|\nu)}\right)^2$ と書き換えられるので $y \in S_r(r\nu)$ を得る。一方、任意に $y \in S_r(r\nu)\backslash\{0\}$ を取る。この時

$$\left(\frac{y}{\|y\|^2} - q \middle| \nu\right) = \frac{1}{\|y\|^2}(y - \|y\|^2 q|\nu) = \frac{(q|\nu)}{\|y\|^2}\left(\frac{(y|\nu)}{(q|\nu)} - \|y\|^2\right) = \frac{(q|\nu)}{\|y\|^2}(2r(y|\nu) - \|y\|^2)$$

$= \dfrac{(q|\nu)}{\|y\|^2}(r^2 - \|r\nu - y\|^2) = 0$ となるから $x = \dfrac{y}{\|y\|^2}$ と置くと $x \in H_\nu(q)\backslash\{0\}$ 且つ $y = \dfrac{x}{\|x\|^2}$ 即ち $y = \boldsymbol{\iota}(x) \in \boldsymbol{\iota}(H_\nu(q)\backslash\{0\})$ を得る。

$(q|\nu) = 0$ の場合: $(y|\nu) = 0$ より $y \in H_\nu(0)$ を得る。一方、任意に $y \in H_\nu(0)\backslash\{0\}$ を取る。この時 $\left(\dfrac{y}{\|y\|^2} - q \middle| \nu\right) = \dfrac{1}{\|y\|^2}(y|\nu) = 0$ となるから $x = \dfrac{y}{\|y\|^2}$ と置くと $x \in H_\nu(q)\backslash\{0\}$ 且つ $y = \dfrac{x}{\|x\|^2}$ 即ち $y = \boldsymbol{\iota}(x) \in \boldsymbol{\iota}(H_\nu(q)\backslash\{0\})$ を得る。

定理３（共形変換に因る球面の像の特徴付け）

(1) $\tau_p(S_r(q)) = S_r(\tau_p(q)) = S_r(p+q)$

(2) $\delta_t(S_r(q)) = S_{e^t r}(\delta_t(q)) = S_{e^t r}(e^t q)$

(3) $\rho_T(S_r(q)) = S_r(\rho_T(q)) = S_r(Tq)$

(4) $$\boldsymbol{\iota}(S_r(q)\backslash\{0\}) = \begin{cases} S_{|\rho| r}(\rho q)\backslash\{0\}, & \|q\| \neq r \text{ の場合} \\ H_{\frac{q}{\|q\|}}\left(\dfrac{1}{2\|q\|^2}q\right)\backslash\{0\}, & \|q\| = r \text{ の場合} \end{cases}$$

ここに $\rho = \dfrac{1}{\|q\|^2 - r^2}$ とする。

(証明)(1) 任意に $x \in S_r(q)$ を取る。この時 $\|(x+p)-(p+q)\| = \|x-q\| = r$ となるから $x+p \in S_r(p+q)$ 即ち $\tau_p(x) \in S_r(p+q)$ を得る。一方、任意に $y \in S_r(p+q)$ を取る。この時 $\|(y-p)-q\| = r$ となるから $y-p \in S_r(q)$ 即ち $y = \tau_p(y-p) \in \tau_y(S_r(q))$ を得る。

(2) 任意に $x \in S_r(q)$ を取る。この時 $\|e^t x - e^t q\| = e^t\|x-q\| = e^t r$ となるから $e^t x \in S_{e^t r}(e^t q)$ 即ち $\delta_t(x) \in S_{e^t r}(\delta_t(q))$ を得る。一方、任意に $y \in S_{e^t r}(e^t q)$ を取る。この時 $\|e^{-t}y - q\| = e^{-t}\|y - e^t q\| = e^{-t}(e^t r) = r$ となるから $e^{-t}y \in S_r(q)$ 即ち $y = \delta_t(e^{-t}y) \in \delta_t(S_r(q))$ を得る。

(3) 任意に $x \in S_r(q)$ を取る。この時 $\|Tx - Tq\| = \|x-q\| = r$ となるから $Tx \in S_r(Tq)$ 即ち $\rho_T(x) \in S_r(Tq)$ を得る。一方、任意に $y \in S_r(Tq)$ を取る。この時 $\|T^{-1}y - q\| = \|y - Tq\| = r$ となるから $T^{-1}y \in S_r(q)$ 即ち $y = \rho_T(T^{-1}y) \in \rho_T(S_r(q))$ を得る。

(4) 任意に $x \in S_r(q)\backslash\{0\}$ を取る。$y = \boldsymbol{\iota}(x) = \dfrac{x}{\|x\|^2}$ と置くと $y \neq 0$ 及び $x = \dfrac{y}{\|y\|^2}$ となり

$(r^2 - \|q\|^2)\|y\|^2 + 2(y|q) - 1 = \|y\|^2 \left(r^2 - \|q\|^2 + 2\left(\dfrac{y}{\|y\|^2}\middle| q\right) - \dfrac{1}{\|y\|^2} \right)$

$= \|y\|^2 \left(r^2 - \left\| q - \dfrac{y}{\|y\|^2} \right\|^2 \right) = 0$ が従う。以下この等式に基づいて議論する。

$\|q\| < r$ **の場合**：等式 $\|y\|^2 + \dfrac{2}{r^2 - \|q\|^2}(y|q) - \dfrac{1}{r^2 - \|q\|^2} = 0$ は

$$\left\| y + \frac{1}{r^2 - \|q\|^2} q \right\|^2 = \frac{1}{r^2 - \|q\|} + \frac{\|q\|^2}{(r^2 - \|q\|^2)^2} = \frac{r^2}{(r^2 - \|q\|^2)^2}$$

と書き換えられるので $y \in S_{|\rho|r}(\rho q)$ が従う。一方、任意に $y \in S_{|\rho|r}(\rho q)\backslash\{0\}$ を取る。
この時 $\left\| \dfrac{y}{\|y\|^2} - q \right\|^2 = \dfrac{1}{\|y\|^2} - \dfrac{2}{\|y\|^2}(y|q) + \|q\|^2 = \dfrac{1}{\|y\|^2}\left(1 - 2(y|q) + \|q\|^2\|y\|^2\right)$
$= \dfrac{1}{\|y\|^2}((r^2 - \|q\|^2)\|y\|^2 + \|q\|^2\|y\|^2) = r^2$ となるから $x = \dfrac{y}{\|y\|^2}$ と置くと $x \in S_r(q)\backslash\{0\}$ 且つ $y = \dfrac{x}{\|x\|^2}$ 即ち $y = \boldsymbol{\iota}(x) \in \boldsymbol{\iota}(S_r(q)\backslash\{0\})$ を得る。

$\|q\| > r$ **の場合**：等式 $\|y\|^2 + \dfrac{2}{r^2 - \|q\|^2}(y|q) - \dfrac{1}{r^2 - \|q\|^2} = 0$ は

$$\left\| y + \frac{1}{r^2 - \|q\|^2} q \right\|^2 = \frac{1}{r^2 - \|q\|} + \frac{\|q\|^2}{(r^2 - \|q\|^2)^2} = \frac{r^2}{(r^2 - \|q\|^2)^2}$$

と書き換えられるので $y \in S_{|\rho|r}(\rho q)$ が従う。一方、任意に $y \in S_{|\rho|r}(\rho r)\backslash\{0\}$ を取る。この時

$$\left\| \frac{y}{\|y\|^2} - q \right\|^2 = \frac{1}{\|y\|^2} - \frac{2}{\|y\|^2}(y|q) + \|q\|^2 = \frac{1}{\|y\|^2}(1 - 2(y|q) + \|q\|^2\|y\|^2) = r^2$$

となるから $x = \dfrac{y}{\|y\|^2}$ と置くと $x \in S_r(q)\backslash\{0\}$ 且つ $y = \dfrac{x}{\|x\|^2}$ 即ち $y = \boldsymbol{\iota}(x) \in \boldsymbol{\iota}(S_r(q)\backslash\{0\})$ を得る。

$\|q\| = r$ の場合：等式 $2(y|q) - 1 = 0$ は

$$\left(y - \frac{1}{2\|q\|^2}q \middle| \frac{1}{\|q\|}q\right) = \frac{1}{\|q\|}((y|q) - \frac{1}{2}) = 0$$

と書き換えられるので $y \in H_{\frac{q}{\|q\|}}\left(\frac{1}{2\|q\|^2}q\right)$ が従う。一方、任意に $y \in H_{\frac{q}{\|q\|}}\left(\frac{1}{2\|q\|^2}q\right)\backslash\{0\}$ を取る。この時、上と同様に $\left\|\frac{y}{\|y\|^2} - q\right\|^2 = r^2$ となるから $x = \frac{y}{\|y\|^2}$ と置くと $x \in S_r(q)\backslash\{0\}$ 且つ $y = \frac{x}{\|x\|^2}$ 即ち $y = \boldsymbol{\iota}(x) \in \boldsymbol{\iota}(S_r(q)\backslash\{0\})$ を得る。

定理４　U と V を H の（空でない）開集合とし $f \in C^1(U;H)$ 及び $g \in C^1(V;H)$ を夫々共形因子 e^δ 及び e^τ を持つ共形変換で $f(U) \subset V$ なるものとする。このとき

(1) $g \circ f \in C^1(U;H)$ は共形因子 $e^{\tau\circ f+\sigma}$ を持つ共形変換である。

(2) $f^{-1} \in C^1(f(U);H)$ は共形因子 $e^{-\sigma\circ f^{-1}}$ を持つ共形変換である。

(証明)　(1) 任意の $x \in U$ 及び $u, v \in H$ に対し等式

$$\begin{aligned}&((g\circ f)'(x)u|(g\circ f)'(x)v) = (g'(f(x))f'(x)u|g'(f(x))f'(x)v)\\ &= e^{2\tau(f(x))}(f'(x)u|f'(x)v) = e^{2\tau(f(x))}e^{2\sigma(x)}(u|v)\end{aligned}$$

が成立つので $g \circ f$ は共形因子 $e^{\tau\circ f+\sigma}$ を持つ共形変換である。

(2) 任意の $x \in U$ 及び $u, v \in H$ に対し等式

$$\begin{aligned}&((f^{-1})'(f(x))u|(f^{-1})'(f(x))v)\\ &= e^{-2\sigma(x)}(f'(x)(f^{-1})'(f(x))u|f'(x)(f^{-1})'(f(x))v)\\ &= e^{-2\sigma(x)}((f\circ f^{-1})'(f(x))u|(f\circ f^{-1})'(f(x))v)\\ &= e^{-2\sigma(x)}(u|v)\end{aligned}$$

が成立つ。従って任意の $y \in f(U)$ 及び任意の $u, v \in H$ に対し等式

$$((f^{-1})'(y)u|(f^{-1})'(y)v) = e^{2\sigma(f^{-1}(y))}(u|v)$$

が成立つ。これは f^{-1} が共形因子 $e^{-\sigma\circ f^{-1}}$ を持つ共形変換である事を意味する。

系　像を不変に保つ共形変換全体

$$\mathrm{Conf}(U) = \{f \in C^1(U;H); f \text{ は共形で } f(U) \subset U\}$$

は合成に因って群を成す。単位元は恒等写像である。

２．線分の特徴付け

共形変換の構造定理の証明に重要な役割を果たす**線分の特徴付け**を定式化しよう。

定理５　有界閉区間 $I = [t_0, t_1]$ 上の C^1 曲線を $x : I \ni t \mapsto x(t) \in H$ とし、その像に属さない点を $x_0 \in H \backslash x(I)$ とする。この時、次は同値である。

(1) 任意の $t \in I$ 及び任意の $\xi \in (\mathrm{Span}(x(t) - x_0))^\perp$ に対し $(x'(t)|\xi) = 0$

(2) 任意の $t \in I$ に対し $x(t) - x_0 \in \mathrm{Span}(x(t_0) - x_0)$

(3) $u_0 \in H\backslash\{0\}$ が存在し任意の $t \in I$ に対し $x(t) - x_0 \in \mathrm{Span}(u_0)$

(4) $u_0 \in H\backslash\{0\}$ が存在し任意の $t \in I$ に対し $x'(t) \in \mathrm{Span}(u_0)$

(証明) $(1) \Rightarrow (2) : \omega(t) = \frac{x(t)-w_0}{\|x(t)-x_0\|}$ と置くと $\|\omega(t)\| = 1, \omega \in C^1(I; H)$ となるから t で微分して $(\omega'(t)|\omega(t)) = 0$ を得る。従って $\omega'(t) \in (\mathrm{Span}(\omega(t)))^\perp = (\mathrm{Span}(x(t) - x_0))^\perp$ となる。(1) より $(x'(t)|\omega'(t)) = 0$ を得る。これは

$$\left(x'(t)\middle|\frac{x'(t)}{\|x(t)-x_0\|} - \frac{(x'(t)|x(t)-x_0)}{\|x(t)-x_0\|^3}(x(t)-x_0)\right) = 0$$

更には

$$\|x'(t)\|^2\|x(t)-x_0\|^2 = (x'(t)|x(t)-x_0)^2$$

と同値である。これより $x'(t)$ と $x(t) - x_0$ とが線型従属である事が従う。即ち任意の $t \in I$ に対し唯一つの $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ が存在し $x'(t) = \lambda(x(t) - x_0)$ を満たす。この時 $\lambda(t)^2\|x(t) - x_0\|^4 = (x'(t)|x(t) - x_0)^2 = \|x'(t)\|^2\|x(t) - x_0\|^2$ より $\lambda(t)^2 = \frac{\|x'(t)\|^2}{\|x(t)-x_0\|^2}$ となるので $\lambda \in C(I; \mathbb{R})$ であり

$$\frac{d}{dt}(\exp(-\int_{t_0}^t \lambda(s)ds)(x(t)-x_0)) = \exp(-\int_{t_0}^t \lambda(s)ds)(x'(t) - \lambda(t)(x(t)-x_0)) = 0$$

が従う。これより

$$x(t) - x_0 = \exp(\int_{t_0}^t \lambda(s)ds)(x(t_0)-x_0) \in \mathrm{Span}(x(t_0)-x_0)$$

を得る。

$(2) \Rightarrow (1)$: 仮定 (2) より $\mathrm{Span}(x(t_0) - x_0) = \mathrm{Span}(x(t) - x_0)$ であり

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = \frac{1}{h}(x(t+h)-x_0) - \frac{1}{h}(x(t)-x_0) \in \mathrm{Span}(x(t_0)-x_0)$$

より $x'(t) \in \mathrm{Span}(x(t_0) - x_0)$ が従う。以上より $x'(t) \in \mathrm{Span}(x(t) - x_0)$ となるので (1) が従う。

(2) $\Rightarrow$ (3) : $u_0 = x(t_0) - x_0$ とすれば良い。

(3) $\Rightarrow$ (2) : 仮定 (3) より $x(t_0) - x_0 \in \mathrm{Span}(u_0)$ となるので $\mathrm{Span}(x(t_0) - x_0) = \mathrm{Span}(u_0)$ を得る。これより (2) が従う。

(3) $\Rightarrow$ (4) : (2) $\Rightarrow$ (1) の証明と同様である。

(4) $\Rightarrow$ (3) :

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} x'(s)ds \in \mathrm{Span}(u_0)$$

より (3) を得る。

３．共形変換の構造定理

リュービユに依る共形変換の構造定理を実ヒルベルト空間で証明しよう。U を実ヒルベルト空間 H の（空でない）開集合とする。

定義　写像 $f : U \to H$ が**相似** similarity であるとは f が並進・伸長・回転の合成で表される事を謂い、**一つの球面に対する反転** inversion with respect to a sphere であるとは、中心からの半直線（射線 ray）上で点を移し、中心からの距離の積を半径の自乗に保つ写像と定義する。すなわち f が相似であるとは $p \in H,\ t \in \mathbb{R},\ T \in O(H)$ が存在し任意の $x \in U$ に対し

$$f(x) = (\tau_p \circ \delta_t \circ T)(x) = e^t Tx + p$$

と表される事を謂い f が中心 $p \in H$ 半径 $r = e^t > 0$ の球面 $S_r(p)$ に対する反転であるとは任意の $x \in U$ に対し

$$f(x) = (\tau_p \circ \delta_{2t} \circ \boldsymbol{\iota} \circ \tau_{-p})(x) = e^{2t} \frac{x - p}{||x - p||^2} + p$$

と表される事を謂う（f は U 上定義される写像であるから $p \notin U$ でなければならない)。

定理６（共形変換の構造定理）　３次元以上の実ヒルベルト空間 H の（空でない）連結開集合 U 上の写像 $f \in C^4(U; H)$ に対し次は同値である。

(1) f は共形変換である。

(2) f は次のどちらかの形で表される：

(i) f は相似変換である。

(ii) 唯一つの $p \in H \setminus U$ 及び 唯一つの相似変換が存在し $f = g \circ \boldsymbol{\iota}_p$ と表される。

ここに $\boldsymbol{\iota}_p$ は中心 p の単位球面 $S_1(p)$ に対する反転 $\tau_p \circ \boldsymbol{\iota} \circ \tau_{-p}$ とする:

$$\boldsymbol{\iota}_p(x) = \frac{x - p}{\|x - p\|^2} + p,\ x \in H \backslash \{p\}$$

共形変換の構造定理の証明の為に幾つか補題を準備しよう。

補題 1　$f \in C^2(U;H)$ は共形であるとし e^σ をその共形因子とすると $\sigma \in C^1(U:\mathbb{R})$ であり任意の $x \in U$ 及び任意の $u,v,w \in H$ に対し次の等式が成立する。

$$(f''(x)(u,v)|f'(x)w) + (f'(x)v|f''(x)(w,u)) = \ 2e^{2\sigma(x)}(\nabla\sigma(x)|u)(v|w), \qquad (3.1)$$

$$(f''(x)(u,v)|f'(x)w) = \ e^{2\sigma(x)}((\nabla\sigma(x)|u)(v|w) + (\nabla\sigma(x)|v)(w|u) - (\nabla\sigma(x)|w)(u|v)) \quad (3.2)$$

（証明）　$u \in H \setminus \{0\}$ に対し

$$\sigma(x) = \log\left(\frac{\|f'(x)u\|}{\|u\|}\right)$$

と表されるので $(\sigma \in C^1(U;\mathbb{R})$ が従う。また $\|u\| \to 0$ なるとき

$$\begin{aligned}&(f'(x+u)v|f'(x+u)w) - (f'(x)u|f'(x)v) = \ (e^{2\sigma(x+u)} - e^{2\sigma(x)})(v|w)\\ &= (2e^{2\sigma(x)}(\sigma'(x)u + o(\|u\|)))(v|w),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(f'(x+u)v|f'(x+u)w) - (f'(x)v|f'(x)w) - ((f''(x)(u,v)|f'(x)w) + (f'(x)v|f''(x)(w,u)))\\ &= (f'(x+u)v - f'(x)v - f''(x)(u,v)|f'(x)w)\\ &\quad + (f'(x)v|f'(x+u)w - f'(x)w - f''(x)(w,u))\\ &\quad + (f'(x+u)v - f'(x)v|f'(x+u)w - f'(x)w) = \ o(\|u\|)\end{aligned}$$

であるから (3.1) が従う。(3.1) の u,v,w を巡回させ

$$(f''(x)(v,w)|f'(x)u) + (f'(x)w|f''(x)(u,v)) = 2e^{2\sigma(x)}(\nabla\sigma(x)|v)(w|u) \qquad (3.3)$$

$$(f''(x)(w,u)|f'(x)v) + (f'(x)u|f''(x)(v,w)) = 2e^{2\sigma(x)}(\nabla\sigma(x)|w)(u|v) \qquad (3.4)$$

を得る。(3.1) と (3.2) の辺々を加えた式から (3.4) の辺々を引いた式を 2 で割り (3.2) を得る。

補題 2　H は 2 次元以上の実ヒルベルト空間とする。$B : H \times H \to \mathbb{R}$ を対称双線型形式で互いに直交する二つのベクトルの任意の組に対し零を取るものとする。この時任意の単位ベクトル $e \in H$ に対し B は内積の $B(e,e)$ 倍である。即ち任意の $u,v \in H$ に対し等式

$$B(u,v) = B(e,e)(u|v)$$

が成立つ。

（証明）　任意に $v \in H \setminus \{0\}$ を取る。線型形式 $L_v : H \to \mathbb{R}$ が

$$L_v(w) = B(v,w) - \frac{B(v,v)}{\|v\|^2}(v|w),\ w \in H$$

で定まる。定義より $L_v(v)=0$ で仮定より任意の $w\in(\mathrm{Span}(v))^\perp$ に対し $L_v(w)=0$ となる。直交分解 $H=\mathrm{Span}(v)\oplus(\mathrm{Span}(v))^\perp$ により任意の $w\in H$ に対し $L_v(w)=0$ が従う。即ち任意の $u\in H\setminus\{0\}$ に対し $L_u=0$ となる。故に任意の $u,v\in H\setminus\{0\}$ に対し

$$
\begin{aligned}
\frac{B(v,v)}{\|v\|^2}(v|u) &= B(v,u)-L_v(u)=B(v,u)=B(u,v)=B(u,v)-L_u(v)\\
&=\frac{B(u,u)}{\|u\|^2}(u|v)
\end{aligned}
$$

が成立つ。即ち任意の $u,v\in H\setminus\{0\}$ に対し

$$
B\left(\frac{v}{\|v\|},\frac{v}{\|v\|}\right)=B\left(\frac{u}{\|u\|},\frac{u}{\|u\|}\right)
$$

となり B は単位ベクトル (e,e) 上共通の値を取る事が分かる。一方 $L_u(v)=0$ は $B(u,v)=B\left(\frac{u}{\|u\|},\frac{u}{\|u\|}\right)(u|v)$ と同値であるから補題が従う。

補題３　H は 3 次元以上の実ヒルベルト空間とする。$f\in C^4(U;H)$ は共形であるとする。この時 $a\in\mathbb{R}$ が唯一つ存在し任意の $x\in U$ 及び任意の $u,v\in H$ に対し、等式

$$
(e^{-\sigma})''(x)(u,v)=a(u|v)
$$

が成立つ。

（証明）　$\dim_{\mathbb{R}}H\geq 1$ ならば一意性は明らかなので存在のみを示そう。補題 1 の (3.2) に於いて $(u|v)=0$ なる $u,v\in H$ を取ると

$$
(f''(x)(u,v)|f'(x)w)=\ e^{2\sigma(x)}((\nabla\sigma(x)|u)(v|w)+(\nabla\sigma(x)|v)(u|w)) \tag{3.5}
$$

を得る。任意に $\xi\in H$ を取り (3.5) に於いて $w=(f'(x))^{-1}\xi$ と置くと

$$
\begin{aligned}
(f''(x)(u,v)|\xi) &= e^{2\sigma(x)}((\nabla\sigma(x)|u)(v|w)+(\nabla\sigma(x)|v)(u|w))\\
&=(\nabla\sigma(x)|u)(f'(x)v|f'(x)w)+(\nabla\sigma(x)|v)(f'(x)u|f'(x)w)\\
&=(\nabla\sigma(x)|u)(f'(x)v|\xi)+(\nabla\sigma(x)|v)(f'(x)u|\xi)\\
&=((\nabla\sigma(x)|u)f'(x)v+(\nabla\sigma(x)|v)f'(x)u|\xi)
\end{aligned}
$$

を得るので $(u|v)=0$ なる任意の $u,v\in H$ に対し、等式

$$
f''(x)(u,v)=(\nabla\sigma(x)|u)f'(x)v+(\nabla\sigma(x)|v)f'(x)u \tag{3.6}
$$

が成立つ。これは

$$
e^{-\sigma(x)}f''(x)(u,v)+((e^{-\sigma})'(x)u)f'(x)v+((e^{-\sigma})'(x)v)f'(x)u=0 \tag{3.7}
$$

と書き換えられる。(3.7) をもう一度微分し

$$
\begin{aligned}
&((e^{-\sigma})'(x)w)f''(x)(u,v)+e^{-\sigma(x)}f'''(x)(u,v,w)\\
&+((e^{-\sigma})''(x)(u,w))f'(x)v+((e^{-\sigma})'(x)u)f''(x)(v,w)\\
&+((e^{-\sigma})''(x)(v,w))f'(x)u+((e^{-\sigma})'(x)v)f''(x)(u,w)=0
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

を得る。これより

$$\begin{aligned}
&((e^{-\sigma})''(x)(u,w))f'(x)v \\
= &-((e^{-\sigma})'(x)w)f''(x)(u,v)-((e^{-\sigma})'(x)v)f''(x)(u,w) \\
&-((e^{-\sigma})'(x)u)f''(x)(v,w)-e^{-\sigma(x)}f'''(x)(u,v,w) \\
&-((e^{-\sigma})''(x)(v,w))f'(x)u
\end{aligned}$$

を得るが右辺の各行は $v \leftrightarrow w$ の入れ替えに関して不変なので左辺もそうであり

$$((e^{-\sigma})''(x)(u,w))f'(x)v=((e^{-\sigma})''(x)(u,v))f'(x)w$$

が従う。v と w を線型独立に取る事は仮定 $\dim_{\mathbb{R}}H \geq 3$ より可能であり、このとき $f'(x)v$ と $f'(x)w$ も線型独立となるので $(e^{-\sigma})''(x)(u,v)=0$ が従う。補題 2 により各 $x \in U$ に対し $a(x) \in \mathbb{R}$ が唯一つ定まり等式

$$(e^{-\sigma})''(x)(u,v)=a(x)(u|v) \quad \forall (u,v) \in H \times H$$

が成立つ。$f \in C^4(U;H)$ 故 $e^{-\sigma} \in C^3(U;\mathbb{R})$ となるから $a \in C^1(U;\mathbb{R})$ であり

$$(e^{-\sigma})'''(x)(u,v,w)=(a'(x)w)(u|v) \quad \forall u,v,w \in H$$

が成立つ。左辺は $u \leftrightarrow w$ の入れ替えに関し不変なので右辺もそうであり

$$(a'(x)w)(u|v)=(a'(x)u)(w|v)$$

即ち

$$((a'(x)w)u-(a'(x)u)w|v)=0$$

が任意の $v \in H$ に対し成立つ事となり、等式

$$(a'(x)w)u=(a'(x)u)w$$

が従う。u と w を線型独立と取れば任意の u に対し $a'(x)u=0$ である事となり $a(x)$ は定数である事が従う。即ち $a \in \mathbb{R}$ が存在し任意の $x \in U$ 及び任意の $u,v \in H$ に対し
等式

$$(e^{-\sigma})''(x)(u,v)=a(u|v)$$

が成立する。

補題４　補題 3 と同じ仮定を置く。任意に一点 $x_0 \in U$ を取り $\delta > 0$ を $B(x_0;\delta) \subset U$ なるものとする。この時

(1) 任意の $u,v,\in H$ に対し

$$a(u|v)=e^{-\sigma(x_0)}\left[(\nabla\sigma(x_0)|u)(\nabla\sigma(x_0)|v)-\sigma''(x_0)(u,v)\right]$$

(2) 任意の $x \in B(x_0;\delta)$ に対し

$$\begin{aligned}
e^{-\sigma(x)} &= \frac{1}{2}a\|x-x_0\|^2-e^{-\sigma(x_0)}(\nabla\sigma(x_0)|x-x_0)+e^{-\sigma(x_0)} \\
&= e^{-\sigma(x_0)}\left[\frac{1}{2}(\nabla\sigma(x_0)|x-x_0)^2-\frac{1}{2}\sigma''(x_0)(x-x_0)^2-(\nabla\sigma(x_0)|x-x_0)+1\right]
\end{aligned}$$

(3) $\nabla\sigma(x_0) \neq 0$ ならば

$$a = e^{-\sigma(x_0)}\left[\|\nabla\sigma(x_0)\|^2 - \frac{1}{\|\nabla\sigma(x_0)\|^2}\sigma''(x_0)(\nabla\sigma(x_0))^2\right]$$

（証明）

(1)　$e^{-\sigma}$ を微分し

$$(e^{-\sigma})'(x)u = -e^{-\sigma(x)}\sigma'(x)u = -e^{-\sigma(x)}(\nabla\sigma(x)|u),$$

$$\begin{aligned}(e^{-\sigma})''(x)(u,v) &= -e^{-\sigma(x)}(\sigma'(x)u)(\sigma'(x)v) - e^{-\sigma(x)}\sigma''(x)(u,v)\\ &= -e^{-\sigma(x)}(\nabla\sigma(x)|u)(\nabla\sigma(x)|v) - e^{-\sigma(x)}\sigma''(x)(u,v)\end{aligned}$$

を得るから補題 3 より (1) が従う。

(2)　次の等式

$$\begin{aligned}(e^{-\sigma})'(x)u &= (e^{-\sigma})'(x_0)u + \int_0^1 (e^{-\sigma})''(x_0 + t(x-x_0))(u, x-x_0)dt\\ &= -e^{-\sigma(x_0)}(\nabla\sigma(x_0)|u) + a(u|x-x_0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^{-\sigma(x)} &= e^{-\sigma(x_0)} + \int_0^1 (e^{-\sigma})'(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0)dt\\ &= e^{-\sigma(x_0)} + \int_0^1 (-e^{-\sigma(x_0)}(\nabla\sigma(x_0)|x-x_0) + a(x-x_0|t(x-x_0)))dt\\ &= e^{-\sigma(x_0)} - e^{-\sigma(x_0)}(\nabla\sigma(x_0)|x-x_0) + \frac{1}{2}a\|x-x_0\|^2\end{aligned}$$

より従う。

(3)　(1) に於いて $u = v = \nabla\sigma(x_0)/\|\nabla\sigma(x_0)\|$ と置けば良い。

補題５　補題 4 と同じ設定を置く。この時

(1) $c \in \mathbb{R}$ が唯一つ存在し任意の $x \in U$ 及び任意の $u, v \in H$ に対し、等式

$$(e^{\sigma\circ f^{-1}})''(f(x))(u,v) = c(u|v)$$

が成立つ。

(2) 任意の $u, v \in H$ に対し

$$\begin{aligned}
c(u|v) &= e^{\sigma(x_0)}[(\nabla(\sigma\circ f^{-1})(f(x_0))|u)(\nabla(\sigma\circ f^{-1})(f(x_0))|v) \\
&\qquad + (\sigma\circ f^{-1})''(f(x_0))(u,v)] \\
&= e^{\sigma(x_0)}[e^{-4\sigma(x_0)}(f'(x_0)\nabla\sigma(x_0)|u)(f'(x_0)\nabla\sigma(x_0)|v) \\
&\qquad + \sigma''(x_0)((f'(x_0))^{-1}u, (f'(x_0))^{-1}v) \\
&\qquad - \sigma'(x_0)(f'(x_0))^{-1}f''(x_0)((f'(x_0))^{-1}u, (f'(x_0))^{-1}v)] \\
&= e^{\sigma(x_0)}[\sigma''(x_0)((f'(x_0))^{-1}u, (f'(x_0))^{-1}v) \\
&\qquad - (\nabla\sigma(x_0)|(f'(x_0))^{-1}u)(\nabla\sigma(x_0)|(f'(x_0))^{-1}v) \\
&\qquad + \|\nabla\sigma(x_0)\|^2((f'(x_0))^{-1}u, (f'(x_0))^{-1}v)]
\end{aligned}$$

(3) 任意の $x \in B(x_0;\delta)$ に対し

$$\begin{aligned}
e^{\sigma(x)} &= \frac{1}{2}c\|f(x)-f(x_0)\|^2 + e^{-\sigma(x_0)}(f'(x_0)\nabla\sigma(x_0)|f(x)-f(x_0)) + e^{\sigma(x_0)} \\
&= e^{\sigma(x_0)}\Bigg[\frac{1}{2}\sigma''(x_0)((f'(x_0))^{-1}(f(x)-f(x_0)))^2 \\
&\qquad - \frac{1}{2}(\nabla\sigma(x_0)|(f'(x_0))^{-1}(f(x)-f(x_0)))^2 \\
&\qquad + \frac{1}{2}\|\nabla\sigma(x_0)\|^2\|(f'(x_0))^{-1}(f(x)-f(x_0))\|^2 \\
&\qquad + (\nabla\sigma(x_0)|(f'(x_0))^{-1}(f(x)-f(x_0))) + 1\Bigg]
\end{aligned}$$

(4) $\nabla\sigma(x_0) \neq 0$ ならば

$$c = \frac{e^{-\sigma(x_0)}}{\|\nabla\sigma(x_0)\|^2}\ \sigma''(x_0)(\nabla\sigma(x_0))^2$$

（証明）

(1) 定理 4 により f^{-1} は共形因子 $e^{-\sigma\circ f^{-1}}$ を持つ共形写像であるから補題 3 を $f^{-1} \in C^4(f(U);H)$ に各点 $f(x)$ に於いて適用すれば (1) が従う。

(2) 補題 4(1) を f^{-1} と $-\sigma\circ f^{-1}$ に対して $f(x_0)$ に於いて適用したものが初めの等式である。次の等式は

$$\nabla(\sigma\circ f^{-1})(f(x)) = e^{-2\sigma(x)}f'(x)\nabla\sigma(x), \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
&(\sigma\circ f^{-1})''(f(x))(u,v) \\
&= \sigma''(x)((f'(x))^{-1}u, (f'(x))^{-1}v) - \sigma'(x)(f'(x))^{-1}f''(x)((f'(x))^{-1}u, (f'(x))^{-1}v)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

に因る。実際、任意の $u \in H$ に対し

$$\begin{aligned}(\nabla(\sigma \circ f^{-1})(f(x))|u) &= (\sigma \circ f^{-1})'(f(x))u \\ &= \sigma'(x)(f^{-1})'(f(x))u \\ &= \sigma'(x)(f'(x))^{-1}u \\ &= (\nabla\sigma(x)|(f'(x))^{-1}u) \\ &= e^{-2\sigma(x)}(f'(x)\nabla\sigma(x)|u)\end{aligned}$$

より (3.9) が従う。また、等式

$$((f^{-1})' \circ f)(x)f'(x) = (f^{-1} \circ f)'(x) = I$$

を微分して得られる

$$((f^{-1})'' \circ f)(x)(f'(x))^2 + ((f^{-1})' \circ f)(x)f''(x) = 0$$

は任意の $\xi, \eta \in H$ に対する等式

$$(f^{-1})''(f(x))(f'(x)\xi, f'(x)\eta) + (f^{-1})'(f(x))f''(x)(\xi, \eta) = 0$$

を意味するが、これは任意の $u, v \in H$ に対する等式

$$(f^{-1})''(f(x))(u, v) + (f'(x))^{-1}f''(x)((f'(x))^{-1}u, (f'(x))^{-1}v) = 0$$

と書き換えられるので合成写像の二階微分

$$\begin{aligned}(\sigma \circ f^{-1})''(y) &= ((\sigma' \circ f^{-1}) \cdot (f^{-1})')'(y) \\ &= (\sigma'' \circ f^{-1})(y)((f^{-1})'(y))^2 + (\sigma' \circ f^{-1})(y)(f^{-1})''(y)\end{aligned}$$

に $y = f(x)$ として代入すれば (3.10) が得られる。

さて、最後の等式は

$$e^{-2\sigma(x)}(f'(x)\nabla\sigma(x)|u) = (\nabla\sigma(x)|(f'(x))^{-1}u)$$

及び

$$\begin{aligned}&\sigma'(x)(f'(x))^{-1}f''(x)((f'(x))^{-1}u, (f'(x))^{-1}v) \\ &= (\nabla\sigma(x)|(f'(x))^{-1}f''(x)((f'(x))^{-1}u, (f'(x))^{-1}v)) \\ &= e^{-2\sigma(x)}(f'(x)\nabla\sigma(x)|f''(x)((f'(x))^{-1}u, (f'(x))^{-1}v)) \\ &= 2(\nabla\sigma(x)|(f'(x))^{-1}u)(\nabla\sigma(x)|(f'(x))^{-1}v) - \|\nabla\sigma(x)\|^2((f'(x))^{-1}u|(f'(x))^{-1}v)\end{aligned}$$

より従う。ここに (3.2) を $w = \nabla\sigma(x),\ u \mapsto (f'(x))^{-1}u,\ v \mapsto (f'(x))^{-1}v$ として適用した。

(3) 補題 4 と (2) より従う。

(4) (2) に於いて $u=v=f'(x_0)\nabla\sigma(x_0)$ と置くと

$$\begin{aligned}&c(u|v)=c\|f'(x_0)\nabla\sigma(x_0)\|^2=ce^{2\sigma(x_0)}\|\nabla\sigma(x_0)\|^2,\\&(\nabla\sigma(x_0)|(f'(x_0))^{-1}u)=\|\nabla\sigma(x_0)\|^4,\\&\|\nabla\sigma(x_0)\|^2((f'(x_0))^{-1}u|(f'(x_0))^{-1}u)=\|\nabla\sigma(x_0)\|^4\end{aligned}$$

となるから (4) が成立つ。

定理６の証明 (1) $\Rightarrow$ (2) を示せば充分である。補題 4，5 に現れる a と c が零かそうでないかに拠り 4 つの場合に分けて考える。

１．$a\neq 0,\ c\neq 0$ の場合 $p_0,q_0\in H$ 及び $b,d\in\mathbb{R}$ を

$$\begin{aligned}p_0&=x_0+\frac{1}{a}e^{-\sigma(x_0)}\nabla\sigma(x_0),\\q_0&=f(x_0)-\frac{1}{c}e^{-\sigma(x_0)}f'(x_0)\nabla\sigma(x_0),\\b&=e^{-\sigma(x_0)}-\frac{1}{2a}e^{-2\sigma(x_0)}\|\nabla\sigma(x_0)\|^2,\\d&=e^{\sigma(x_0)}-\frac{1}{2c}\|\nabla\sigma(x_0)\|^2\end{aligned}$$

と定めると補題 4(2) と補題 5(3) より任意の $x\in B(x_0;\delta)$ に対し等式

$$\begin{aligned}1&=e^{-\sigma(x)}\cdot e^{\sigma(x)}\\&=(\frac{1}{2}a\|x-p_0\|^2+b)(\frac{1}{2}c\|f(x)-q_0\|^2+d)\end{aligned}\tag{3.11}$$

が得られる。(3.11) を微分すると任意の $u\in H$ に対し

$$a(x-p_0|u)(\frac{1}{2}c\|f(x)-q_0\|^2+d)+(\frac{1}{2}a\|x-p_0\|^2+b)c(f(x)-q_0|f'(x)u)=0\tag{3.12}$$

が従う。さて単位ベクトル $\omega\in H$ 及び $\varepsilon>0$ に対し $I=[t_0,t_1]\equiv[\varepsilon,2\varepsilon]$ 上の線分 $x(t)=x_0+t\omega$ を考える。$\varepsilon>0$ を充分小さく取り $x(I)\subset U$ 及び任意の $t\in I$ に対し $f(x(t))\neq q_0$ となる様にする。前者は $\varepsilon<\delta/2$ とすれば良く、後者は $f(x(t))-q_0= f\ (x_0+ t\omega)-f(x_0)+\frac{1}{c}e^{-\sigma(x_0)}f'(x_0)\nabla\sigma(x_0)=(\nabla f(x_0)|t\omega+\frac{1}{c}e^{-\sigma(x_0)}\nabla\sigma(x_0))+o(t)\ (t\to 0)$ 及び $\nabla f(x_0)\neq 0$ である事から従う。さてこの時、任意の $t\in I$ に対し

$$f'(x(t))((\mathrm{Span}(x(t)-p_0))^{\perp})=(\mathrm{Span}(f(x(t))-p_0))^{\perp}\tag{3.13}$$

である事を示そう。任意に $\xi\in(\mathrm{Span}(x(t)-p_0))^{\perp}$ を取る。(3.12) に於いて $x=x(t)$ 及び $u=\xi$ と置くと $\|x(t)-p_0\|\neq 0$ より $(f(x(t))-q_0|f'(x(t))\xi)=0$ が従うので $f'(x(t))\xi\in(\mathrm{Span}(f(x(t))-q_0))^{\perp}$ を得る。一方、任意に $\eta\in(\mathrm{Span}(f(x(t))-q_0))^{\perp}$ を取り $\xi=(f'(x(t)))^{-1}\eta$ と置くと (3.12) に於いて $x=x(t)$ 及び $u=\xi$ としたものから $(x(t)-p_0|\xi)=0$ が従う。故に $\eta=f'(x(t))\xi\in f'(x(t))((\mathrm{Span}(x(t)-p_0))^{\perp})$ となり (3.13) が示された。

そこで $\omega \in \mathrm{Span}(x(t_0)-p_0)$ として $y(t)=f(x(t)), t\in I$ と置くと $y'(t)=f'(x(t))\omega$ であり任意の $\eta \in (\mathrm{Span}(y(t)-q_0))^{\perp} = f'(x(t))((\mathrm{Span}(x(t))-p_0))^{\perp})$ に対し $(y'(t)|\eta) = e^{-2\sigma(x(t))}(\omega|(f'(x(t)))^{-1}\eta)=0$ が従う。定理 5 に拠り $y(t)-q_0$ は線分を成す事が分かる。また

$$x(t)-p_0 = t\omega - \frac{1}{a}\ e^{-\sigma(x_0)}\nabla\sigma(x_0)$$

より $\nabla\sigma(x_0)=0$ ならば $x(t)-p_0=t\omega$ であり $\nabla\sigma(x_0)\neq 0$ ならば $\omega\in\mathrm{Span}(x(t_0)-p_0)$ より $\omega=\frac{\nabla\sigma(x_0)}{\|\nabla\sigma(x_0)\|}$ が従う。故に任意の $t\in I$ に対し

$$\|x(t)-p_0\| = \|(t-\frac{1}{a}\ e^{-\sigma(x_0)}\|\nabla\sigma(x_0)\|)\omega\| = |t-s_0| \tag{3.14}$$

が成立つ。ここに $s_0=\frac{1}{a}\ e^{-\sigma(x_0)}\|\nabla\sigma(x_0)\|$ と置いた。(3.11) と (3.14) より

$$\|y(t)-q_0\|^2 = \frac{2}{c}\left(\frac{2}{a|t-s_0|^2+2b}-d\right) \tag{3.15}$$

が従う。$y(t)-q_0\in\mathrm{Span}(y(t_0)-q_0)$ であり任意の $t\in I$ に対し $y(t)\neq q_0$ であるから $y(t)-q_0 = k(y(t_0)-q_0)$ なる $k>0$ が唯一つ存在する。$0<k\leq 1$ ならば

$$\begin{aligned}\|y(t)-y(t_0)\| &= \|(y(t)-q_0)-(y(t_0)-q_0)\| \\ &= |k-1|\|y(t_0)-q_0\| = \|y(t_0)-q_0\| - k\|y(t_0)-q_0\| \\ &= \|y(t_0)-q_0\| - \|y(t)-q_0\|\end{aligned}$$

であり $k>1$ ならば

$$\begin{aligned}\|y(t)-y(t_0)\| &= k\|y(t_0)-q_0\| - \|y(t_0)-q_0\| \\ &= \|y(t)-q_0\| - \|y(t_0)-q_0\|\end{aligned}$$

である。よって (3.15) より

$$\begin{aligned}\|y(t)-y(t_0)\| &= |\|y(t)-q_0\| - \|y(t_0)-q_0\|| \\ &= \left|\sqrt{\frac{2}{c}\left(\frac{2}{a|t-s_0|^2+2b}-d\right)} - \sqrt{\frac{2}{c}\left(\frac{2}{a|t-s_0|^2+2b}-d\right)}\right|\end{aligned} \tag{3.16}$$

が従う。一方 $y(t_0)-q_0$ から $y(t)-q_0$ 迄の長さは

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t}\|y'(x)\|ds &= \int_{t_0}^{t}\|f'(x(s))x'(x)\|ds = \int_{t_0}^{t} e^{\sigma(x(s))}\|x'(s)\|ds \\ &= \int_{t_0}^{t}\frac{\|x'(s)\|}{\frac{1}{2}a\|x(s)-p_0\|^2+b}ds \\ &= \int_{t_0}^{t}\frac{2}{a|s-s_0|^2+2b}ds\end{aligned} \tag{3.17}$$

で与えられる。ここに f の共形性と補題 4(2) と (3.14) を用いた。$y(t)-q_0$ は線分を成すので (3.16) と (3.17) は等しい。(3.17) の右辺は $b>0$ なら t の逆正接函数で表され $b<0$ なら t の対数函数で表され (3.16) の右辺と異なる。故に $b=0$ であり (3.17) の右辺は

$$\frac{2}{a}\left(\frac{1}{t_0-s_0}-\frac{1}{t-s_0}\right) \tag{3.18}$$

となる。$t > t_0$ に対して (3.18) は正となるので $a > 0$ が従う。(3.16) と (3.18) の右辺は等しいので $d = 0,\ c = a$ が従う。条件 $b = 0$ は $e^{-\sigma(x_0)} = \frac{1}{2a}e^{-2\sigma(x_0)}\|\nabla\sigma(x_0)\|^2$ 更には $a = \frac{1}{2}e^{-\sigma(x_0)}\|\nabla\sigma(x_0)\|^2$ と同値であり、これより $\|\nabla\sigma(x_0)\| \neq 0$ が従う。故に補題 4 と 5 より等式

$$a = c = \frac{1}{2}e^{-\sigma(x_0)}\|\nabla\sigma(x_0)\|^2 = \frac{e^{-\sigma(x_0)}}{\|\nabla\sigma(x_0)\|^2}\sigma''(x_0)(\nabla\sigma(x_0))^2$$

が従う。さらに任意の $x \in B(x_0;\delta)$ に対し、等式

$$\begin{aligned} e^{-\sigma(x)} &= \frac{1}{4}e^{-\sigma(x_0)}\|\nabla\sigma(x_0)\|^2\|x - p_0\|^2, \\ e^{\sigma(x)} &= \frac{1}{4}e^{-\sigma(x_0)}\|\nabla\sigma(x_0)\|^2\|f(x) - q_0\|^2 \end{aligned} \tag{3.19}$$

が成立つ事が分かる。これより特に $p_0 \notin U, q_0 \notin f(U)$ が従う。故に任意の $x \in B(x_0;\delta)$ に対し $\nabla\sigma(x) \neq 0$ となる。

さて、中心を p_0 とし半径を 1 とする球面に対する反転を $\boldsymbol{\iota}_{p_0}$ とする：

$$\boldsymbol{\iota}_{p_0} : H \setminus \{p_0\} \ni x \mapsto \frac{x - p_0}{\|x - p_0\|^2} + p_0 \in H$$

この時 $\boldsymbol{\iota}_{p_0}$ の逆写像は $\boldsymbol{\iota}_{p_0}$ 自身となる：$\boldsymbol{\iota}_{p_0}^{-1} = \boldsymbol{\iota}_{p_0}$

さて $g = f \circ \boldsymbol{\iota}_{p_0}^{-1} : \boldsymbol{\iota}_{p_0}(U) \to H$ を考える。$\boldsymbol{\iota}_{p_0}$ の共形因子は $H \setminus \{p_0\} \ni x \mapsto \frac{1}{\|x - p_0\|^2} \in \mathbb{R}$ であるから定理 4 に拠り h の共形因子は $y = \boldsymbol{\iota}_{p_0}(x)$ として $y \in B(x_0;\delta)$ なる時

$$e^{\sigma(\boldsymbol{\iota}_{p_0}(x))}\frac{1}{\|x - p_0\|^2} = e^{\sigma(y)}\|y - p_0\|^2 = \frac{4}{e^{\sigma(x_0)}\|\nabla\sigma(x_0)\|^2}$$

で与えられる。これより $g|\boldsymbol{\iota}_{p_0}(B(x_0;\delta)) : \boldsymbol{\iota}_{p_0}(B(x_0;\delta)) \ni x \mapsto (f \circ \boldsymbol{\iota}_{p_0}^{-1})(x) \in H$ は相似となり $f|B(x_0;\delta) = (g|\boldsymbol{\iota}_{p_0}(B(x_0;\delta))) \circ (\boldsymbol{\iota}_{p_0}|B(x_0;\delta))$ は反転と相似の合成として表される。

この様な表示は一意的である事を示そう。次の補題を示せば充分である。

補題 6　$p, q \in H$ に対し次は同値である。

(1) $\boldsymbol{\iota}_p \circ \boldsymbol{\iota}_q$ は相似変換に拡張される。

(2) $p = q$

(証明)　(2) ⇒(1) ：　$\boldsymbol{\iota}_p \circ \boldsymbol{\iota}_q = \boldsymbol{\iota}_p \circ (\boldsymbol{\iota}_q)^{-1} = \boldsymbol{\iota}_p \circ (\boldsymbol{\iota}_p)^{-1}$ は H 上の恒等変換に拡張される。
(1) ⇒(2) ：　$p \neq q$ を仮定して矛盾を導く。任意の $x \in H\backslash\{q, \boldsymbol{\iota}_q(p)\}$ に対し　等式

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\iota}_p \circ \boldsymbol{\iota}_q)(x) = \boldsymbol{\iota}_p(\boldsymbol{\iota}_q(x)) &= \frac{\boldsymbol{\iota}_q(x) - p}{\|\boldsymbol{\iota}_q(x) - p\|^2} + p \\ &= \frac{\dfrac{x - q}{\|x - q\|^2} + q - p}{\left\|\dfrac{x - q}{\|x - q\|^2} + q - p\right\|^2} + p \end{aligned}$$

が成立つ。そこで $t>0$ に対し $x=x_t=q+t\dfrac{q-p}{\|q-p\|}$ と置くと
$x_t-q=t\dfrac{q-p}{\|q-p\|}$, $\|x_t-q\|=t$ より $\dfrac{x_t-q}{\|x_t-q\|^2}=\dfrac{1}{t}\dfrac{q-p}{\|q-p\|}$ を得るので
$t>s>0$ として $t\to\infty$ としてから $s\to\infty$ とすれば

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\iota}_p\circ\boldsymbol{\iota}_q)(x_t)-(\boldsymbol{\iota}_p\circ\boldsymbol{\iota}_q)(x_s)&=\frac{\frac{1}{t}\frac{q-p}{\|q-p\|}+q-p}{\left\|\frac{1}{t}\frac{q-p}{\|q-p\|}+q-p\right\|^2}-\frac{\frac{1}{s}\frac{q-p}{\|q-p\|}+q-p}{\left\|\frac{1}{s}\frac{q-p}{\|q-p\|}+q-p\right\|^2}\\&\to\frac{q-p}{\|q-p\|^2}-\frac{q-p}{\|q-p\|^2}=0\end{aligned}$$

となる。一方 $\boldsymbol{\iota}_p\circ\boldsymbol{\iota}_q$ が相似ならば或る $r>0$ に対し

$$\|(\boldsymbol{\iota}_p\circ\boldsymbol{\iota}_q)(x_t)-(\boldsymbol{\iota}_p\circ\boldsymbol{\iota}_q)(x_s)\|=r\|x_t-x_s\|=r\left\|(t-s)\frac{q-p}{\|q-p\|}\right\|=r|t-s|$$

を得る。これは矛盾である。

そこで

$$\begin{aligned}V=\{x\in U;p\in H\backslash U\ &\text{及び相似変換}\ g\ \text{が一意的に存在し}\\ &B(x;\delta)\subset U\ \text{なる任意の}\ \delta>0\ \text{に対し}\ f|B(x;\delta)=(g\circ\boldsymbol{\iota}_p)|B(x;\delta)\}\end{aligned}$$

と置く。$V\neq\emptyset$ なる事は既に示した。V が U の開集合である事を示そう。任意に $x\in V$ を取る。対応する $p\in H\backslash U$ 及び相似変換 g を取る。$\delta_0=\mathrm{dist}(x;H\backslash U)$ と置く。$B(x;\delta_0/2)\subset V$ なる事を示せば良い。任意の $y\in B(x;\delta_0/2)$ を取る。上の議論に拠り $q\in H\backslash U$ 及び相似変換 h が一意的に存在し $B(y;\varepsilon)\subset U$ なる任意の $\varepsilon>0$ に対し $f|B(y;\varepsilon)=(h\circ\boldsymbol{\iota}_q)|B(y;\varepsilon)$ となる。$y\in B(y;\varepsilon)\cap B(x;\delta_0/2)$ 及び一意性より $p=q, g|B(y;\varepsilon)\cap B(x;\delta_0/2)=h|B(y;\epsilon)\cap B(x;\delta_0/2)$ を得る。相似変換を一意的に拡張する事に拠り $y\in V$ を得る。これが示すべき事であった。そこで V が U の閉集合である事を示せば連結性に因り $V=U$ が従い $a\neq 0, c\neq 0$ の場合の証明が完結する。

さて x を U に於ける V の閉包に属す点とする。$\varepsilon_0>0$ が存在し $B(x;\varepsilon_0)\subset U$ となる。V の点列 (x_n) が存在し $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$ なる任意の $\varepsilon>0$ に対し $N\in\ N$ を取って $n\geq N$ ならば $x_n\in B(x;\varepsilon)$ とする事が出来る。$p_N\in H\backslash U$ 及び相似変換 g_N が一意的に存在し $B(x_N;\delta)\subset U$ なる任意の $\delta>0$ に対し $f|B(x_N;\delta)=(g_N\circ\boldsymbol{\iota}_{P_N})|B(x_N;\delta)$ となる。$x_N\in B(x;\varepsilon)\cap B(x_N;\delta)$ 及び一意性より上と同様な議論で $x\in V$ を得る。これが示すべき事であった。

2. $a\neq 0, c=0$ **の場合**　$p_0\in H$ と $b\in\mathbb{R}$ を上と同様に取る。この場合 (3.11) に相当する等式は

$$1=(\frac{1}{2}a\|x-p_0\|^2+b)(e^{-\sigma(x_0)}(f'(x_0)\nabla\sigma(x_0)|f(x)-f(x_0))+e^{\sigma(x_0)})\tag{3.20}$$

となる。$\nabla\sigma(x_0)=0$ なら (3.20) より任意の $x\in B(x_0;\delta)$ が定点となってしまい矛盾するので

$\nabla\sigma(x_0) \neq 0$ となる。(3.20) を微分すると任意の $u \in H$ に対し

$$\begin{aligned} &a(x-p_0|u)(e^{-\sigma(x_0)}(f'(x_0)\nabla\sigma(x_0)|f(x)-f(x_0))+e^{\sigma(x_0)}) \\ &+(\frac{1}{2}a\|x-p_0\|^2+b)e^{-\sigma(x_0)}(f'(x_0)\nabla\sigma(x_0)|f'(x)u)=0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

が従う。$x(t)=x_0+t\omega$ と $y(t)=f(x(t))$ を上と同様に定める。この時、任意の $t \in I$ に対し

$$f'(x(t))((\mathrm{Span}(x(t)-p_0))^\perp)=(\mathrm{Span}(f'(x_0)\nabla\sigma(x_0)))^\perp \tag{3.22}$$

である事を示そう。任意に $\xi \in (\mathrm{Span}(x(t)-p_0))^\perp$ を取る。(3.21) に於いて $x=x(t)$ 及び $u=\xi$ と置くと $\|x(t)-p_0\| \neq 0$ より $(f'(x_0)\nabla\sigma(x_0)|f'(x(t))\xi)=0$ が従うので $f'(x(t))\xi \in (\mathrm{Span}(f'(x_0)\nabla\sigma(x_0))^\perp$ が従う。一方、任意に $\eta \in (\mathrm{Span}(f'(x_0)\nabla\sigma(x_0))^\perp$ を取り $\xi=(f'(x(t)))^{-1}\eta$ と置くと (3.21) に於いて $x=x(t)$ 及び $u=\xi$ としたものから $(x(t)-p_0|\xi)=0$ が従う。故に $\xi \in (\mathrm{Span}(x(t)-p_0))^\perp$ となり $\eta=f'(x(t))\xi \in f'(x(t))((\mathrm{Span}(x(t)-p_0))^\perp)$ が従う。以上より (3.22) を得る。

そこで $\omega \in \mathrm{Span}(x(t_0)-p_0)=\mathrm{Span}(x(t)-p_0)$ と取ると、任意の $t \in I$ 及び任意の $\xi \in (\mathrm{Span}(x(t)-p_0))^\perp$ に対し等式

$$(y'(t)|f'(x(t))\xi)=(f'(x(t))\omega|f'(x(t))\xi)=e^{2\sigma(x(t))}(\omega|\xi)=0$$

が成立つ。従って任意の $t \in I$ に対し

$$\begin{aligned} y'(t) &\in ((f'(x(t))((\mathrm{Span}(x(t)-p_0))^\perp))^\perp \\ &=(\mathrm{Span}(f'(x_0)\nabla\sigma(x_0)))^{\perp\perp}=\mathrm{Span}(f'(x_0)\nabla\sigma(x_0)) \end{aligned}$$

となる。即ち $y(t)-y(t_0)$ は線分を成し

$$y(t)-y(t_0)=\int_{t_0}^t y'(s)ds \in \mathrm{Span}(f'(x_0)\nabla\sigma(x_0))$$

そこで $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ を

$$y(t)-y(t_0)=\lambda(t)f'(x_0)\nabla\sigma(x_0)$$

と置く。このとき $y \in C^1(I;H)$ より $\lambda \in C^1(I;\mathbb{R})$ であり

$$\|y(t)-y(t_0)\|=|\lambda(t)|\|f'(x_0)\nabla\sigma(x_0)\|=|\lambda(t)|e^{\sigma(x_0)}\|\nabla\sigma(x_0)\|,$$

$$\begin{aligned} \lambda(t)\|\nabla\sigma(x_0)\|^2 &=(\nabla\sigma(x_0)|\lambda(t)\nabla\sigma(x_0)) \\ &=e^{-2\sigma(x_0)}(f'(x_0)\nabla\sigma(x_0)|\lambda(t)f'(x_0)\nabla\sigma(x_0)) \\ &=e^{-2\sigma(x_0)}(f'(x_0)\nabla\sigma(x_0)|y(t)-y(t_0)) \\ &=e^{-2\sigma(x_0)}(f'(x_0)\nabla\sigma(x_0)|f(x(t))-f(x_0)) \\ &\quad -e^{-2\sigma(x_0)}(f'(x_0)\nabla\sigma(x_0)|f(x(t_0))-f(x_0)) \\ &=e^{-\sigma(x_0)}\left(\frac{2}{a\|x(t)-p_0\|^2+2b}-e^{\sigma(x_0)}\right) \\ &\quad -e^{-\sigma(x_0)}\left(\frac{2}{a\|x(t_0)-p_0\|^2+2b}-e^{\sigma(x_0)}\right) \\ &=2e^{-\sigma(x_0)}\left(\frac{1}{a|t-s_0|^2+2b}-\frac{1}{a|t_0-s_0|^2+2b}\right) \end{aligned}$$

より

$$\|y(t)-y(t_0)\| = \frac{2}{\|\nabla\sigma(x_0)\|}\left(\frac{1}{a|t-s_0|^2+2b} - \frac{1}{a|t_0-s_0|^2+2b}\right) \tag{3.23}$$

が従う。どんな b に対しても (3.23) の右辺は (3.17) の右辺と等しくならない。

故に、$a \neq 0$ 且つ $c=0$ の場合は起こらない。

3. $a=0, c\neq 0$ **の場合**　2 の場合と同様に、この場合も起こらない。

4. $a=c=0$ **の場合**
$\nabla\sigma(x_0)\neq 0$ であると仮定すると $a=0$ の下、補題 4(3) より

$$\sigma''(x_0)(\nabla\sigma(x_0))^2 = \|\nabla\sigma(x_0)\|^4 \neq 0$$

となる一方、補題 5(4) より

$$e^{-\sigma(x_0)}\sigma''(x_0)(\nabla\sigma(x_0))^2 = c\|\nabla\sigma(x_0)\|^2 = 0$$

から

$$\sigma''(x_0)(\nabla\sigma(x_0))^2 = 0$$

を得る。両者は矛盾するので $\nabla\sigma(x_0)=0$ が従う。補題 4(2) より任意の $x\in B(x_0;\delta)$ に対し

$$e^{-\sigma(x)} = e^{-\sigma(x_0)}$$

が従う。これより任意の $x\in B(x_0;\delta)$ に対し

$$\nabla\sigma(x) = 0$$

を得る。これより任意の $x\in B(x_0;\delta)$ 及び任意の $u,v,\xi\in H$ に対し (3.2) で $w=(f'(x))^{-1}\xi$ と置く事に依り

$$(f''(x)(u,v)|\xi) = 0$$

が従う。即ち $f''(x)=0$ を得る。故に任意の $x\in B(x_0;\delta)$ 及び任意の $u\in H$ に対し 等式

$$\begin{aligned}
f'(x)u &= f'(x_0)u + \int_0^1 f''(x_0+t(x-x_0))(u,x-x_0)dt \\
&= f'(x_0)u, \\
f(x) &= f(x_0) + \int_0^1 f'(x_0+t(x-x_0))(x-x_0)dt \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)
\end{aligned}$$

が成立つ。これより f は相似となり任意の $x,y\in B(x_0;\delta)$ に対し等式

$$\begin{aligned}
f(x)-f(y) &= f'(x_0)(x-y), \\
\|f(x)-f(y)\| &= \|f'(x_0)(x-y)\| = e^{\sigma(x_0)}\|x-y\|
\end{aligned}$$

が従う。$x_0 \in U$ の取り方の任意性に依り 任意の $x \in U$ に対し $f''(x) = 0$ が従う。
故に $p = f(x_0) - f'(x_0)x_0,\ T = f'(x_0)/\|f'(x_0)\| \in O(H)$ 及び $e^t = \|f'(x_0)\|$ なる $t > 0$ が一意的に定まり 任意の $x \in U$ に対し $f(x) = e^t Tx + p$ と表される。

４．共形変換群の作用と線型表現

並進・伸長・回転は自然な形で群の構造を持っている：

$$\begin{aligned}
&\tau_{p+q} = \tau_p \circ \tau_q = \tau_q \circ \tau_p, \quad p, q \in H, \\
&\delta_{t+s} = \delta_t \circ \delta_s = \delta_s \circ \delta_t, \quad t, s \in \mathbb{R}, \\
&\rho_{TS} = \rho_T \circ \rho_S, \qquad\qquad T, S \in O(H)
\end{aligned}$$

反転に付随した **特殊共形変換** special conformal transform を

$$I_p = \boldsymbol{\iota} \circ \tau_p \circ \boldsymbol{\iota}, \quad p \in H$$

で定義する。$\boldsymbol{\iota} \circ \boldsymbol{\iota}$ は恒等変換に拡張されるので、等式

$$I_{p+q} = I_p \circ I_q = I_q \circ I_p, \quad p, q \in H$$

が成立する。I_p は具体的に

$$\begin{aligned}
I_p(x) &= (\boldsymbol{\iota} \circ \tau_p \circ \boldsymbol{\iota})(x) = (\boldsymbol{\iota} \circ \tau_p)\left(\frac{x}{\|x\|^2}\right) = \boldsymbol{\iota}\left(\frac{x + \|x\|^2 p}{\|x\|^2}\right) \\
&= \frac{\dfrac{x + \|x\|^2 p}{\|x\|^2}}{\left\|\dfrac{x + \|x\|^2 p}{\|x\|^2}\right\|^2} = \frac{\dfrac{x + \|x\|^2 p}{\|x\|^2}}{\dfrac{\|x\|^2 + 2\|x\|^2 (x|p) + \|x\|^4 \|p\|^2}{\|x\|^4}} \\
&= \frac{x + \|x\|^2 p}{1 + 2(p|x) + \|p\|^2 \|x\|^2}
\end{aligned}$$

と計算される。

共形変換群の函数への作用を具体的に表示して検討しよう。以下ではヒルベルト空間 H を n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ として考える。回転を考える場合は $n \geq 2$ とする。

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の標準基底を $(e_1, \cdots, e_n)$ とする。即ち e_j とは第 j 成分が 1 で残りが 0 の $\mathbb{R}^n$ の元である。任意の $x \in \mathbb{R}^n$ は $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ に依って $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_j e_j$ と一意的に表される。$\mathbb{R}^n$ に於ける共形変換群を一径数媒介表示し、ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^n)$ のユニタリ表現を与え、その生成作用素を求めよう。

並進　　ユークリッド空間に於ける並進を考える。$1 \leq j \leq n$ なる各 $j \in \mathbb{Z}$ に対し一径数群 $(T_j(\theta); \theta \in \mathbb{R})$ が

$$(T_j(\theta))(x) = x + \theta e_j, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

で定まる。(T_j) は $\mathbb{R}^n$ 上の並進群の基底を成すので並進群は n 次元である。$\mathbb{R}^n$ 上の一径数群 $(T_j(\theta);\theta\in\mathbb{R})$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の一径数ユニタリ群 $(A_j(\theta);\theta\in\mathbb{R})$ を、その引き戻し $A_j(\theta)=T_j(\theta)^*$ として引き起こす：

$$A_j(\theta)u = u\circ T_j(\theta),\quad u\in L^2(\mathbb{R}^n)$$

即ち

$$(A_j(\theta)u)(x) = u(T_j(\theta)x),\quad x\in\mathbb{R}^n$$

その生成作用素は第 j 座標に就いての偏微分（運動量作用素）である：

$$A_j'(0)u = \partial_j u$$

伸長　ユークリッド空間に於ける伸長を考える。一径数群 $(D(\theta):\theta\in\mathbb{R})$ が

$$(D(\theta))(x) = e^\theta x,\quad x\in\mathbb{R}^n$$

で定まる。伸長はこれで尽されるので伸長群は 1 次元である。$\mathbb{R}^n$ 上の一径数群 $(D(\theta);\theta\in\mathbb{R})$ は、その引き戻し $D(\theta)^*$ にユニタリ化を施した $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の一径数ユニタリ群 $(a(\theta);\theta\in\mathbb{R})$ として実現される：

$$a(\theta)u = e^{\frac{n}{2}\theta}u\circ D(\theta),\quad u\in L^2(\mathbb{R}^n)$$

即ち

$$(a(\theta)u)(x) = e^{\frac{n}{2}\theta}u(e^\theta x),\quad x\in\mathbb{R}^n$$

その生成作用素は

$$a'(0)u = (\frac{n}{2}+x\cdot\nabla)u$$

として与えられる。

回転　ユークリッド空間に於ける回転を考える。$1\le j<k\le n$ なる各組 $(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ に対し一径数群 $(R_{jk}(\theta):\theta\in\mathbb{R})$ が

$$\begin{aligned}(R_{jk}(\theta))(x) &= (x_j\cos\theta - x_k\sin\theta)e_j + (x_k\cos\theta + x_j\sin\theta)e_k + \sum_{l\neq j,k} x_l e_l\\ &=(x_1,\cdots,(\cos\theta)x_j \overset{\overset{j}{\vee}}{-} (\sin\theta)x_k,\cdots,(\sin\theta)x_j \overset{\overset{k}{\vee}}{+} (\cos\theta)x_k,\cdots,x_n)\end{aligned}$$

で定まる。(R_{jk}) は $\mathbb{R}^n$ 上の回転群の基底を成すので回転群は $n(n-1)/2$ 次元である。$\mathbb{R}^n$ 上の一径数群 $(R_{jk}(\theta);\theta\in\mathbb{R})$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の一径数ユニタリ群 $(A_{jk}(\theta);\theta\in\mathbb{R})$ を、その引き戻し $A_{jk}(\theta)=R_{jk}(\theta)^*$ として引き起こす:

$$A_{jk}(\theta)u = u\circ R_{jk}(\theta),\quad u\in L^2(\mathbb{R}^n)$$

即ち

$$(A_{jk}(\theta)u)(x) = u(R_{jk}(\theta)x),\quad x\in\mathbb{R}^n$$

その生成作用素は jk 平面に於ける角運動量作用素である:

$$A_{jk}{}'(0)u = (x_k\partial_j - x_j\partial_k)u$$

反転に付随した特殊共形変換　原点を除いたユークリッド空間 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ に於いて単位球面 $S_1(0)$ に対する反転に付随した特殊共形変換を考える。$1 \leq j \leq n$ なる各 $j \in \mathbb{Z}$ に対し一径数群 $(V_j(\theta); \theta \in \mathbb{R})$ が

$$(V_j(\theta))(x) = \frac{x + \theta|x|^2 e_j}{1 + 2\theta(e_j|x) + \theta^2|x|^2} = \frac{x + \theta|x|^2 e_j}{1 + 2\theta x_j + \theta^2|x|^2}$$

で定まる。(V_j) は反転に付随した特殊共形変換群の基底を成すので、特殊共形変換群は n 次元である。一径数群 $(V_j(\theta); \theta \in \mathbb{R})$ は、その引き戻し $V_j(\theta)^*$ として $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上の一径数群 $(\alpha_j(\theta); \theta \in \mathbb{R})$ を引き起こす:

$$\alpha_j(\theta)u = u \circ V_j(\theta), \quad u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

即ち

$$(\alpha_j(\theta)u)(x) = u(V_j(\theta)x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

その生成作用素は

$$\alpha_j{}'(0) = |x|^2\partial_j - 2x_j x \cdot \nabla$$

で与えられる。
有限ディリクレ積分の空間 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)$ に属す函数に対し反転の作用を

$$(\mathcal{C}u)(x) = |x|^{2-n}u(|x|^{-2}x), \quad x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$$

で定める。等式

$$\partial_j(v(|x|^{-2}x)) = |x|^{-2}(\partial_j v)(|x|^{-2}x) - 2|x|^{-4}x_j x \cdot (\nabla v)(|x|^{-2}x) \tag{4.1}$$

を用いて

$$\begin{aligned}\nabla(\mathcal{C}u)(x) = &-(n-2)|x|^{-n}xu(|x|^{-2}x) + |x|^{-n}(\nabla u)(|x|^{-2}x) \\ &- 2|x|^{-n-2}x(x \cdot (\nabla u)(|x|^{-2}x))\end{aligned} \tag{4.2}$$

を得る。これより

$$\begin{aligned}|\nabla(\mathcal{C}u)(x)|^2 = &(n-2)^2|x|^{-2n+2}|u(|x|^{-2}x)|^2 + |x|^{-2n}|(\nabla u)(|x|^{-2}x)|^2 \\ &+ 4|x|^{-2n-4}|x|^2|x \cdot (\nabla u)(|x|^{-2}x)|^2 \\ &- 2(n-2)|x|^{-2n}x \cdot \mathrm{Re}(u\overline{\nabla u})(|x|^{-2}x) \\ &+ 4(n-2)|x|^{-2n-2}|x|^2 x \cdot \mathrm{Re}(u\overline{\nabla u})(|x|^{-2}x) \\ &- 4|x|^{-2n-2}|x \cdot (\nabla u)(|x|^{-2}x)|^2 \\ = &(n-2)^2|x|^{-2n+2}|u(|x|^{-2}x)|^2 + |x|^{-2n}|(\nabla u)(|x|^{-2}x)|^2 \\ &+ 2(n-2)|x|^{-2n}x \cdot \mathrm{Re}(u\overline{\nabla u})(|x|^{-2}x)\end{aligned} \tag{4.3}$$

が従う。変数変換 $y = |x|^{-2}x$ は

$$
\begin{aligned}
&|x||y| = 1, \\
&x = |y|^{-2}y, \\
&\frac{\partial y_j}{\partial x_k} = |x|^{-2}(\delta_{jk} - 2|x|^{-2}x_j x_k), \\
&\det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\right) = |x|^{-2n}\det(\delta_{jk} - 2|x|^{-2}x_j x_k) = |x|^{-2n}(1-2) = -|x|^{-2n}, \\
&|x|^{-2n}dx = \left|\det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\right)\right|dx = dy
\end{aligned}
$$

を満たすので (4.3) の最後の等式の右辺の各項に関する積分は

$$
(n-2)^2\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-2n+2}|u(|x|^{-2}x)|^2dx = (n-2)^2\int_{\mathbb{R}^n}|y|^{-2}|u(y)|^2dy,
$$

$$
\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-2n}|(\nabla u)(|x|^{-2}x)|^2dx = \int_{\mathbb{R}^n}|(\nabla u)(y)|^2dy,
$$

$$
\begin{aligned}
&2(n-2)\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-2n}x\cdot\mathrm{Re}(u\overline{\nabla u})(|x|^{-2}x)dx \\
&= 2(n-2)\int_{\mathbb{R}^n}|y|^{-2}y\cdot\mathrm{Re}(u\overline{\nabla u})(y)dy \\
&= (n-2)\int_{\mathbb{R}^n}|y|^{-2}y\cdot\nabla|u|^2(y)dy \\
&= -(n-2)\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{div}(|y|^{-2}y)|u|^2(y)dy = -(n-2)^2\int_{\mathbb{R}^n}|y|^{-2}|u(y)|^2dy
\end{aligned}
$$

と計算される。故に $\mathcal{C} : \dot{H}^1(\mathbb{R}^n) \ni u \mapsto \mathcal{C}u \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^n)$ はディリクレ積分を不変に保つ:

$$
\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla(\mathcal{C}u)(x)|^2dx = \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(x)|^2dx
$$

更に $\mathcal{C}$ はラプラシアンと次の交換関係を満たす:

$$
\triangle\mathcal{C} = |x|^{-4}\mathcal{C}\triangle \tag{4.4}
$$

この等式 (4.4) により次が従う。

・単位球面上で $\mathcal{C}$ はラプラシアンと可換である。
・C^2 級の函数 u に対し u が調和である事と $\mathcal{C}u$ が調和である事は同値である。

(4.4) の証明を直接計算によって与えよう。(4.1) を用いて (4.2) の微分を実行する。

$$
\begin{aligned}
(\partial_j^2 \mathcal{C}u)(x) = \ & (n-2)n|x|^{-n-2}x_j^2 u(|x|^{-2}x) - (n-2)|x|^{-n}u(|x|^{-2}x) \\
& - (n-2)|x|^{-n}x_j(|x|^{-2}(\partial_j u)(|x|^{-2}x) - 2|x|^{-4}x_j x\cdot(\nabla u)(|x|^{-2}x)) \\
& - n|x|^{-n-2}x_j(\partial_j u)(|x|^{-2}x) \\
& + |x|^{-n}(|x|^{-2}(\partial_j^2 u)(|x|^{-2}x) - 2|x|^{-4}x_j x\cdot(\nabla\partial_j u)(|x|^{-2}x)) \\
& + 2(n+2)|x|^{-n-4}x_j^2 x\cdot(\nabla u)(|x|^{-2}x) - 2|x|^{-n-2}x\cdot(\nabla u)(|x|^{-2}x) \\
& - 2|x|^{-n-2}x_j(\partial_j u)(|x|^{-2}x) \\
& - 2|x|^{-n-2}x_j x\cdot(|x|^{-2}(\nabla\partial_j u)(|x|^{-2}x) - 2|x|^{-4}x(x\cdot(\nabla\partial_j u))(|x|^{-2}x)) \\
= \ & (n-2)n|x|^{-n-2}x_j^2 u(|x|^{-2}x) - (n-2)|x|^{-n}u(|x|^{-2}x) \\
& - \Big[(n-2)+n+2\Big]|x|^{-n-2}x_j(\partial_j u)(|x|^{-2}x) \\
& + 2\Big[(n-2)+(n+2)\Big]|x|^{-n-4}x_j^2 x\cdot(\nabla u)(|x|^{-2}x) - 2|x|^{-n-2}x\cdot(\nabla u)(|x|^{-2}x) \\
& + |x|^{-n-2}(\partial_j^2 u)(|x|^{-2}x) \\
& - 4|x|^{-n-4}x_j x\cdot(\nabla\partial_j u)(|x|^{-2}x) + 4|x|^{n-6}x_j|x|^2 x\cdot(\nabla\partial_j u)(|x|^{-2}x) \\
= \ & (n-2)n|x|^{-n-2}x_j^2 u(|x|^{-2}x) - (n-2)|x|^{-n}u(|x|^{-2}x) \\
& - 2n|x|^{-n-2}x_j(\partial_j u)(|x|^{-2}x) \\
& + 4n|x|^{-n-4}x_j^2 x\cdot(\nabla u)(|x|^{-2}x) - 2|x|^{-n-2}x\cdot(\nabla u)(|x|^{-2}x) \\
& + |x|^{-n-2}(\partial_j^2 u)(|x|^{-2}x)
\end{aligned}
$$

これより

$$
(\triangle \mathcal{C}u)(x) = \sum_{j=1}^{n}(\partial_j^2 \mathcal{C}u)(x) = |x|^{-n-2}(\triangle u)(|x|^{-2}x)
$$

が従う。

参考文献： D. E. Blair, “Inversion Theory and Conformal Mapping,” AMS, 2000.
M. Huff, Conformal maps on Hilbert space, Bull. AMS, **82**(1976), 147-149