指数法則と指数写像

平成 21 年 8 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

初等函数や特殊函数に見られる様に、函数の満たす諸法則は微分方程式を決定し、微分方程式は解としての函数を特徴付ける。ここでは指数法則を中心として、そう云った事情を説明しよう。以下では X は複素バナッハ空間、$B(X)$ は X から X 自身への有界線型作用素の成すバナッハ代数（単位元 I は恒等写像）とし、$GL(X)$ はその可逆元全体の成す $B(X)$ の開部分代数とする：

$$GL(X) = \{A \in B(X);\ \exists A^{-1} \in B(X)\}$$

定理１　恒等的に零でない写像 $e : \mathbb{R} \ni t \mapsto e(t) \in B(X)$ に対し次は同値である：
(1)(**指数法則その 1**) e は原点の近傍で連続で次の指数法則を満たす：

(i) 任意の $t, s \in \mathbb{R}$ に対し　　$e(t+s) = e(t)\ e(s)$

(ii) $e(0) = I$

(2)(**指数法則その 2**) e は原点の近傍で連続で次の指数法則を満たす：

(i) 任意の $t, s \in \mathbb{R}$ に対し　　$e(t+s) = e(t)\ e(s)$

(ii) $e(0) \in GL(X)$

(3)(**指数法則その 3**) e は原点の近傍で連続で次の指数法則を満たす：

(i) 任意の $t, s \in \mathbb{R}$ に対し　　$e(t+s) = e(t)\ e(s)$

(ii) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し　$e(t) \in GL(X)$

(4)(**微分方程式その 1**) e は微分可能であり任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し次の微分方程式を満たす：

$$\begin{cases} e'(t) = e'(0)\ e(t), \\ e(0) = I \end{cases}$$

(5)(**微分方程式その 2**) e は微分可能であり $A \in B(X)$ が存在し任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し次の微分方程式を満たす：

$$\begin{cases} e'(t) = Ae(t), \\ e(0) = I \end{cases}$$

(6)(**積分方程式**) e は連続であり $A \in B(X)$ が存在し任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し次の積分方程式を満たす：

$$e(t) = I + \int_0^t Ae(s)ds$$

(7)(**冪級数表示**) $A \in B(X)$ が存在し e は $\mathbb{R}$ 上広義一様にノルム収束する冪級数に展開される：

$$e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

(8)(**差分方程式その 1**)$A \in B(X)$ が存在し e は $\{e_n\}$ の $\mathbb{R}$ 上の広義一様なノルム収束極限となる。ここに $e_n(t)$ は A で定まる次の差分方程式の解である：任意の $t \in \mathbb{R}, |t/n| < 1$ なる任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\triangle t = t/n$ として

$$\begin{cases} \dfrac{e_{j+1}(t) - e_j(t)}{\triangle t} = Ae_j(t), \quad 0 \leq j \leq n-1, \\ \\ e_0(t) = I \end{cases}$$

(9)(**差分方程式その 2**)$A \in B(X)$ が存在し e は $\{e_n\}$ の $\mathbb{R}$ 上の広義一様なノルム収束極限となる。ここに $e_n(t)$ は次の差分方程式の解である：任意の $t \in \mathbb{R}, |t/n| < 1$ となる任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\triangle t = t/n$ として

$$\begin{cases} \dfrac{e_j(t) - e_{j-1}(t)}{\triangle t} = Ae_j(t), \quad 1 \leq j \leq n, \\ \\ e_0(t) = I \end{cases}$$

(10)(**複利極限**)$A \in B(X)$ が存在し e は $\mathbb{R}$ 上広義一様にノルム収束する次の極限として表される：

$$e(t) = \lim_{n \to \infty} \left(I + \frac{t}{n} A \right)^n$$

(11)(**レゾルベント極限**)$A \in B(X)$ が存在し e は $\mathbb{R}$ 上広義一様にノルム収束する次の極限として表される：

$$e(t) = \lim_{n \to \infty} \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-n}$$

定理２　定理１の (1)-(11) が成立つ時 (5)-(11) の A は同じであり等式 $A = e'(0)$ が成立つ。

定理３　与えられた $A \in B(X)$ に対して定理１の (5) の微分方程式と (6) の積分方程式の解は唯一つである。

定理１の証明

$(\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{2})$: (1) は (2) の特別な場合である。

$(\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{3})$: (i) で $s = -t$ とすると $e(0) = e(t)e(-t)$ となる。ここで t を $-t$ に置き換えると

$e(0) = e(-t)e(t)$ となる。$e(0) = I$ より等式 $I = e(t)e(-t) = e(-t)e(t)$ が従う。
これは $e(t)^{-1} = e(-t)$ である事を示している。

$(\mathbf{3}) \Rightarrow (\mathbf{2})$: (3) は (2) の特別な場合である。

$(\mathbf{2}) \Rightarrow (\mathbf{1})$: (i) で $t = s = 0$ とすると $e(0)^2 = e(0)$ となる。仮定により $e(0)$ は逆を持つので両辺に $e(0)^{-1}$ を作用させ $e(0) = I$ を得る。

$(\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{4})$: $h > 0$ に対し

$$||h^{-1}\int_0^h e(s)ds - I|| = h^{-1}||\int_0^h (e(s) - I)ds|| \leq \sup_{|s|\leq h} ||e(s) - I||$$

を得るので $h \to 0$ のとき右辺は 0 に収束する。以下

$$||h^{-1}\int_0^h e(s)ds - I|| < 1$$

なる $h > 0$ を一つ固定する。このときノイマン級数として $h^{-1}\int_0^h e(s)ds$ の逆元

$$\left(h^{-1}\int_0^h e(s)ds\right)^{-1} = \left(I - \left(I - h^{-1}\int_0^h e(s)ds\right)\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(I - h^{-1}\int_0^h e(s)ds\right)^n$$

が $B(X)$ で存在する。よって

$$\left(\int_0^h e(s)ds\right)^{-1} = h^{-1}\left(h^{-1}\int_0^h e(s)ds\right)^{-1}$$

も $B(X)$ で存在する。

このとき指数法則により等式

$$\begin{aligned}
e(t) &= \left(\int_0^h e(s)ds\right)^{-1}\int_0^h e(s)ds\ e(t) \\
&= \left(\int_0^h e(s)ds\right)^{-1}\int_0^h e(s)e(t)ds \\
&= \left(\int_0^h e(s)ds\right)^{-1}\int_0^h e(s+t)ds \\
&= \left(\int_0^h e(s)ds\right)^{-1}\int_t^{t+h} e(t')\ dt'
\end{aligned}$$

が成立ち最右辺は t に就いて連続微分可能である。従って e もそうであり指数法則の両辺を t で微分する事により

$$e'(t+s) = e'(t)\ e(s)$$

を得る。故に任意の $s \in \mathbb{R}$ に対し

$$e'(s) = e'(0)\ e(s)$$

が成立つ。

(4) $\Rightarrow$ **(5)** : $e:\mathbb{R}\to B(X)$ は微分可能なので $e'(0)$ は $B(X)$ の元として定まる。よって $A=e'(0)$ とすれば良い。

(5) $\Rightarrow$ **(6)** : (5) の微分方程式より e は連続微分可能である。両辺を積分すると

$$e(t)-I=\int_0^t e'(s)ds=\int_0^t Ae(s)ds$$

となり (6) が従う。

(6) $\Rightarrow$ **(7)** : 積分方程式 (6) の解 $e\in C(\mathbb{R};B(X))$ は等式

$$\begin{aligned} e(t) &= I+A\int_0^t e(s)ds \\ &= I+A\int_0^t \left(I+A\int_0^s e(\tau)\ d\tau\right)ds \\ &= I+At+A^2\int_0^t (t-\tau)e(\tau)\ d\tau \end{aligned}$$

を満たす。帰納的に

$$e(t)=\sum_{j=0}^n \frac{t^j}{j!}A^j+\frac{1}{n!}A^{n+1}\int_0^t (t-\tau)^n e(\tau)d\tau$$

を示そう。$n=0,1$ の場合は上に見た通りである。$n\geq 1$ に対し最後の等式を仮定すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!}A^{n+1}\int_0^t (t-\tau)^n e(\tau)d\tau &= \frac{1}{n!}A^{n+1}\int_0^t (t-\tau)^n\left(I+A\int_0^\tau e(s)ds\right)d\tau \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^t (t-\tau)^n d\tau A^{n+1}+\frac{1}{n!}A^{n+2}\int_0^t\int_0^\tau (t-\tau)^n e(s)dsd\tau \\ &= \frac{1}{n!}\cdot\frac{t^{n+1}}{n+1}A^{n+1}+\frac{1}{n!}A^{n+2}\int_0^t(\int_s^t (t-\tau)^n d\tau)e(s)ds \\ &= \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}A^{n+1}+\frac{1}{(n+1)!}A^{n+2}\int_0^t (t-s)^{n+1}e(s)ds \end{aligned}$$

となり帰納法が完結する。

さて任意の $T>0$ に対し不等式

$$\begin{aligned} \sup_{|t|\leq T}||e(t)-\sum_{j=0}^n \frac{t^j}{j!}A^j|| &\leq \frac{1}{n!}||A||^{n+1}\cdot\frac{T^{n+1}}{n+1}\sup_{|t|\leq T}||e(t)|| \\ &= \frac{T^{n+1}}{(n+1)!}||A||^{n+1}\sup_{|t|\leq T}||e(t)|| \end{aligned}$$

が従い $n\to\infty$ とすれば最後の右辺は 0 に収束する。これより (7) が従う。

(7) $\Rightarrow$ **(1)** : (7) の冪級数表示により $e(0)=I$ 及び e の連続性が従う。$t\in\mathbb{R}$ 及び $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$e_n(t)=\sum_{j=0}^n \frac{t^j}{j!}A^j$$

と置く。等式

$$\begin{aligned}
e_n(t)e_n(s)-e_n(t+s) &= \sum_{j=0}^{n}\frac{t^j}{j!}A^j\sum_{k=0}^{n}\frac{s^k}{k!}A^k-\sum_{l=0}^{n}\frac{(t+s)^l}{l!}A^l \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^js^k}{j!k!}A^{j+k}-\sum_{l=0}^{n}\sum_{\substack{j+k=l\\ j,k\geq 0}}\frac{t^js^k}{j!k!}A^{j+k} \\
&= \sum_{l=n+1}^{2n}\sum_{\substack{j+k=l\\ 0\leq j,k\leq n}}\frac{t^js^k}{j!k!}A^{j+k}
\end{aligned}$$

により次の評価を得る：

$$\begin{aligned}
&||e_n(t)e_n(s)-e_n(t+s)|| \\
\leq &\sum_{l=n+1}^{2n}\sum_{\substack{j+k=l\\ 0\leq j,k\leq n}}\frac{|t|^j|s|^k}{j!k!}||A||^l\leq\sum_{l=n+1}^{\infty}\frac{(|t|+|s|)^l}{l!}||A||^l\to 0\quad(n\to\infty)
\end{aligned}$$

これを等式

$$\begin{aligned}
&e(t+s)-e(t)e(s) \\
= \ &e(t+s)-e_n(t+s) \\
+ \ &e_n(t+s)-e_n(t)e_n(s) \\
+ \ &(e_n(t)-e(t))(e_n(s)-e(s)) \\
+ \ &e(t)(e_n(s)-e(s)) \\
+ \ &(e_n(t)-e(t))e(s)
\end{aligned}$$

に用いて $n\to\infty$ とすれば (1) が従う。

(4) $\Rightarrow$ **(10)** : 次の不等式を示せば良い：任意の $T\in\mathbb{R}_{>0}$及び $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$\sup_{|t|\leq T}\left\|\left(I+\frac{t}{n}A\right)^n-\sum_{j=0}^{n}\frac{t^j}{j!}A^j\right\|\leq\frac{T^2||A||^2}{2n}\exp(T||A||)$$

$n=1$ なら左辺は 0 なので以下では $n\geq 2$ として考える。等式

$$\begin{aligned}
\left(I+\frac{t}{n}A\right)^n-\sum_{j=0}^{n}\frac{t^j}{j!}A^j &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{t}{n}\right)^jA^j-\sum_{j=0}^{n}\frac{t^j}{j!}A^j \\
&= \sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{t}{n}\right)^jA^j-\sum_{j=2}^{n}\frac{t^j}{j!}A^j \\
&= \sum_{j=2}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!n^j}t^jA^j-\sum_{j=2}^{n}\frac{t^j}{j!}A^j \\
&= \sum_{j=2}^{n}\left(\prod_{k=1}^{j-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)-1\right)\frac{t^j}{j!}A^j
\end{aligned}$$

によって

$$\sup_{|t|\le T}\Big\|\left(I+\frac{t}{n}A\right)^n-\sum_{j=0}^{n}\frac{t^j}{j!}A^j\Big\|\le\sum_{j=2}^{n}\left(1-\prod_{k=1}^{j-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\right)\frac{T^j}{j!}||A||^j$$

を得る。$2\le j\le n$ なら

$$0<1-\prod_{k=1}^{j-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\le\sum_{k=1}^{j}\frac{k}{n}=\frac{j(j-1)}{2n}$$

が成立つので

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{n}\left(1-\prod_{k=1}^{j-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\right)\frac{T^j}{j!}||A||^j &\le \sum_{j=2}^{n}\frac{j(j-1)}{2n}\cdot\frac{T^j}{j!}||A||^j\\ &= \frac{1}{2n}\sum_{j=2}^{n}\frac{T^j}{(j-2)!}||A||^j=\frac{T^2||A||^2}{2n}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{T^j||A||^j}{j!}\end{aligned}$$

が従う。以上より示すべき不等式が従う。

(**10**) $\Rightarrow$ (**11**) : 任意の $T>0$ を取る。$|t|\le T, n>T$ なる任意の $t\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し $I+\frac{t}{n}A$ はノイマン級数で与えられる有界な逆 $(I+\frac{t}{n}A)^{-1}$ を持ち、そのノルムは

$$\begin{aligned}\Big\|\left(I+\frac{t}{n}A\right)^{-1}\Big\| &= \Big\|\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{t}{n}\right)^jA^j\Big\|\\ &\le \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{|t|}{n}\right)^j||A||^j\le\left(1-\frac{T}{n}||A||\right)^{-1}\end{aligned}$$

と評価される。また (10) より $e(t)$ のノルムは

$$\begin{aligned}||e(t)|| &= \lim_{n\to\infty}\Big\|\left(I+\frac{t}{n}A\right)^n\Big\|\\ &\le \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{|t|}{n}||A||\right)^n=\exp(|t|||A||)\le\exp(T||A||)\end{aligned}$$

と評価される。よって等式

$$\left(I-\frac{t}{n}A\right)^{-n}-e(t)=-\left(I-\frac{t}{n}A\right)^{-n}\left(\left(I-\frac{t}{n}A\right)^n-e(-t)\right)e(t)$$

は次の様に評価される：

$$\begin{aligned}&\sup_{|t|\le T}\Big\|\left(I-\frac{t}{n}A\right)^{-n}-e(t)\Big\|\\ &\le\left(1-\frac{T}{n}||A||\right)^{-n}\sup_{|t|\le T}\Big\|\left(I-\frac{t}{n}A\right)^n-e(-t)\Big\|\,||e(t)||\\ &\le\left(1-\frac{T}{n}||A||\right)^{-n}\exp(T||A||)\sup_{|t|\le T}\Big\|\left(I+\frac{t}{n}A\right)^n-e(t)\Big\|\end{aligned}$$

最後の不等式の右辺は (10) により $n\to\infty$ で 0 に収束する。

(11) ⇒ (10)： 上と同様に考える。不等式

$$\begin{aligned} ||e(t)|| &= \lim_{n\to\infty} \left\| \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{n} \right\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{|t|}{n}||A||\right)^{-n} = \exp(|t|||A||) \leq \exp(T||A||) \end{aligned}$$

及び

$$\left\| \left(I + \frac{t}{n}A\right)^{n} \right\| \leq \left\|I + \frac{t}{n}A\right\|^{n} \leq \left(1 + \frac{|t|}{n}||A||\right)^{n} \leq \left(1 + \frac{T}{n}||A||\right)^{n}$$

により等式

$$\left(I + \frac{t}{n}A\right)^{n} - e(t) = -\left(I + \frac{t}{n}A\right)^{n}\left(\left(I + \frac{t}{n}A\right)^{-n} - e(-t)\right)e(t)$$

を評価して得られる不等式

$$\sup_{|t|\leq T} \left\| \left(I + \frac{t}{n}A\right)^{n} - e(t)\right\| \leq \left(1 + \frac{T}{n}||A||\right)^{n} \exp(T||A||) \sup_{|t|\leq T} \left\| \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n} - e(t)\right\|$$

に (11) を用いれば (10) が従う。

(8) ⇔ (10)： 差分方程式は

$$\begin{aligned} e_{j+1}(t) &= (I + (\triangle t)A)\, e_j(t) \\ &= \left(I + \frac{t}{n}A\right) e_j(t) \\ \cdots &= \left(I + \frac{t}{n}A\right)^{j-1} e_1(t) \\ &= \left(I + \frac{t}{n}A\right)^{j} e_0(t) = \left(I + \frac{t}{n}A\right)^{j} \end{aligned}$$

特に

$$e_{n+1}(t) = \left(I + \frac{t}{n}A\right)^{n}$$

と解けるので (8) と (10) は同値である。

(9) ⇔ (11)： :差分方程式は

$$(I - (\triangle t)A)e_{j+1}(t) = e_j(t)$$

と書けるので

$$e_{n+1}(t) = \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n}$$

が解となる。よって (9) と (11) は同値である。

定理２の証明　定理１の証明の議論より、(5)-(11) に現れる A は同じものである。(5) の微分方程式に $t=0$ を代入すると $e'(0)=Ae(0)=A$ となる。

定理３の証明　(5) と (6) は同値なので (6) の解の一意性を示せば良い。$\tilde{e}$ をもう一つの解とし $f(t)=||e(t)-\tilde{e}(t)||$ と置く。任意の $t>0$ に対し f は不等式

$$f(t) \leq ||A|| \int_0^t f(s)ds$$

を満たす。これより

$$f(t) \leq ||A||^2 \int_0^t \int_0^s f(\tau)d\tau ds = ||A||^2 \int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau$$

を得る。以下帰納的に

$$f(t) \leq \frac{||A||^{n+1}}{n!} \int_0^t (t-\tau)^n f(\tau)d\tau$$

が従う。そこで任意の $T>$ に対し

$$M = \sup_{0\leq t\leq T} f(t)$$

と置くと不等式

$$0 \leq f(t) \leq \frac{||A||^{n+1}}{(n+1)!} t^{n+1} \leq \frac{||A||^{n+1}}{(n+1)!} T^{n+1}$$

が従い $n \to \infty$ とすれば [0,T] 上 $f(t)=0$ となる。$T>0$ は任意故、任意の $t \geq 0$ に対し $f(t)=0$ となる。$t<0$ についても同様に考えれば一意性が従う。

参考文献：
ハイム・ブレジス、関数解析、産業図書
R.B. Burckel, An Introduction to Classical Complex Analysis, Academic Press
G.B. Folland, Real Analysis, Wiley-Interscience