現象の認識と記述を巡る「存在」の問題

見えぬけれどもあるんだよ、見えぬものでもあるんだよ。— 金子みすず

L'essentiel est invisible pour les yeux. – Antoine de Saint-Exupéry

小澤 徹

物理現象を題材として、現象とその数学的理解との関係を考える。いわゆる現象学の枠組でこの関係を論じるのは本稿の目的ではない。数理物理学という物理学と数学に跨る分野に限定し、現象の認識・記述・理解の過程に立ちはだかる「存在」の問題に焦点を当て、この関係を論じるのが本稿の目的である[1]。

1 現象の認識・記述の手段としての模型化

物理現象の記述は、考察の対象としての物理的状態（質点の位置及び速度または運動量、流体の速度場、電磁場、重力場等）の時空変化を力や流れ等の収支が均衡するように等式を立て、それを方程式としてまとめ上げる事から始まる。時空変化の表現に微分法が用いられれば、その方程式は必然的に微分方程式の形を取る。

歴史上最初に現れたニュートンの運動方程式を例に取って説明する。最も単純な場合として、数直線上の点の運動を考えよう。例えば、直線状のレールの上を走る電車に乗っている自分を想像すれば良いだろう。点の位置が時々刻々と変化する様子は、時間変数 t によって $x(t)$ で与えられるとしよう。時刻 t から時刻 s への平均速度は、**変位**即ち位置の変化 $x(s)-x(t)$ を時刻の変化 $s-t$ で割った $(x(s)-x(t))/(s-t)$ で与えられる。時刻 s を時刻 t に近づけて行った平均速度の極限を時刻 t における速度といい $v(t)$ または $\dot{x}(t)$ 等と表す。時間変数に依らない速度による運動を**等速運動**といい、等速運動を力の働いていない状態とするのがニュートン力学の第一法則である。等速運動している電車の中では外力を感じる事は無いだろう。点の運動は、全ての時刻における位置と速度が分かれば（即ち、位置と速度が時間の函数として表す事ができれば）完全に記述された事になる。電車の運転手は、外の様子と速度計からそれぞれ時々刻々と変化する位置と速度を確認し、運動する点としての車両の物理的状態を認識しているのである。

さて、速度をもう一段深く知るためには、速度の変化率（即ち加速度）を知る事が重要であり、それは時刻 t から時刻 s への平均加速度 $(\dot{x}(s)-\dot{x}(t))/(s-t)$ の（s から t に近づけて行った）極限としての**加速度**として与えられる。時刻 t における加速度を $a(t)$ または $\ddot{x}(t)$ 等と表す。等速運動は加速度の無い運動であるので、加速度の有る運動には力が働いている事となる。電車が急発進したり急停車すれば加速度が生じ、乗客は力を感じ、立っている人は吊り革に掴まろうとするであろう。点（粒子）に働く力は加速度と比例関係に在り、比例定数は粒子の質量で

定まるというのがニュートン力学の第二法則であり、加速度の質量倍が力と一致する事を等式で繋いで方程式と見做したものがニュートンの運動方程式である。力は時間・位置・速度に依存して決まるものであり、真空中の自由落下、抵抗媒質中の落下、ばねの調和振動、振り子の単振動をはじめとして、その依存性が具体的に表される例が知られている。このような特別な場合には、微分方程式の初期値問題としてのニュートンの運動方程式の解法は求積法の枠組に収まり、位置と速度が初等函数や特殊函数によって明示的に表示される事を、（学部初年度の基礎科目である）力学で学ぶ。

　ニュートンの運動方程式をはじめとして、物理現象の記述の殆んどに微分方程式が用いられる。物理的状態の時空変化は、時空変数で一回微分して得られる一階偏導函数で与えられるが、時空変化を知るためには、その変化率を知る事が重要となり、それはもう一回微分して得られる二階偏導函数で与えられるので、物理現象の記述には二階の偏微分方程式が頻繁に登場する。古典力学に現れるニュートンの運動方程式は二階の非線型常微分方程式系であり、量子力学に現れるシュレディンガー方程式は二階の線型偏微分方程式であり、一般相対論に現れるアインシュタイン方程式は二階の非線型偏微分方程式系である。電磁気学に現れるマクスウェル方程式は一階の線型偏微分方程式系であるが、電磁ポテンシャルの方程式としては二階である。相対論的量子力学に現れるディラック方程式も一階の線型偏微分方程式系であるが、電子のエネルギー関係式を基礎とする二階の線型偏微分方程式であるクライン・ゴルドン方程式を行列とベクトルを用いて一階の関係式に書き直した方程式系である。エネルギーや運動量が時間的に不変な保存系を記述する偏微分方程式は変分構造を持ち、対応するラグランジアンの変分（ラグランジュ密度のオイラー・ラグランジュ方程式）として表される。ラグランジアンを基礎とする理論体系では、ラグランジュ密度を場およびその一階導函数による函数と設定する事が標準的であり、この設定に関する限りオイラー・ラグランジュ方程式は必然的に二階の偏微分方程式の形を取る。

　現象を記述するために考案された微分方程式は、現象の中から本質的なものだけに注目し、単純化した形で抽出する一方、本質的でないと認識した要素は無視して棄て去ると云う**模型化**（モデル化）の工程を経て導出された数学的対象である。その際、**模型**（モデル）には、現象の忠実な複写（コピー）である事よりも、現象の本質が単純な形で的確に表現されている事が求められる。また、同じ現象に対して注目したものが異なれば、必然的に模型方程式は異なるものとなる。模型は微分方程式と云う数学的表現を得た瞬間、現象の観測から一旦分離独立した数学的対象に転換する。数学的対象に関する限り、数学的検討を経て得られた結論のみが定理として定式化され、一旦証明された定理は未来永劫否定される事は無い。しかし、それらを体系化した物理学としての理論が現象の本質を捉えていなければ、その模型は

現象を説明する理論体系としての価値を失い、破棄される[2]。

2　現象の理解の出発点を超越する理論的帰結

現象の認識を模型化して書き下された数学的対象である微分方程式は、考案者の意図を超越した結論を導く事もある。中西襄は次の様に述べている[3]。

> アインシュタイン方程式はアインシュタインよりも賢い！
> シュレディンガー方程式はシュレディンガーよりも賢い！
> ディラック方程式はディラックよりも賢い！
>
> アインシュタインは宇宙は永遠に不変不滅だと信じていたが、アインシュタイン方程式は宇宙が定常ではありえないことを教えた。
>
> シュレディンガーは、物理学の基本量は何らかの物理的実在を表すものと思い込んでいたが、シュレディンガー方程式の解である波動関数は確率解釈でしか観測と関係づけられないものだった。
>
> ディラックは電子のディラック方程式から存在が導かれる正電荷の粒子を無理矢理に陽子と同定しようとしたが、じつは陽電子が実在したのだった。
>
> 20世紀の初頭に現れた物理学の基礎理論の3大革命「特殊および一般相対論」「量子力学」「相対論的量子論」のそれぞれを代表するものというべきアインシュタイン方程式、シュレディンガー方程式、ディラック方程式は、いずれも微分方程式である。アインシュタイン方程式は重力の場が時空構造を支配する「時空計量」であって、連立非線形偏微分方程式に従うことを示したものである。シュレディンガー方程式は、一切の「日常常識」が通用しないミクロの世界においても、偏微分方程式によって物理が正確に記述されることを明らかにした。ディラック方程式は、特殊相対論と量子論の融合が必然的に反粒子の存在を導くという驚くべき結論を生んだ。

模型化された数学的対象に対する考察を突き詰めて行った結果、自然現象が独りでに表現出来てしまい、世界の根源を明らかにしてしまうと云う事実は驚きであると共に謎である。この謎に就いて吉本隆明も柄谷行人も明確に言及しており、実に興味深い[4]。更に進んだ逆転現象として、一つの現象を合理的に説明するために既存の理論と整合するよう、一定の数学的仮定の下に書き下したラグランジアンによって「予言」された新しい粒子の存在が、後になって実際に「発見」される事もある[5]。これが現代の素粒子論や宇宙論の研究で実際に起きている事態である。マッハが生きていたら激怒するであろうか。このような理論的予言の方法論は湯川秀樹の中間子論迄溯る事が出来る[6]。

こうした事情を吉田善章は次の様に簡潔で的確に表現する[7]。

数学のイデア的世界は、現実界を離れて自在に飛翔する考察によって構築される。それによって脱構築された物理の空間概念は、必ずしも人間の知覚に結び付けられるとは限らない。実際、理論に先導されて発見された〈空間〉（相対性理論の非ユークリッド空間や量子論の非可換な空間など）は、人の直感では理解しにくい。

イデアは〈物〉を発見することさえある。例えば、理論が対称性を保つために[8]なくてはならないものとして新しい〈物〉＝粒子が発見される。このように、数学的な可能性を自然の中に発見するという逆転した事態が起きているのである。カントが直観形式と呼んだものは、もはや一部の専門家だけに共有されるものになったと言わざるを得ない。

3　模型方程式の数学解析による現象の存在証明

現象の本質を表現する模型としての微分方程式は、現象を記述するために考案された数学的対象であるが、現象を記述しているのは微分方程式そのものではなく、模型化された物理的状態である。現象を記述する物理的状態の数学的構造・法則を模型方程式が担っていると言い換える事も出来る。当然ながら、その物理的状態は模型方程式の解である。従って現象の認識・記述を模型化して捉えると云う立場を取る以上、**模型方程式の解の存在**は**現象の実在**と同値（同等、等価）な概念としての地位を得ている事になる。「現象を記述するために考案された方程式なのだから、解の存在は当り前」なる主張は、一見尤もらしいが、「解の存在」を明確にしない限り無意味である。加藤敏夫は次の様に述べている[9]。

私はここ[10]に数理物理学として重要な問題があると考え、その研究に深入りするようになった。もともとこの種の問題は広い意味の存在定理であって、一般の物理学者には人気がない。俗説によれば方程式に解がある事は自明であり証明を要しない、何となれば現象は実際におこっているから！ しかしこれは理論を放棄した自殺的発言であろう。

繰り返すが、方程式の解の存在は自明ではない。学部・大学院レベルの教科書の多くは、一般理論の説明は形式的な計算に終始し、明示的表示を持つ具体例を幾つか例示するに留まり、模型方程式の解の存在に正面から向き合おうとする根源的な発想に基づいて著されたものは極く僅かである。数理物理学に現れる非線型偏微分方程式に対し、明示的表示を持つ解は極めて重要であるばかりか、関連した研究の指針となる対象であるが、解全体の集合の中では殆んど無いに等しいと言って良い。それでもなお、初期条件や境界条件等の一定の限定条件の下で、解の存在が証明で

きる場合が少なくないのである。実際、非線型偏微分方程式の函数解析学的研究が始まった一九三〇年代から現在に至るまで、この分野では、解の存在証明が最も基礎的な問題とされ、数多くの論文が発表されている[11]。解の存在は解の明示的表示よりも格段に広い概念である。具体例として、代数方程式を取り上げよう。一次方程式 $ax+b=0$ や二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の根（解）の公式は馴染み深いが、三次方程式や四次方程式の解法も知られている。では五次方程式はどうか？特殊な場合を除いて、根の公式は存在しない。これは**アーベルの定理**（五次以上の代数方程式の根は代数的には求まらない）として知られ、数学科の専門科目で学ぶ[12]。一方、複素数を基礎とする解析学では**代数学の基礎定理**として代数方程式は複素数の根を持つ事を学ぶ[13]。両者は決して矛盾しない。両者を統合して説明すれば「解は必ず存在するが、その方法（有限回の代数的操作）では解けない」と表現されるであろう。

ここで、解の存在の意味を明確にしておこう。まず、**解の定義**を与える必要がある。そのためには「解の属すべき集合（函数空間）」と「解の満たすべき等式（方程式そのもの或いは方程式から導かれる等式）」を明確にしなければならない。前者は「どういった範囲で解を見出そうとするのか」、後者は「どのように方程式とその解を意味づけるのか」という前提条件の明確化を要求しているのである。一つの方程式に一つの限定条件を課したとしても、前者・後者のどちらにも複数の選択肢が存在する。解の属すべき集合が余りにも狭いと解は存在せず（存在を仮定すると矛盾が生じる場合）、余りにも広いと解は複数存在し、適切に選んで初めて解は一つだけ存在すると云った事例は数多い。

解の定義が定まった段階で、漸く解の存在を議論の俎上に載せる事が出来る。すると前節で述べた理論物理学的論法とは、方程式の解の存在を仮定して理論体系を構築していく方法論と捉え直す事が出来る。便宜上、この方法論を**理論物理学的存在論**と呼ぶ事にしよう。これに対して、解の存在そのものを数学的手法で問う方法論を**数理物理学的存在論**と呼ぶ事にしよう。定義により、理論物理学的存在論は数理物理学的存在論が支えている事となる。では数理物理学的存在論を支えるものは何であろうか？数学的方法論において「存在」とは何か、何に基づいてどのような論法で証明するのか、節を改めて論じよう。

4　数学における「存在」と「数学的実在」

「何を根拠として存在を証明するのか？」と云う問い、さらには言い方を格段に広げた「何を以って解った気になるのか？」と云う問いは、学問によって考え方もその枠組も方法論も様々である。工学では実際に何かを創って見せる事が存在証明であろう。実験物理学では観測による実証[14]が存在証明となる。理論物理学では、観測や実験に対して無矛盾で、現象を的確に説明する理論体系が、これに相当する

であろう。一方、数学の立場は、存在に関する複数の同値な命題を体系化したものを公理とし、その枠組の中で存在を保障しようとするものである。勿論、公理は少ない方が好ましいし、全体として矛盾を含むものであってはならない。典型的な例は、集合論に於ける選択公理（空でない集合から成る集合族に対する選択写像の存在）とツォルンの補題（空でない帰納的順序集合に対する極大元の存在）とツェルメロの整列定理（空でない集合を整列化する順序の存在）と云う同値な命題から成る理論体系であり、（学部初年度の基礎科目である）素朴集合論で学ぶ[15]。この理論体系が**無限**を伴う数学的対象に対する**存在公理**として最後の拠り所の役目を果たしている。自然数に関するペアノの公理（初めの数の存在、次の数を与える単射の存在、数学的帰納法）は、任意のペアノ系がペアノ同値である（ペアノの規定した自然数の体系は本質的に一通りである）事を以って**自然数の存在公理**と見做される[16]。物理学に代表される自然科学に於いて、時間は実数で表され澱みなく連続的に流れているものと想定されているが、これは実数の連続性が保障されて初めて正当化される考え方である。微分積分学の全ての基礎は実数の連続性に帰着される。連続体としての実数の存在も一連の同値な命題に因る理論体系に拠るものである[17]。初めに述べた速度や加速度に現れる**極限の存在**の基礎もここに在る。

さて、非線型偏微分方程式の初期値問題の解の存在に対する典型的な証明法は、時間変数で積分して積分方程式を導き、その解を自由項（非摂動項）と摂動項からなる写像の不動点と見做して、不動点定理が適用可能な設定を構築すると云う論法である[18]。不動点定理は数多いが、完備性に基づくもの（バナハの不動点定理やニュートン・カントロビッチの不動点定理等）、コンパクト性に基づくもの（ブラウワーの不動点定理やシャウダーの不動点定理等）、順序構造と単調性に基づくもの（ブルバキ・クネーザーの不動点定理やアマンの不動点定理等）に大別される[19]。

一方、ラグランジアンの最小化問題としてのオイラー・ラグランジュ方程式の境界値問題の解の存在に対する典型的な証明法は、考察の対象とする函数の集合上でのラグランジアンの下限を達成する最小化列に対し、その収束部分列を見出すと云う論法であり、条件順序完備性や単調収束性や点列コンパクト性を基礎とするものである[20]。

このように、解の存在証明は実数の連続性を特徴付ける位相空間論の様々な概念を基礎としている。こうして「存在」が数学的に証明されたものだけが「数学的実在」としての意味を持つ。

5 現象の認識を巡る「存在」の問題

以上、現象の認識を巡る問題に就いて、「存在」の視点から論じて来た。「存在」は実証されて初めて科学的価値を持つと云う立場を否定する事は不可能である一方、数学的イデア観の導いた目に見えない「存在」が実験・観測を促し実証に結び

ついた数多くの事例も否定する事は出来ない。

両者を（二者択一ではなく）大きな枠組で捉えるには、現象の認識や理解の方法に於いて階層性が存在し、それを意識する事が重要であろう。即ち、「何を以って、存在を証明したと言えるのか？」「何を以って、理解出来たと言えるのか？」と云う問いに対する答えには、方法論的にも理論的にも多層な理解の水準が存在する事を意識する事が重要であろう。その上で、それらを繋いで大きな全体像を描き出す事が重層な理解の体系を形成し、学問の更なる発展に繋がって行くのではないだろうか[21]。

---

1 本稿は『数理物理学としての微分方程式序論』（サイエンス社）の第1章と第16章を敷衍したものであるが、数式を殆ど用いていない分、却って分かり難くなった可能性がある。物理学や数学の標準的な教科書や同著を参考にして戴ければ幸いである。数学的専門用語を用いた場合のみ、以下参考文献を挙げる。

2 修正されたり適用範囲を限定された形で残る理論もある。古典力学は量子力学や相対論の登場により、ミクロの世界や光速の世界を説明出来ない事が決定的となっても、その重要性が否定される事は無く、その地位に揺るぎは無い。

3 中西襄『微分方程式 物理的発想の解析学』（丸善出版），169-170.

4 ［対談］科学の普遍性を問う―長崎浩・吉本隆明（『「反原発」異論』（論創社）所収）
柄谷行人『哲学の起源』（岩波書店）

5 近年では、ヒッグス粒子や重力波の「発見」が大々的に報道された。

6 これが定説となっているが、新しい粒子の存在を仮定し理論化するという発想は実は仁科芳雄によるものであり、仁科が湯川に提案した事が証拠と共に、下條竜夫『物理学者が解き明かす重大事件の真相』（ビジネス社）に述べられている。

7 「吉田善章による第八の異議：物と時空―そして〈私〉」（松永澄夫 監修 渡辺誠・木田直人 編集『哲学すること』（中央公論新社）所収），346.
（吉田による補足説明）ここで「対称性」とは、平行移動や回転あるいは鏡像反転のような「変換」に対して「不変」という意味である。具体的な「表現」は、必ず一つの特別な「構図」を選択している。例えば、ある法則を方程式によって具体的に表現しようとすると、変数や係数を定量化するために座標系や単位系（スケール）を選択する必要がある。座標系や単位系の選び方によっていろいろな表現をとる方程式は、しかし同じことを表している。構図は表現者が選択するものであり、理論の根幹＝イデアに内在するものではない。したがってイデアの表現（抽象化された方程式）は構図の変換に対して不変でなくてはならない。これを理論の対称性という。「構図」と呼んだものに含まれるのは座標系や単位系だけでなく、対象を「パラメタ化」する仕方全般である。複数のパラメタの組み合わせ方も構図の一つであり、パラメタたちの組み換え変換（ゲージ変換という）に対する不変性が問題になる場合もある。

8 波動函数に対する時空並進、回転、反転、ゲージ群などの作用に対するラグランジアンの不変性が典型的な例である。これらの運動群は時空間の対称性（即ち二点間の距離を不変に保つ変換）を記述するものであり、物理学の基礎に時空の対称性が反映されていると考えられる。

9 江沢洋・恒藤敏彦編『量子力学の展望 下』（岩波書店），670.

10 量子力学の基礎を成すフォン・ノイマン理論に於ける自己共軛性の問題

11 少なくとも Jean Leray の次の論文迄遡る事が出来る。Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Math. 63 (1934), no. 1, 193–248.

12 例えば 雪江明彦『代数学２ 環と体とガロア理論』（日本評論社）

13 例えば 杉浦光夫『解析入門』（東京大学出版会）

14 理論物理学の理論体系の端緒となった実験（例えばガリレオ・ガリレイのピサの斜塔からの落下実験）や理論体系から導かれる法則の検証（例えばヘルツによる電磁波の実在証明によるマクスウェル理論の検証）が典型的である。後者の場合、理論の深い理解は大前提であり、どのようなデータをどのように得るのかと云った洞察とともに、実験目的に適う実験装置の設計・実装も必要となる。

15 例えば 松坂和夫『集合・位相入門』（岩波書店）

16 普段用いている 1,2,3 ・・・ I, II, III, ・・・一、二、三・・・は単なる記号であり、自然数の本質を表現している訳でも自然数の存在を証明している訳でもない。

17 実数の連続性を支える公理体系は、自然数全体を含むアルキメデス順序体（自然数全体を非有界な部分集合として含み、加減乗除と大小関係が意味を持つ数の体系）に対する

- 区間の連結性（デデキント切断の存在）
- 条件順序完備性（有界部分集合に対する上限・下限の存在）
- 単調収束性（有界な単調列に対する極限の存在）
- 完備性（コーシー列に対する極限の存在）
- 鳩の巣原理（単調縮小区間列に対する共通点の存在）
- 有界閉集合の点列コンパクト性（有界列に対する収束部分列の存在）
- 有界閉集合のコンパクト性（開被覆に対する有限部分被覆の存在）

の同値な命題から成る（例えば 斎藤正彦『数学の基礎』（東京大学出版会））。これら何れの命題も「何かを対象とする何かの存在」の形を取っている事に注目すべきである。また、位相空間論の様々な重要概念が、本来の定義が全く異なるにも拘らず、実数を対象とした途端、連続性の同値な表現に一齊に登場する事も興味深い。

18 例えば 小澤徹『数理物理学としての微分方程式序論』（サイエンス社）

19 例えば 増田久弥『応用解析ハンドブック』（丸善出版）

20 例えば 田中和永『変分問題入門』（岩波書店）

21 局所的な情報（局所座標）を繋いで（座標変換）得られる大域的な数学的対象を多様体という。例えば坪井俊『幾何学』（東京大学出版会）