逐次近似法による方程式の解法

平成 20 年 8 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

(X,d) を (空でない) 距離空間、$f : X \to X$ を写像とする。次の問題を考えよう：

(A)　方程式 $u = f(u)$ を解け。

この問題の様に (A) に於ける「解」を f の不動点として捉える見方を代表するのが不動点定理による方法である。その中でも「完備距離空間上の縮小写像は唯一つの不動点を持つ」と云うバナッハの不動点定理は応用が広い。写像 $f : X \to X$ が X 上の距離 d に関して縮小写像であるとは $0 < k < 1$ なる k が在って任意の $u, v \in X$ に対し

$$d(f(u), f(v)) \leq kd(u,v)$$

が成立つ事を謂う。k を f の縮小定数と謂う。

定理１ (バナッハの不動点定理)

(X,d) を完備距離空間、$f : X \to X$ を縮小写像とする。このとき

(1) (不動点の存在と一意性) f は唯一つの不動点を持つ。即ち $u = f(u)$ なる $u \in X$ が唯一つ存在する。

(2) (ピカールの逐次近似法) $u_0 \in X$ を任意に一つ取り帰納的に $u_1 = f(u_0), u_n = f(u_{n-1}), n \geq 2,$ と定めた点列 $\{u_n\} \subset X$ は (1) の u に収束する。u_n は次の評価を満たす：

$$d(u_n, u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(u_1, u_0), \quad n \geq 1$$

注意　$u_0 \in X$ を任意に一つ取り f に逐次代入して近似列 $\{u_n\}$ を構成する方法をピカールの逐次近似法 Picard's interation scheme と謂う。(2) の評価は近似列の収束率を与えているものと考えられる。$k^n = \exp(n \log k) = \exp(-(\log \frac{1}{k})n),\ \log \frac{1}{k} > 0$ であるから (2) の評価を

$$d(u_n, u) \leq \left(\frac{d(u_1, u_0)}{1-k} \right) \exp(-\left(\log \frac{1}{k} \right) n)$$

と書き直せば収束率は n に関して指数的減衰であると見做す事が出来る。

定理１の証明　ピカールの逐次近似法により構成された $\{u_n\}$ は

$$d(u_{m+1}, u_m) = d(f(u_m), f(u_{m-1})) \leq kd(u_m, u_{m-1}), m \geq 1$$

を満たすので、これを繰返し用いて

$$\begin{array}{rcl} d(u_{m+1}, u_m) & \leq & kd(u_m, u_{m-1}) \\ & \leq & k^2 d(u_{m-1}, u_{m-2}) \\ \cdots & \leq & k^m d(u_1, u_0), \quad m \geq 1 \end{array}$$

を得る。$m > n$ に対し三角不等式より

$$\begin{array}{rcl} d(u_m, u_n) & \leq & \displaystyle\sum_{\ell=n}^{m-1} d(u_{\ell+1}, u_\ell) \\ & \leq & \displaystyle\sum_{\ell=n}^{m-1} k^\ell d(u_1, u_0) = \frac{k^n - k^m}{1-k} d(u_1, u_0) \end{array}$$

となり $m > n \to \infty$ とすれば右辺は 0 に収束する。即ち $\{u_n\}$ はコーシー列を成し (X, d) の完備性より収束する。その極限を $u \in X$ と記せば $d(u_n, u) \to 0 (n \to \infty)$ であり上の不等式で $m \to \infty$ とする事により

$$d(u, u_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(u_1, u_0)$$

を得る。不動点の一意性を示す事が残っている。$v \in X$ も不動点であるとしよう。即ち $u = f(u), v = f(v)$ と仮定する。このとき

$$d(u, v) = d(f(u), f(v)) \leq kd(u, v)$$

となるので

$$(1-k)d(u, v) \leq 0$$

これより $d(u, v) \leq 0$ 即ち $d(u, v) = 0$ が従い $u = v$ より一意性が得られる。

基礎となる空間に線型構造が入る場合 $F(u) = u - f(u)$ と置くと問題 (A) は次と同値となる。

(B)　方程式 $F(u) = 0$ を解け。

この問題 (B) に於ける「解」は F の零点として捉えられるものである。以下簡単の為に X はバナッハ空間であるとしノルムを $\|\cdot\|$ と表す。このとき f は縮小定数 k を持つ縮小写像である為の必要充分条件は不等式

$$\|(u - F(u)) - (v - F(v))\| \leq k\|u - v\|, \quad u, v \in X$$

で与えられる。これは F が恒等写像 id に充分近い事を表している。ピカールの逐次近似は与えられた $u_0 \in X$ に対し次の様に帰納的に定めたものである：

$$u_n = u_{n-1} - F(u_{n-1}), \quad n \geq 1$$

このとき一意解 u への収束率は

$$\|u_n - u\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|F(u_0)\|$$

と表される。

ニュートンの逐次近似法とは $F(u)=0$ なる解 u に収束する近似解の列 $\{u_n\}$ を定める一つの方法である。その導入の考え方は次の様に説明される。F が点 u_n で微分可能であれば

$$F(u) - F(u_n) = F'(u_n)(u-u_n) + o(\|u-u_n\|)$$

となり $F(u)=0$ なる条件の下ではこれは

$$F'(u_n)(u-u_n) = F(u_n) + o(\|u-u_n\|)$$

と書き換えられる。このとき $F'(u_n) \in B(X)$ が可逆ならば

$$u = u_n - (F'(u_n))^{-1}F(u_n) + o(\|u-u_n\|)$$

となる。主要項 $u_n - (F'(u_n))^{-1}F(u_n)$ は u_n による次の近似を与える u_{n+1} を定義していると考えられる。そこで $u_0 \in X$ を一つ定めニュートンの逐次近似列 $\{u_n\}$ を

$$u_n = u_{n-1} - (F'(u_{n-1}))^{-1}F(u_{n-1}), \quad n \geq 1$$

と定めよう。

定理 2 (カントロビッチ)　X をバナッハ空間、U を X の開集合、$u_0 \in U, F \in C^1(U;X)$ とし次の (a),(b),(c) を仮定する。

(a) F の導写像 $F' : U \to B(X)$ はリプシッツ連続である。即ち定数 $L>0$ が在って任意の $u, v \in U$ に対し次の評価が成立つ。

$$\|F'(u) - F'(v)\|_{B(X)} \leq L\|u-v\|$$

(b) $F'(u_0)$ は可逆であり $F'(u_0)^{-1}$ の作用素ノルム、$F'(u_0)^{-1}F(u_0)$ のノルム、F' のリプシッツ定数の積は $1/2$ より真に小さい。即ち

$$\begin{aligned}
&\|F'(u_0)^{-1}\|_{B(X)} \leq a, \\
&\|F'(u_0)^{-1}F(u_0)\| \leq b, \\
&abL < 1/2
\end{aligned}$$

(c) $t_- \equiv \dfrac{1-\sqrt{1-2abL}}{aL}$ を半径とする u_0 中心の閉球 $\overline{B(u_0,t_-)}$ は U に含まれる

$$\overline{B(u_0,t_-)} \subset U$$

このとき次が成り立つ。

(1) (解の存在と一意性)　方程式 $F(u)=0$ は $u\in\overline{B(u_0,t_-)}$ なる唯一つの解を持つ。

(2) (ニュートン近似列の収束率)　$k=1-\sqrt{1-2abL}$ とすると任意の $n\ge 0$ に対し次の評価が成り立つ。

$$\|u_n-u\|\le\frac{k^{2^n}}{2^n aL}$$

定理 2 の証明のため初めに幾つかの補題を準備する。

補題 1 任意の $u,v\in U$ に対し

$$\|F(u)-F(v)-F'(v)(u-v)\|\le\frac{L}{2}\|u-v\|^2$$

(証明)　左辺を

$$\begin{aligned}F(u)-F(v)-F'(v)(u-v) &= \int_0^1\frac{d}{dt}(F(v+t(u-v)))dt-F'(v)(u-v)\\ &= \int_0^1(F'(v+t(u-v))-F'(v))(u-v)dt\end{aligned}$$

と変形し仮定 (a) を用いて次の様に評価すれば良い。

$$\begin{aligned}&\|F(u)-F(v)-F'(v)(u-v)\|\\ &\le\int_0^1\|F'(v+t(u-v))-F'(v)\|_{B(X)}\|u-v\|dt\\ &\le L\int_0^1 t\|u-v\|dt\|u-v\|=\frac{L}{2}\|u-v\|^2\end{aligned}$$

補題 2　$A\in B(X)$ は有界な逆 A^{-1} を持つなら作用素ノルムに於いて $\|A-B\|<\frac{1}{\|A^{-1}\|}$ なる $B\in B(X)$ も有界な逆 B^{-1} を持ちその作用素ノルムは次の様に評価される。

$$\|B^{-1}\|\le\frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\|A-B\|}$$

(証明)　仮定より $\|A^{-1}(A-B)\|\le\|A^{-1}\|\|A-B\|<1$ なので対応するノイマン級数は収束し $B(X)$ に於いて等式

$$(I-A^{-1}(A-B))^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(A^{-1}(A-B))^n$$

が成立ち、そのノルムは

$$\|(I - A^{-1}(A - B))^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A^{-1}(A - B)\|^n \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\|\|A - B\|}$$

と評価される。等式

$$B(I - A^{-1}(A - B))^{-1}A^{-1} = (I - A^{-1}(A - B))^{-1}A^{-1}B = I$$

により B の逆は $(I - A^{-1}(A - B))^{-1}A^{-1}$ に一致しそのノルムは

$$\begin{aligned} \|B^{-1}\| &= \|(I - A^{-1}(A - B))^{-1}A^{-1}\| \\ &\leq \|(I - A^{-1}(A - B))^{-1}\|\|A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|A - B\|} \end{aligned}$$

と評価される。

補題３　任意の $u \in B(u_0, \frac{1}{aL}) \cap U$ に対し $F'(u)$ は有界な逆 $F'(u)^{-1}$ を持ちその作用素ノルムは次の評価を持つ。

$$\|F'(u)^{-1}\|_{B(X)} \leq \frac{a}{1 - aL\|u - u_0\|}$$

(証明)　補題２に於いて $A = F'(u_0),\ B = F'(u)$ と置けば

$$\|F'(u)^{-1}\|_{B(X)}\|F'(u) - F'(u_0)\|_{B(X)} \leq aL\|u - u_0\| < 1$$

となるので補題３が従う。

補題４　二次函数

$$q(t) = \frac{aL}{2}t^2 - t + b$$

に対し $t_0 = 0$ を初項とするニュートン近似列 $\{t_n\}_{n \geq 0}$ を

$$t_n = t_{n-1} - \frac{q(t_{n-1})}{q'(t_{n-1})}, \quad n \geq 1$$

で定義する。このとき次が成立つ。

(1) $\{t_n\}$ は有界な狭義単調増大列であり、$t_0 = 0, t_1 = b,$

$$\begin{aligned} &0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots < t_- = \frac{1 - \sqrt{1 - 2abL}}{aL}, \\ &\lim_{n \to \infty} t_n = t_- \end{aligned}$$

(2) 任意の $n \geq 1$ に対し

$$t_{n+1} - t_n = \frac{aL(t_n - t_{n-1})^2}{2(1 - aLt_n)} \leq \frac{b}{2^n}$$

(3) 任意の $n \geq 0$ に対し

$$t_- - t_{n+1} = \frac{aL(t_- - t_n)^2}{2(1 - aLt_n)} \leq \frac{k^{2^{n+1}}}{2^{n+1}aL}$$

(証明)　先ず $t_\pm = \frac{1\pm\sqrt{1-2abL}}{aL}$ は二次方程式 $q(t) = 0$ の根であり $0 < t_- < \frac{1}{aL} < t_+$ である事に注意する。$t_0 = 0$ であるから $t_1 = t_0 - q(t_0)/q'(t_0) = -q(0)/q'(0) = b$ となる。さて $p(t) \equiv t - \frac{q(t)}{q'(t)}$ は $p'(t) = \frac{q(t)q''(t)}{(q'(t))^2} = \frac{aLq(t)}{(aLt-1)^2}$ 故 $[0, t_-]$ 上は狭義単調増加であり不等式

$$b = p(0) \leq p(t) < p(t_-) = t_-$$

が従う。$t_0 = 0,\ t_n = p(t_{n-1}),\ n \geq 1,$ であるから数列 $\{t_n\}$ は

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots < t_-$$

を満たす。数列は $\{t_n\}$ は上に有界な単調増加列故収束列である。そこで $\lim_{n\to\infty} t_n = T$ と置くと $T \leq t_-$ となり $t_n = p(t_{n-1})$ で $n \to \infty$ とすると $T = p(T) = T - q(T)/q'(T)$ となるが $T \leq t_- < 1/(aL)$ より $q'(T) = aLT - 1 < 0$ となるので $q(T) = 0$, 即ち $T = t_-$ を得る。従って (1) を得る。さて $0 \leq s < 1/(aL)$ なる s に対し

$$\begin{aligned} t = p(s) \quad &\Leftrightarrow \quad t - s = \frac{\frac{aL}{2}s^2 - s + b}{1 - aLs} \\ &\Leftrightarrow \quad t - s - aLst + aLs^2 = \frac{aL}{2}s^2 - s + b \\ &\Leftrightarrow \quad t - b = -\frac{aL}{2}s^2 + aLts \end{aligned}$$

であるから

$$q(t) = \frac{aL}{2}t^2 - t + b = \frac{aL}{2}t^2 - \left(-\frac{aL}{2}s^2 + aLts\right) = \frac{aL}{2}(t-s)^2$$

即ち

$$q(p(s)) = \frac{aL}{2}(t-s)^2$$

が従う。この関係式を $t_{n+1} = p(t_n), t_n = p(t_{n-1})$ に適用すると

$$t_{n+1} - t_n = -\frac{q(t_n)}{q'(t_n)} = -\frac{q(p(t_{n-1}))}{aLt_n - 1} = \frac{aL(t_n - t_{n-1})^2}{2(1 - aLt_n)}$$

が従う。これより (2) の最初の等式を得る。(2) の最後の不等式を n に関する帰納法により証明しよう。$n = 1$ の場合は等式 $t_1 - t_0 = t_1 = b$ として成立する。n の場合迄成立すると仮定し $n + 1$ の場合

$$t_{n+1} - t_n \leq \frac{b}{2^n}$$

を示そう。帰納法の仮定により

$$t_n = \sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{b}{2^{j-1}} = 2b\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

を得るので $2abL < 1$ と合せて

$$1 - aLt_n \geq 1 - 2abL\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \geq 1 - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}$$

を得る。そこで (2) の最初の等式と帰納法の仮定をもう一度用いて

$$t_{n+1} - t_n = \frac{aL(t_n - t_{n-1})^2}{2(1 - aLt_n)} \leq \frac{aL(\frac{b}{2^{n-1}})^2}{2 \cdot (\frac{1}{2^n})} = \frac{ab^2L}{2^{n-1}} = (2abL)\frac{b}{2^n} \leq \frac{b}{2^n}$$

を得るので帰納法は完結し (2) が従う。(3) の最初の等式は $2b = 2t_- - aLt_-^2$ を用いて次の様に変形する事により従う：

$$\begin{aligned}
t_{n+1} &= t_n + \frac{\frac{aL}{2}t_n^2 - t_n + b}{1 - aLt_n} \\
&= \frac{2t_n(1 - aLt_n) + (aLt_n^2 - 2t_n + 2b)}{2(1 - aLt_n)} \\
&= \frac{-aLt_n^2 + 2b}{2(1 - aLt_n)} \\
&= \frac{2t_-(1 - aLt_n) - aL(t_n^2 - 2t_nt_- + t_-^2)}{2(1 - aLt_n)} = t_- - \frac{aL(t_n - t_-)^2}{2(1 - aLt_n)}
\end{aligned}$$

最後に不等式

$$t_- - t_{n+1} \leq \frac{k^{2^{n+1}}}{2^{n+1}aL}$$

を $n \geq 0$ に関する帰納法で示そう。$n = 0$ の場合

$$t_- - t_1 = \frac{aL(t_- - t_0)^2}{2(1 - aLt_0)} = \frac{aLt_-^2}{2} = \frac{(1 - \sqrt{1 - 2abL})^2}{2aL} = \frac{k^2}{2aL}$$

より等式として成立つ。$n \geq 0$ とし n の場合

$$t_- - t_n \leq \frac{k^{2^n}}{2^naL}$$

を仮定すると

$$\begin{aligned}
t_- - t_{n+1} = \frac{aL(t_- - t_n)^2}{2(1 - aLt_n)} &\leq \frac{aL}{2(1 - aLt_n)}\left(\frac{k^{2^n}}{2^naL}\right)^2 \\
&\leq \frac{aL}{2(\frac{1}{2^n})} \cdot \frac{k^{2^n}}{2^naL} \cdot \frac{k^{2^n}}{2^naL} = \frac{k^{2^n+2^n}}{aL2^{n+1}} = \frac{k^{2^{n+1}}}{aL2^{n+1}}
\end{aligned}$$

を得るので帰納法は完結し (3) が従う。

以上の準備の下に定理２を証明しよう。

定理２の証明　与えられた u_0 に対するニュートン近似列

$$u_n = u_{n-1} - F'(u_{n-1})^{-1}F(u_{n-1}), n \geq 1$$

に就いて考える。$u_1 - u_0 = -\ F'(u_0)^{-1}F(u_0)$ に仮定 (b) を用いると

$$\|u_1 - u_0\| = \|F'(u_0)^{-1}F(u_0)\| \leq b = t_1 = t_1 - t_0$$

となる。そこで一般に次の評価が成立つ事を $n \geq 1$ に関する帰納法で証明しよう：

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq t_{n+1} - t_n,$$
$$\|u_n - u_1\| \leq t_n - t_1$$

$n = 1$ の場合：$\|u_1 - u_0\| \leq t_1 < t_- < 1/(aL)$ より $u_1 \in B(u_0, t_1) \subset U$ であるので $F'(u_1)^{-1} \in B(X)$ であり、その作用素ノルムは補題３より

$$\|F'(u_1)^{-1}\|_{B(X)} \leq \frac{a}{1 - aL\|u_1 - u_0\|} \leq \frac{a}{1 - aLt_1}$$

と評価される。また

$$u_1 = u_0 - F'(u_0)^{-1}F(u_0) \Leftrightarrow F(u_0) = -\ F'(u_0)(u_1 - u_0)$$

より

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= -\ F'(u_1)^{-1}F(u_1) \\ &= -\ F'(u_1)^{-1}(F(u_1) - F(u_0) - F'(u_0)(u_1 - u_0)) \end{aligned}$$

となる。これより $F'(u_1)^{-1}$ の評価と補題１と４を用いて

$$\begin{aligned} \|u_2 - u_1\| &\leq \|F'(u_1)^{-1}\|_{B(X)}\|F(u_1) - F(u_0) - F'(u_0)(u_1 - u_0)\| \\ &\leq \frac{a}{1 - aLt_1} \cdot \frac{L}{2}\|u_1 - u_0\|^2 \\ &\leq \frac{a}{1 - aLt_1} \cdot \frac{L}{2}(t_1 - t_0)^2 = \frac{aL(t_1 - t_0)^2}{2(1 - aLt_1)} = t_2 - t_1 \end{aligned}$$

を得るので $n = 1$ の場合が従う。

$n - 1$ の場合から n の場合を導く事：$n \geq 2$ とし $1 \leq j \leq n - 1$ なる全ての j に対し

$$\|u_{j+1} - u_j\| \leq t_{j+1} - t_j,$$
$$\|u_j - u_1\| \leq t_j - t_1$$

が成立すると仮定し

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq t_{n+1} - t_n,$$
$$\|u_n - u_1\| \leq t_n - t_1$$

を証明しよう。

仮定より

$$\|u_n - u_1\| \leq \sum_{j=1}^{n-1} \|u_{j+1} - u_j\| \leq \sum_{j=1}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) = t_n - t_1,$$

従って

$$\begin{aligned} \|u_n - u_0\| &\leq \|u_n - u_1\| + \|u_1 - u_0\| \\ &\leq (t_n - t_1) + t_1 = t_n < t_- < 1/(aL) \end{aligned}$$

となるので $u_n \in B(u_0, t_-) \subset U$ である。補題 3 より $F'(u_n)$ は有界な逆 $F'(u_n)^{-1}$ を持ち、その作用素ノルムは

$$\|F'(u_n)^{-1}\|_{B(X)} \leq \frac{a}{1 - aL\|u_n - u_0\|} \leq \frac{a}{1 - aLt_n}$$

と評価される。また

$$u_n = u_{n-1} - F'(u_{n-1})^{-1} F(u_{n-1}) \Leftrightarrow F(u_{n-1}) = -\ F'(u_{n-1})(u_n - u_{n-1})$$

より

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -\ F'(u_n)^{-1} F(u_n) \\ &= -\ F'(u_n)^{-1} (F(u_n) - F(u_{n-1}) - F'(u_{n-1})(u_n - u_{n-1})) \end{aligned}$$

を得る。従って $F'(u_n)^{-1}$ の評価と補題 1 と 4 を用いて

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\| &\leq \|F'(u_n)^{-1}\|_{B(X)} \|F(u_n) - F(u_{n-1}) - F'(u_{n-1})(u_n - u_{n-1})\| \\ &\leq \frac{a}{1 - aLt_n} \cdot \frac{L}{2} \|u_n - u_{n-1}\|^2 \\ &\leq \frac{a}{1 - aLt_n} \cdot \frac{L}{2} (t_n - t_{n-1})^2 = \frac{aL(t_n - t_{n-1})^2}{2(1 - aLt_n)} = t_{n+1} - t_n \end{aligned}$$

を得る。以上が示すべき事であった。

解の存在の証明　任意の $n \geq 1$ に対して

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq t_{n+1} - t_n,$$
$$\|u_n - u_1\| \leq t_n - t_1$$

が成立つので $m > n \geq 1$ なる任意の m, n に対し

$$\|u_m - u_n\| \leq \sum_{j=n}^{m-1} \|u_{j+1} - u_j\| \leq \sum_{j=n}^{m-1} (t_{j+1} - t_j) = t_m - t_n$$

となる。補題 4 によって $m > n \to \infty$ なるとき右辺は 0 に収束するので点列 $\{u_n\}$ は X のコーシー列となり収束する。その極限を u^* と表す。上の不等式で $m \to \infty$ とすると

$$\|u^* - u_n\| \leq t_- - t_n$$

となる。$u_n \in B(u_0,t_-) \subset U$ より $u^* \in \overline{B(u_0,t_-)} \subset U$ である。等式

$$F(u_n) = -F'(u_n)(u_{n+1}-u_n)$$

を用いて

$$\begin{aligned}\|F(u_n)\| &\leq \|F'(u_n)\|_{B(X)}\|u_{n+1}-u_n\| \\ &\leq \sup_{\|v-u_0\|\leq t_-}\|F'(v)\|_{B(X)}\cdot(\|u_{n+1}-u^*\|+\|u^*-u_n\|) \\ &\leq (\|F'(u_0)\|+Lt_-)(\|u_{n+1}-u^*\|+\|u^*-u_n\|)\end{aligned}$$

と評価すると $n\to\infty$ のとき最右辺は 0 に収束するので F の連続性により $F(u^*)=0$ を得る。

解の一意性の証明　写像 $G:\overline{B(u_0,t_-)}\to X$ を

$$G(u) = u - F'(u_0)^{-1}F(u)$$

で定める。このとき

$$\begin{aligned}G(u)-u_0 &= u-u_0-F'(u_0)^{-1}F(u) \\ &= F'(u_0)^{-1}(F'(u_0)(u-u_0)-F(u)+F(u_0)) \\ &\quad -F'(u_0)^{-1}F(u_0)\end{aligned}$$

に補題 1 を適用し仮定 (b) を用いると

$$\|G(u)-u_0\| \leq \frac{aL}{2}\|u-u_0\|^2+b$$

となる。$u\in\overline{B(u_0,t_-)}$ より右辺は $\frac{aL}{2}t_-^2+b=t_-$ で評価されるので G は $\overline{B(u_0,t_-)}$ からそれ自身への写像となる。G の u に於ける微分は $G'(u)=F'(u_0)^{-1}(F'(u_0)-F'(u))$ と表されるので $u,v\in\overline{B(u_0,t_-)}$ に対し

$$\begin{aligned}&\|G(u)-G(v)\| \leq \int_0^1\|G'(v+t(u-v))\|_{B(X)}dt\|u-v\| \\ &\leq a\int_0^1\|F'(u_0)-F'(v+t(u-v))\|_{B(X)}dt\|u-v\| \\ &\leq aL\int_0^1\|v+t(u-v)-u_0\|dt\|u-v\| \\ &= aL\int_0^1\|(1-t)(v-u_0)+t(u-u_0)\|dt\|u-v\| \\ &\leq \frac{aL}{2}(\|v-u_0\|+\|u-u_0\|)\|u-v\| \leq aLt_-\|u-v\|\end{aligned}$$

を得る。$aLt_-=1-\sqrt{1-2abL}<1$ より G は $\overline{B(u_0,t_-)}$ に於ける縮小写像となり $\overline{B(u_0,t_-)}$ に一意的な不動点を持つ。

$$G(u)=u \Leftrightarrow F(u)=0$$

よりその不動点は u^* に一致する。G の不動点の一意性より $F(u)=0$ の解の一意性が従う。

ニュートン近似列の収束率の証明　解の存在証明で得られた不等式

$$\|u^* - u_n\| \leq t - t_n$$

に補題４を用いれば良い。

定理２の解の存在と一意性の証明には上記 G についての性質を用いれば充分であるが対応する逐次近似列の収束率はバナッハの不動点定理と同様になる。ニュートンの逐次近似列の収束率は

$$\begin{aligned}\frac{k^{2^n}}{2^n aL} &= \frac{1}{aL}\exp(2^n \log k - n\log 2) \\ &= \frac{1}{aL}\exp\left(-\left(\log\frac{1}{k}\right)\exp((\log 2)n) - (\log 2)n\right)\end{aligned}$$

と表され $\log(1/k) > 0$ なので二重指数函数減衰を示している。

参考文献：
S. Lang, Analysis I, Addison-Wesley
E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications I, Springer
コルモゴロフ, フォミーン, 函数解析の基礎, 下, 岩波書店