微分方程式から観た微分積分学

小澤　徹

基礎的な物理法則は 2 階までの (偏) 微分方程式で表される。従って微分方程式の解析は物理現象の本質的理解のため必要不可欠である。微分方程式は物理現象に限らず経済モデル、生態系モデル、進化論の記述まで実に幅広く用いられる。しかしそれらの解説は本稿の目的ではない。

微分積分学の枠組の中で典型的な例を挙げ、一定の法則を満たす函数を微分方程式の立場から論じることにより、微分積分学の理解を一層深めるとともに、その先にある数学の考え方の一端を紹介することを本稿の目的とする。

1. 微分方程式から観た指数函数

まず指数函数は知らないものとして議論を始める。その代わりに指数函数の性質のうち最も重要と思われる**指数法則**を議論の出発点としよう。

定義　函数 $e:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が**指数法則**を満たすとは任意の $t,s\in\mathbb{R}$ に対し等式

$$e(t+s)=e(t)e(s) \tag{E}$$

が成立つことと定義する。

指数法則を満たす恒等的に零でない実数値函数 e は正値であり $(e(t)>0)$ 原点において 1 を取る $(e(0)=1)$。実際任意の t に対し $e(t)=e(\frac{t}{2}+\frac{t}{2})=e(\frac{t}{2})^2\geq 0$ であり $e(t_0)=0$ なる t_0 が存在すれば $e(t)=e(t_0)e(t-t_0)=0$ となってしまうので e は零点を持たず正値であり $e(0)=e(0)^2$ より $e(0)=1$ となる。指数法則は、実数全体 $\mathbb{R}$ の成す加法群から正の実数全体 $\mathbb{R}_{>0}=(0,\infty)$ の成す乗法群への準同型写像の存在を主張するものである。二項演算としての和と積との関係を可換図式を用いて表したものが図 1 である。

図1

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\times\mathbb{R} \arrow[rrr, "e\times e"] \arrow[ddd, "+"'] \arrow[dr, phantom, "\ni"] & & & \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}_{>0} \arrow[ddd, "\bullet"] \arrow[dl, phantom, "\in"] \\
& (t,s) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (e(t),e(s)) \arrow[d, mapsto] & \\
& t+s \arrow[r, mapsto] & e(t+s)=e(t)e(s) & \\
\mathbb{R} \arrow[rrr, "e"'] \arrow[ur, phantom, "\ni"] & & & \mathbb{R}_{>0} \arrow[ul, phantom, "\in"]
\end{tikzcd}$$

指数法則により函数の滑らかさは一点に於いて決定されてしまう。例えば $e(t+h)-e(t)=e(t)(e(h)-e(0))$ と表してみれば分かるように、連続性や微分可能性といった性質は原点に於ける仮定が $\mathbb{R}$ 全体を支配する。以下では原点 (従って $\mathbb{R}$ 全体) での連続性を仮定する。

指数法則に従う函数の満たす微分方程式を導出しよう。e は連続で $e(0)=1$ であるから $\int_0^\delta e(s)ds>0$ となる $\delta>0$ を取ることができる。$C_\delta=\int_0^\delta e(s)ds$ とおくと指数法則により

$$e(t)=C_\delta^{-1}e(t)\int_0^\delta e(s)ds=C_\delta^{-1}\int_0^\delta e(t+s)ds=C_\delta^{-1}\int_t^{t+\delta}e(t')dt'$$

となるから e は連続微分可能となる。そこで (E) の両辺を t で微分し $s=0$ とすれば微分方程式 $e'(t)=e'(0)e(t)$ が得られる。

そこで次の問題を考える：

$\lambda\in\mathbb{R}$ 及び $\mu\in\mathbb{R}_{>0}$ に対し微分方程式の初期値問題

(D)
$$\begin{cases} e'(t)=\lambda e(t), & t\in\mathbb{R} \\ e(0)=\mu \end{cases}$$

を満たす連続微分可能な函数 $e:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の存在と一意性を証明せよ。

微分積分の基本定理によれば、この問題は次と同値である：

$\lambda\in\mathbb{R}$ 及び $\mu\in\mathbb{R}_{>0}$ に対し積分方程式

(I)
$$e(t)=\mu+\lambda\int_0^t e(s)ds,\quad t\in\mathbb{R}$$

を満たす連続函数 $e:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の存在と一意性を証明せよ。

これは積分作用素 $e\mapsto\mu+\lambda\int_0^t e(s)ds$ の不動点の存在と一意性の問題といっても同じである。

ここでは逐次近似法で (I) の解を構成しよう：

$$e_0(t)=\mu,\quad e_n(t)=\mu+\lambda\int_0^t e_{n-1}(s)ds,\quad n\geq 1$$

と順々に函数の列 $\{e_n;n\geq 0\}$ を定める。具体的に計算して

$$e_n(t)=\mu\sum_{j=0}^{n}\frac{\lambda^j}{j!}t^j$$

を得る。積分方程式 (I) の解は近似列 $\{e_n\}$ の極限

$$e(t)=\lim_{n\to\infty}e_n(t)=\mu\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}t^j$$

として表されるものである (この極限の存在は実数の完備性によって保障される)。この右辺の無限級数、より詳しくは変数 t についての冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}t^n$ を指数函数 $\exp(\lambda t)$ の定義とする教科書も多い。積分方程式 (I) の解の一意性を証明しよう。もう一つの解 $\tilde{e}$ があったとして $f(t)=|e(t)-\tilde{e}(t)|$ を考えると f は積分不等式

$$0\leq f(t)\leq|\lambda|\left|\int_0^t f(s)ds\right|$$

を満たす。有界閉区間 $I=[-T,T]$ 上の f の最大値を M とすれば帰納的に

$$0\leq f(t)\leq M\frac{|\lambda|^n}{n!}|t|^n$$

なる I 上の評価が得られる。$n\to\infty$ とすれば f は I 上零であることが分かり T は任意であったから (I) の解の一意性が従う。

さて、こうして得られた (I) の解が指数法則 (E) を満たすことは、冪級数表示から直接示すこともできるが、ここでは (D) の解の一意性を用いることにしよう。$s \in \mathbb{R}$ に対し函数 $t \mapsto e(t+s)$ は微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e(t+s) =& \lambda e(t+s) \\ e(t+s)|_{t=0} =& e(s) \end{aligned}$$

を満たす。一方 $t \mapsto e(t)e(s)$ も同じ微分方程式を満たす。これは (D) に於いて $\mu = e(s) > 0$ としたものである。(D) の解の一意性より両者は同じものである。即ち (E) が成立つ。

2. 高次元化

前節の内容は容易に高次元化される。乗法群として n 次正方行列全体の成す集合 $M(n;\mathbb{R})$ を考えよう。

定義　写像 $e : \mathbb{R} \to M(n;\mathbb{R})$ が**指数法則**を満たすとは任意の $t, s \in \mathbb{R}$ に対し等式

$$e(t+s) = e(t)e(s) \tag{E}$$

が成立つことと定義する。

指数法則を満たす写像 $e : \mathbb{R} \to M(n;\mathbb{R})$ でその行列式が恒等的に零でないものは、正の行列式を持つ正則行列を与え、特に原点において単位行列を与える。実際任意の t に対し $\det e(t) = \det(e(\frac{t}{2})e(\frac{t}{2})) = (\det e(\frac{t}{2}))^2 \geq 0$ であり $\det e(t_0) = 0$ なる t_0 が存在すれば $\det e(t) = \det e(t_0) \det e(t - t_0) = 0$ となってしまうので常に $\det e(t) > 0$ であり $e(0) = e(0)^2$ より $e(0) = I$ となる。指数法則は、実数全体 $\mathbb{R}$ の成す加法群から正の行列式を持つ正則行列

$$GL_+(n;\mathbb{R}) = \{A \in M(n;\mathbb{R});\ \det A > 0\}$$

の成す乗法群への準同型写像の存在を主張するものである。これを可換図式で表したものが図 2 である。

図2

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\times\mathbb{R} \arrow[rrr, "e\times e"] \arrow[ddd, "+"'] & & & GL_+(n;\mathbb{R})\times GL_+(n;\mathbb{R}) \arrow[ddd, "\bullet"] \\
& (t,s) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] \arrow[ul, phantom, "\ni"] & (e(t),e(s)) \arrow[d, mapsto] \arrow[ur, phantom, "\in"] & \\
& t+s \arrow[r, mapsto] \arrow[dl, phantom, "\ni"] & e(t+s)=e(t)e(s) \arrow[dr, phantom, "\in"] & \\
\mathbb{R} \arrow[rrr, "e"'] & & & GL_+(n;\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{R}^n$ には n 次元ユークリッド・ノルム、$M(n;\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ には n^2 次元ユークリッド・ノルムを導入することによって $e : \mathbb{R} \to M(n;\mathbb{R})$ の連続性、微分可能性、リーマン可積分性の概念が定義される。前節と同様指数法則を満たす写像 e の原点での連続性から $\mathbb{R}$ 全体での連続微分可能性及び微分方程式 $e'(t) = e'(0)e(t)$ が得られる。そこで次の問題を考える：

$A \in M(n;\mathbb{R})$ 及び $B \in GL_+(n;\mathbb{R})$ に対し微分方程式の初期値問題

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} e'(t) = Ae(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ e(0) = B \end{cases}$$

を満たす連続微分可能な写像 $e : \mathbb{R} \to M(n;\mathbb{R})$ の存在と一意性を証明せよ。

この問題は次と同値である。

$A \in M(n;\mathbb{R})$ 及び $B \in GL_+(n;\mathbb{R})$ に対し積分方程式

$$\text{(I)} \qquad e(t) = B + A\int_0^t e(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

を満たす連続写像 $e : \mathbb{R} \to M(n;\mathbb{R})$ の存在と一意性を証明せよ。

逐次近似法により (I) の解を構成しよう：

$$e_0(t) = B, \quad e_n(t) = B + A\int_0^t e_{n-1}(s)ds, \quad n \geq 1$$

と順々に写像の列 $\{e_n; n \geq 0\}$ を定める。具体的に計算して

$$e_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!} A^j B$$

を得る。積分方程式 (I) の解は近似列 $\{e_n\}$ の極限

$$e(t) = \lim_{n\to\infty} e_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j B$$

として表されるものである (この極限は $M(n;\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ の完備性によって保障される。) この右辺の無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$ を行列 A による指数函数 $\exp(tA)$ の定義とする教科書も多い。積分方程式 (I) の解の一意性及び上記表示の e が指数法則 (E) を満たすことの証明は前節と同様である。

3. 二階線型微分方程式

この節では二階の微分方程式の中でも最も単純な形を取る

$$\begin{cases} x''(t) = \lambda x(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0, \qquad x'(0) = x_1 \end{cases}$$

を考えよう。λ は零でない実数とする。このとき

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ \lambda x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

と表されるので

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad B = I$$

とすれば

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \exp(tA)\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

が解となる。$n \geq 0$ に対し

$$A^{2n} = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix},\ A^{2n+1} = \lambda^n A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^n \\ \lambda^{n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

となるから

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} A^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\ A^{2n+1} \right) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(2n)!}\ t^{2n} & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(2n+1)!}\ t^{2n+1} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{(2n+1)!}\ t^{2n+1} & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(2n)!}\ t^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と表すことができる。$\lambda = -1$ 及び $\lambda = 1$ の場合それぞれ

$$\exp\left(t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$
$$\exp\left(t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cosh\ t & \sinh\ t \\ \sinh\ t & \cosh\ t \end{pmatrix}$$

となる。これらの指数写像に関する指数法則は 2 次行列の等式を与え、成分毎では三角函数、双曲線函数の加法公式となっている。

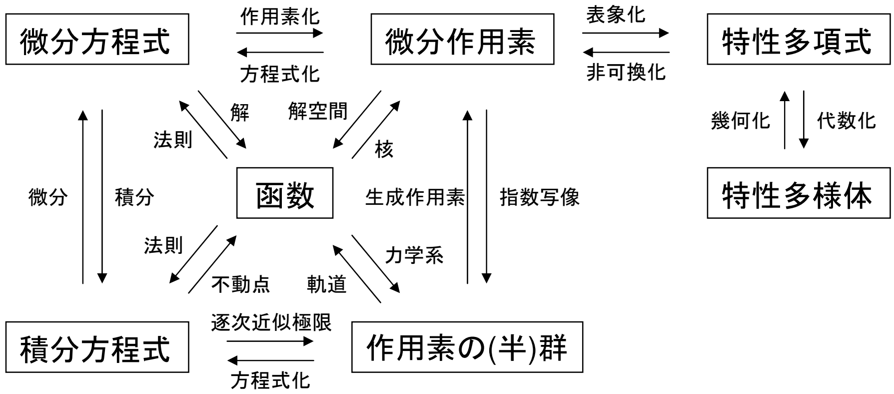
4. 無限次元化

第 3 節では n 次元の問題を考えたが $\mathbb{R}^n$ をバナッハ空間 (完備ノルム空間) に一般化した理論もあり作用素の (半) 群理論と呼ばれている。$\mathbb{R}^n$ の代わりに $\mathbb{R}^n$ 上の函数の成すバナッハ空間、n 次正方行列の代わりに (偏) 微分作用素を考えるのは典型的な例である。しかし微分作用素は有界とはならないので指数写像も無限級数で表す訳にはいかない。そこで非有界作用素を有界作用素で近似する吉田正則化 (吉田近似) を施し、有界作用素の無限級数としての指数写像を近似列として、非有界作用素に対する指数写像を構成する方法を取る。これを半群の生成に関する吉田理論といい函数解析はもとより確率論、偏微分方程式、量子物理に多大な影響をもたらした。

5. まとめ

函数の満たす諸法則は微分方程式を規定し、微分方程式は解として函数を規定する。初等函数や特殊函数はその良い例である。最後に大雑把な概念図を描いておこう。但しこの図式がいつも有効とは限らないので注意を要する。微分作用素と特性多項式、特性多様体との関係についての説明は省略する。

図3



参考文献

[1] 黒田成俊、関数解析、共立出版

[2] 杉浦光夫、解析入門 I,II, 東京大学出版会

[3] 高橋陽一郎、微分方程式入門、東京大学出版会

[4] G.B. Folland, *Real Analysis*, Pure and Applied Mathematics.