見えないものを数学的に表現する

数理物理学・非線型偏微分方程式研究　小澤　徹

　ほとんど全ての物理現象は微分方程式としてモデル化・抽象化されます。
しかし「シュレディンガー方程式、ディラック方程式、ナビエ・ストークス方程式などの物理学的に由緒正しい方程式には解が在って当たり前か？」となると、話はそう単純ではありません。物理現象を記述しているのは方程式の「解」であって「方程式そのもの」ではありません。「方程式そのもの」は書き下した瞬間「存在する」と言えるのでしょうが、方程式の「解の存在」は全く次元の異なる話題となります。また、「解の公式・具体的表示」と「解の存在」とは異なる概念です。後者は前者よりも広い意味を持っています。例えば、複素函数論で「複素係数の $n(\geq 1)$次方程式は重複を許して丁度 n 個の根を持つ」というガウスの代数学の基本定理を学びますが、これは「５次以上の方程式は代数的には解けない」というアーベル・ガロアの理論と何ら矛盾するものではありません。
さて、それでは「解の存在」とは何を意味するものなのでしょうか？そのためには、まず「解の概念」を明確に定義し、その上で「解の存在証明」を与える事が必要です。では何をもって「存在する」事を証明すれば良いのでしょうか？我々はその手段を解析学、特に函数解析学、調和解析学に求めます。そうなると、元来物理学から現れた偏微分方程式といえども、数学的対象として考える限り、徹頭徹尾数学的に扱わねばなりません。物理学的直感は役に立つ事もありますが、それを的確な数学的表現に置き換える作業が求められます。その様な思考過程の修業を経て初めて、物理現象の「数学的実在」が実感できるようになります。「数学的実在」とは目に見えないものですが、確かに実感できるものであり、数式などの記号を用いて自由に表現する事のできるものです。それは同時に、自分の個性の表現でもあり、自己の実現・実在を強烈に感じる機会を与えてくれるものです。小澤研究室は、物理と数学が交錯する場であると共に、志の高い人間の思考が相互作用し、世界の最先端の成果を発信する数理物理学道場を目指しています。
　最後に現在取組んでいる課題と、対応する物理・応用物理の分野を並べて紹介します。

非線型双曲型方程式の研究	プラズマ物理、相対論、場の理論
非線型分散型方程式の研究	光通信工学、量子力学、場の理論
非線型楕円型方程式の研究	画像工学、材料工学、場の理論
流体力学の数学的基礎の研究	流体力学、連続体力学