

まえがき

電磁場や物質場をはじめとする**古典場** (classical fields) の記述の多くは時空上の偏微分方程式の形を取っている。場と粒子との間の相互作用や場と媒質との間の相互作用は非線形項として方程式に現れる。このような事情で、多くの古典場は非線形偏微分方程式で表される。ここで古典場とは量子化されていない場を意味するが、量子場の理解に古典模型は不可欠である。実際、場の量子論の入門書は場の古典論から始まる。

本書は、半線形クライン・ゴールドン方程式、半線形波動方程式、および準線形波動方程式を中心として、場の古典論に現れる双曲型非線形偏微分方程式の数学解析の方法論を解説したものである。これらの双曲型非線形偏微方程式に加え、非線形シュレディンガー方程式をはじめとする分散型非線形偏微分方程式は、通常まとめて「非線形波動方程式」と称される。「非線形波動方程式」が研究対象として現代的に取り上げられたのは K. Jörgens [37] や I. E. Segal [51] の論文が公表された 1960 年代初頭に遡る。どちらも共通の半線形クライン・ゴールドン方程式の初期値問題の時間大域解の存在を論じており、Jörgens は L. I. Schiff の非線形中間子論 [50] を研究対象とし、Segal は相対論的非線形場の最単純模型として取り上げている。以来、約 60 年が経過し、この研究分野は解析学および数理物理学の中で存在感をもつ大きな分野に成長し、国内外に多数の研究者を抱えている。また、その過程において、関数解析、調和解析、実解析、変分解析、確率解析、幾何解析の手法が導入される一方、これらの分野に新しい問題を提供し続ける等、良好な相互作用を通じて発展して

きた経緯をもつ。本書の目的は、場の古典論に現れる非線形偏微分方程式を対象として、さまざまな数学的接近法を紹介し、その豊かな数学的構造を解き明かして行くことである。その方法は解析学に留まらず、代数学や幾何学も一部で用いる。物理学に登場する概念を明確に説明するため、一部標準的でない記法を用いた所もある。

本書の内容を簡単に述べる。第1章では、空間一次元の波動方程式を導出した。初等的な幾何学的考察による導出と、連成振動の大自由度極限による導出について説明した。後者では初等力学的考察を用いた。

第2章では、線形波動方程式の解析に関して解説した。伝統的な特性曲線法を発展方程式の枠組で定式化した。空間三次元の自由波を一次元的手法で解析する方法は良く知られた所であるが、球面平均作用素やラドン変換を強調して記述した。光円錐に載っているディラック分布と基本解の関係にも触れた。

第3章では、場の古典論の基礎を成す「対称性と不変性」について、時空に作用する運動群の特徴付けから始めてネーター原理まで解説した。その過程で、解析力学、電磁気学、量子力学にも触れた。

第4章では、半線形クライン・ゴールドン方程式の初期値問題の古典とも云うべき論文 [36, 37, 57] の解説である。現代的で統一的な解説となるよう試みたため、原著と異なる所がある。

第5章では、準線形波動方程式の初期値問題を古典解の枠組で論じた。

本書の内容は早稲田大学 先進理工学部 物理学科・応用物理学科、同大学院 先進理工学研究科 物理学及応用物理学専攻、基幹理工学研究科 数学応用数理解専攻、北海道大学 大学院 理学研究科 数学専攻、東京大学 大学院数理学研究科、ピサ大学数学科における講義に基づくものであり、学部3年程度の数学および物理学を予備知識として持つ読者を想定している。

本書の執筆の機会を与えて下さった編者の谷島賢二先生、原稿を熟読され貴重な指摘を下された久保英夫 北海道大学教授と深谷法良 早稲田大学次席研究員、編集にご尽力された大越隆道様に、この場を借りて厚く御礼申し上げる。

2025年5月

小澤 徹