リースの表現定理とラックス・ミルグラムの定理

平成 19 年 11 月
平成 21 年 12 月改訂
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

H を複素ヒルベルト空間、$(\cdot|\cdot)$ をその内積、$\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot|\cdot)}$ をノルムとする。H 上の一次半形式 (sequilinear form) とは $H \times H$ から $\mathbb{C}$ への写像で、第一変数に関し線型で第二変数に関し反線型であるものを謂う。

定義　一次半形式 $a : H \times H \to \mathbb{C}$ に対し

(1) a は有界 (bounded)

$\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\exists\, C > 0 : \forall u, v \in H,\ |a(u,v)| \le C\|u\|\|v\|$

(2) a は強圧的 (coercive)

$\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\exists\, \delta > 0 : \forall u \in H,\ \mathrm{Re}\ a(u,u) \ge \delta\|u\|^2$

(3) a はエルミット対称 (Hermitian)

$\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\overline{a(u,v)} = a(v,u)$

註１. 内積は有界で強圧的でエルミット対称な一次半形式である。$C = \delta = 1$ と取れば良い。

註２. 一次半形式は有界かつ強圧的なら $C \ge \delta > 0$ なる関係が成り立つ。

註３. 一次半形式はエルミット対称ならば $a(u,u)$ は実数値である。

定理　H' を H の双対空間とする。このとき次は同値である。

(1) **（リースの表現定理）**任意の $f \in H'$ に対し $u \in H$ が唯一つ存在し、任意の $v \in H$ に対して

$$(v|u) = f(v)$$

が成立する。

(2) **（ラックス・ミルグラムの定理その 1）** H 上の任意の有界強圧的一次半形式 a 及び任意の $f \in H'$ に対し $u \in H$ が唯一つ存在し、任意の $v \in H$ に対して

$$a(v,u) = f(v)$$

が成立する。

(3) **（ラックス・ミルグラムの定理その 2）** H 上の任意の有界強圧的エルミット対称一次半形式 a 及び任意の $f \in H'$ に対し $u \in H$ が唯一つ存在し、任意の $v \in H$ に対し

$$a(v,u) = f(v)$$

が成立する。

(4) **（ディリクレの原理）** H 上の任意の有界強圧的エルミット対称一次半形式 a 及び任意の $f \in H'$ に対し $u \in H$ が唯一つ存在して

$$\inf\{\frac{1}{2}a(v,v) - \mathrm{Re}\ f(v); v \in H\} = \frac{1}{2}a(u,u) - \mathrm{Re}f(u)$$

が成立する。更に

$$a(u,u) = \mathrm{Re}f(u)$$

が成立する。

(5) **（直交分解）** H の任意の閉部分空間 M は直交補空間 $M^\perp$ とともに H の直交分解を与える：

$$H = M \oplus M^\perp$$

（証明）　(1) ⇒ (2)：　$u \in H$ を与えて線型汎函数 $H \ni v \mapsto a(v,u) \in \mathbb{C}$ を考える。これは有界でそのノルムは $C\|u\|$ 以下となる。(1) により、u によって一意的に定まる元 $Au \in H$ があって

$$a(v,u) = (v|Au) \ \ \forall v \in H$$

が成り立つ。

写像 $u \mapsto Au$ は線型なること：　$u, u' \in H,\ z, z' \in \mathbb{C}$ に対し $A(zu + z'u') = zAu + z'Au'$ を示せば良い。u 及び u' によって一意的に定まる $Au, Au' \in H$ は

$$\begin{aligned} a(v,u) &= (v|Au) \qquad \forall v \in H \\ a(v,u') &= (v|Au') \qquad \forall v \in H \end{aligned}$$

を満たす。一方 $zu + z'u' \in H$ によって一意的に定まる $A(zu + z'u') \in H$ は

$$a(v, zu + z'u') = (v|A(zu + z'u'))\ \forall v \in H$$

を満たす。内積と a の第二変数に関する反線型性により

$$\begin{aligned} (v|zAu + z'Au') &= \bar{z}(v, Au) + \overline{z'}(v, Au') \\ &= \bar{z}a(v,u) + \overline{z'}a(v,u') \\ &= a(v, zu + z'u') \\ &= (v|A(zu + z'u')) \end{aligned}$$

が任意の $v \in H$ に対して成り立つ。これより A の線型性が従う。

線型写像 A は有界で $\|A\| \leq C$ なること：

$$\|Av\|^2 = (Av|Av) = a(Av, v) \leq C\|Av\|\|v\| \quad \forall v \in H$$

であるから

$$\|Av\| \leq C\|v\| \ \ \forall v \in H$$

が従う。

さて、与えられた $f \in H'$ に対し、(1) により $w \in H$ が唯一つ存在して

$$(v|w) = f(v) \ \forall v \in H$$

が成り立つ。そこで A が全単射である事を示せば f から w が定まり、w から $Au = w$ なる u が一意的に定まり

$$a(v, u) = (v|Au) = (v|w) = f(v) \quad \forall v \in H$$

が成り立つ事になり (2) が従う。よって「任意の $w \in H$ に対し $Au = w$ なる $u \in H$ が唯一つ定まる」事を示せば良い。これは次と同値である：

$$\exists t > 0 : \forall w \in H \ \exists 1 u \in H : u = u - t(Au - w)$$

これは H 上の写像 $\Phi_t : H \ni u \mapsto u - t(Au - w) \in H$ の不動点の一意的存在を主張するものであるから Φ_t が縮小写像である事を示せば充分である。さて $u, u' \in H$ に対し

$$\begin{aligned}
\|\Phi_t(u) - \Phi_t(u')\|^2 &= \|(u - u') - tA(u - u')\|^2 \\
&= \|u - u'\|^2 - 2t\mathrm{Re}(u - u'|A(u - u')) + t^2\|A(u - u')\|^2 \\
&= \|u - u'\|^2 - 2t\mathrm{Re}\ a(u - u', u - u') + t^2\|A(u - u')\|^2 \\
&\leq (1 - 2t\delta + t^2C^2)\|u - u'\|^2
\end{aligned}$$

であるから $-2t\delta + t^2C^2 < 0$ 即ち $0 < t < 2\delta/C^2$ と取れば Φ_t は H 上の縮小写像となり唯一つの不動点 u を持つ。この u が求めるものである。

(2) $\Rightarrow$ (3)： (3) は (2) の特別な場合である。
(3) $\Rightarrow$ (1)： 上記註 1 より (1) は (3) の特別な場合である。
(3) $\Rightarrow$ (4)： $u, v \in H$ に対し

$$\langle u|v\rangle \ = a(u, v)$$

と定めると a は有界強圧的エルミット対称一次半形式なので $\langle\cdot|\cdot\rangle$ は H 上の内積となり $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot|\cdot)}$ と同値なノルム $\sqrt{\langle\cdot|\cdot\rangle}$ を与える。H に内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を与えたヒルベルト空間を H_a と表すことにする。f は H 上の有界線型汎函数であり $\|\cdot\|$ と $\sqrt{\langle\cdot|\cdot\rangle}$ とは同値であるから f は H_a 上の有界線型汎函数となる。(3) の特別な場合である (1) より $u \in H_a$ が一意的に存在して

$$f(v) = \langle v|u\rangle \quad \forall v \in H_a$$

が成立つ。このとき任意の $v \in H_a$ に対し

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle v-u|v-u\rangle &= \langle v|v\rangle - \langle v|u\rangle - \langle u|v\rangle + \langle u|u\rangle \\ &= a(v,v) - 2\mathrm{Re}f(v) + \langle u|u\rangle \end{aligned}$$

即ち等式

$$\frac{1}{2}a(v,v) - \mathrm{Re}f(v) = \frac{1}{2}\langle v-u|v-u\rangle - \frac{1}{2}\langle u|u\rangle$$

が成立つ。この右辺は $v = u$ の時に限り最小値を取り、その値は

$$-\frac{1}{2}\langle u|u\rangle = -\frac{1}{2}a(u,u)$$

に等しい。このとき左辺は $\frac{1}{2}a(u,u) - \mathrm{Re}f(u)$ なので $a(u,u) = \mathrm{Re}f(u)$ が従う。

(4) ⇒ (5) : $u \in H$ を一つ与える。任意の $v \in M$ に対し

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\mathrm{Re}(v|u) + \|v\|^2$$

となる。そこで $v, w \in H$ に対し

$$\begin{aligned} a(v,w) &= (v|w) \\ f(v) &= (v|u) \end{aligned}$$

とすると

$$|a(v,w)| \leq \|v\|\|w\|$$

$$a(v,v) = \|v\|^2$$

$$|f(v)| \leq \|v\|\|u\|$$

となるので a は有界強圧的エルミット対称一次半形式で $f \in H'$ となる。M は閉部分空間故それ自身ヒルベルト空間と見做せる。このとき a は M 上の有界強圧的エルミット対称一次半形式、$f \in M'$ と考えることができ (4) より

$$\inf\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \mathrm{Re}f(v); v \in M\right\}$$

の最小化を与える $v_0 \in M$ が唯一つ存在する：

$$\min\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \mathrm{Re}f(v); v \in M\right\} = \frac{1}{2}a(v_0,v_0) - \mathrm{Re}f(v_0)$$

このとき

$$\min\left\{\frac{1}{2}\|v\|^2 - \mathrm{Re}(v|u); v \in M\right\} = \frac{1}{2}\|v_0\|^2 - \mathrm{Re}(v_0|u)$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\min\{\|u-v\|^2; v \in M\} \\
&= \|u\|^2 + 2\min\left\{\frac{1}{2}\|v\|^2 - \mathrm{Re}(v|u); v \in M\right\} \\
&= \|u\|^2 + 2\left(\frac{1}{2}\|v_0\|^2 - \mathrm{Re}(v_0|u)\right) \\
&= \|u-v_0\|^2
\end{aligned}$$

となる。この $v_0 \in M$ に対し $u - v_0 \in M^\perp$ を示せば良い。$u - v_0 = 0$ なら $0 \in M^\perp$ なので $u - v_0 \neq 0$ の場合を考えよう。任意の $w \in M \setminus \{0\}$, $t \in \mathbb{R}$ に対し $v_0 + tw \in M$ なので

$$\|u-v_0\|^2 \leq \|u-v_0-tw\|^2$$

となるが右辺は

$$\|u-v_0-tw\|^2 = \|u-v_0\|^2 - 2t\mathrm{Re}(u-v_0|w) + t^2\|w\|^2$$

となるので $t > 0$ に対し

$$2\mathrm{Re}(u-v_0|w) \leq t\|w\|^2$$

が従う。これより任意の $w \in M$ に対し

$$\mathrm{Re}(u-v_0|w) \leq 0$$

となる。一方　$-w \in M$ であるから

$$\mathrm{Re}(u-v_0|-w) \leq 0$$

も成立つ。故に等式

$$\mathrm{Re}(u-v_0|w) = 0$$

が任意の $w \in M$ に対して成立する。ここで $w \in M$ の代りに $iw \in M$ とすれば $\mathrm{Im}(u-v_0|w) = 0$ を得る。よって $u - v_0 \in M^\perp$ が従う。

(5) ⇒ (1)： $M = \mathrm{Ker}f$ とすれば良い。証明は標準的なので省略する。

参考文献：ブレジス「関数解析」産業図書

E. Zeidler, Applied Functional Analysis, Applications to Mathematucal Physics, Applied Mathematical Sciences 108, Springer.