複素平面に於ける単連結集合

平成 28 年 8 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

複素平面 $\mathbb{C}$ の開部分集合の単連結性に就いて、位相空間論と微分積分学の基礎知識の枠組で論じる。

1．単連結集合の定義と例

複素平面 $\mathbb{C}$ は、二次元ユークリッド空間（平面）$\mathbb{R}^2$ にハミルトンの意味で積が導入された**体**としての代数構造を持ち、ユークリッド距離に依る**距離空間**としての位相構造を持つ対象として考える。以下では I を 0 と 1 を端点とする有界閉区間 $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ であるとする。

定義　空でない開集合 $D \subset \mathbb{C}$ は D 内の任意の閉曲線が一点（のみから成る閉曲線）に同位 homotopic であるとき**単連結** simply connected と謂う。即ち D 内の任意の閉曲線（連続写像 $\gamma : I \to \mathbb{C}$ で $\gamma(I) \subset D$ 及び $\gamma(0) = \gamma(1)$ を満たすもの）に対し一点 $z_0 \in D$ 及び連続写像 $H : I \times I \to \mathbb{C}$ が存在し次の三つの条件が満たされている事と定義する。

(1) $H(I \times I) \subset D$

(2) $H(0, \theta) = H(1, \theta),\ \forall\theta \in I$

(3) $H(t, 0) = \gamma(t),\ H(t, 1) = z_0,\ \forall t \in I$

命題 1　複素平面 $\mathbb{C}$ の空でない星型開集合 D は単連結である。ここに D が**星型** star-shaped であるとは、一点 $a \in D$ が存在し任意の $z \in D$ に対し a と z を結ぶ線分
$[a, z] := \{\theta a + (1 - \theta)z \in \mathbb{C}\ ; \theta \in I\}$ が D に含まれる事を謂う。

(証明)　開集合 D は一点 $a \in D$ に対し上の性質を持つものとする。D 内の任意の閉曲線 $\gamma : I \to \mathbb{C}$ を取る。$(t, \theta) \in I \times I$ に対し $H(t, \theta) = \theta a + (1 - \theta)\gamma(t)$ と置くと連続写像 $H : I \times I \to \mathbb{C}$ が定まる。任意の $t \in I$ に対し $[a, \gamma(t)] \subset D$ 故 $H(I \times I) \subset D$ が従う。定義より $H(0, \theta) = \theta a + (1 - \theta)\gamma(0) = \theta a + (1 - \theta)\gamma(1) = H(1, 0), H(t, 0) = \gamma(t), H(t, 1) = a$ が従うので γ は一点 a（のみから成る閉曲線）と同位となる。

例．　複素平面 $\mathbb{C}$ の次の開部分集合 D は単連結である。

(1) $D = \mathbb{C}$

(2) $D = \mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}\ z > 0\}$

(3) $D = \mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}\ z < 0\}$

(4) $D = B(a;r) := \{z \in \mathbb{C}; |z-a| < r\},\ a \in \mathbb{C},\ r > 0$

(5) $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

(6) $D = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\theta} \in \mathbb{C}; r \geq 0\},\ \theta \in [0, 2\pi)$

実際 (1) - (4) の D は凸な開集合として星型である。(5) の D に就いては任意の $a > 0$ 及び任意の $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ に対し

$$[a, z] = \{\theta a + (1-\theta)z \in \mathbb{C}; \theta \in I\} \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \tag{1.1}$$

となる事を示せば良い。$\mathrm{Im}\ z \neq 0$ ならば $\mathrm{Im}(\theta a + (1-\theta)z) = (1-\theta)\mathrm{Im}\ z$ であり $\theta \neq 1$ なら $\mathrm{Im}(\theta a+(1-\theta)z) \neq 0$ であり $\theta = 1$ なら $\theta a+(1-\theta)z = a > 0$ となるので $[a, z] \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ が従う。$\mathrm{Im}\ z = 0$ なら仮定により $z > 0$ となるので $[a, z] \subset (0, \infty) \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ が従う。以上により (1.1) が成立つ。(6) の D に就いても同様である。

次に単連結でない領域（連結開集合）の例として**円環** annulus を取り上げよう。
ここに円環とは $0 \leq r \leq R \leq \infty$ なる r, R に対し

$$\{z \in \mathbb{C};\ r < |z| < R\}$$

と表される集合とする。$R = \infty$ の場合は

$$\{z \in \mathbb{C};\ |z| > r\} = \mathbb{C} \setminus \overline{B(0;r)},$$

特に $R = \infty, r = 0$ の場合は

$$\{z \in \mathbb{C};\ |z| > 0\} = \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

$0 < r < R < \infty$ の場合は

$$\{z \in \mathbb{C};\ r < |z| < R\} = B(0;R) \setminus \overline{B(0;r)},$$

$0 = r < R < \infty$ の場合は

$$\{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z| < R\} = B(0;R) \setminus \{0\}$$

を意味するものとする。

命題２　$0 \leq r < R \leq \infty$ なる r, R に対する円環は単連結でない。

この命題の初等的証明の為に次の補題を用いる。

補題１　有界閉区間 $J = [a, b]$ 上定義された実数値連続函数を $f : J \to \mathbb{R}$ とし $f(a) \neq f(b)$ を仮定する。

(1) $f(a) < f(b)$ の場合

(a-1) $a < c < (a+b)/2$ なる $c \in J$ が存在し $f(a) < f(c) \leq (f(a)+f(b))/2$ を満たす。

(a-2) J の列 $(x_n; n \geq 1)$ が存在し任意の $n \geq 1$ に対し

$$
\begin{aligned}
&0 < x_n - a < (b-a)/2^n, \\
&0 < f(x_n) - f(a) \leq (f(b)-f(a))/2^n
\end{aligned}
$$

を満たす。

(b-1) $(a+b)/2 < c < b$ なる $c \in J$ が存在し $(f(a)+f(b))/2 \leq f(c) < f(b)$ を満たす。

(b-2) J の列 $(x_n; n \geq 1)$ が存在し任意の $n \geq 1$ に対し

$$
\begin{aligned}
&0 < b - x_n < (b-a)/2^n, \\
&0 < f(b) - f(x_n) \leq (f(b)-f(a))/2^n
\end{aligned}
$$

を満たす。

(2) $f(a) > f(b)$ の場合

(a-1) $a < c < (a+b)/2$ なる $c \in J$ が存在し $(f(a)+f(b))/2 \leq f(c) < f(a)$ を満たす。

(a-2) J の列 $(x_n; n \geq 1)$ が存在し任意の $n \geq 1$ に対し

$$
\begin{aligned}
&0 < x_n - a < (b-a)/2^n, \\
&0 < f(a) - f(x_n) < (f(a)-f(b))/2^n
\end{aligned}
$$

を満たす。

(b-1) $(a+b)/2 < c < b$ なる $c \in J$ が存在し $f(b) < f(c) \leq (f(a)+f(b))/2$ を満たす。

(b-2) J の列 $(x_n; n \geq 1)$ が存在し任意の $n \geq 1$ に対し

$$
\begin{aligned}
&0 < b - x_n < (b-a)/2^n, \\
&0 < f(x_n) - f(b) \leq (f(a)-f(b))/2^n
\end{aligned}
$$

を満たす。

(証明) (1) 仮定により $f(a) < (f(a)+f(b))/2 < f(b)$ となるから中間値の定理より

$$
\begin{aligned}
K :&= \{c \in (a,b); f(a) < f(c) \leq (f(a)+f(b))/2\} \\
&= (a,b) \cap f^{-1}((f(a), (f(a)+f(b))/2])
\end{aligned}
$$

は空ではない。$K \cap (a, (a+b)/2)$ が空であるとすると任意の $x \in (a, (a+b)/2)$ に対し不等式

$$
f(x) > (f(a)+f(b))/2
$$

が成立つ事となる。f の連続性に因り $x \downarrow a$ とすると

$$
f(a) \geq (f(a)+f(b))/2
$$

を得るが、これは $f(a) \geq f(b)$ と同値であり仮定 $f(a) < f(b)$ に反する。故に

$K \cap (a,(a+b)/2) \neq \emptyset$ となり (a-1) が従う。$c \in K \cap (a,(a+b)/2)$ は

$$a < c < (a+b)/2 \ \Leftrightarrow \ 0 < c-a < (b-a)/2$$
$$f(a) < f(c) \leq (f(a)+f(b))/2 \Leftrightarrow 0 < f(c)-f(a) \leq (f(b)-f(a))/2$$

を満たす。b の代りに c として上の議論を適用すると

$$a < d < (a+c)/2 \ \Leftrightarrow \ 0 < d-a < (c-a)/2$$
$$f(a) < f(d) \leq (f(a)+f(c))/2 \ \Leftrightarrow \ 0 < f(d)-f(a) \leq (f(c)-f(a))/2$$

なる d の存在が導かれる事となる。この d は

$$0 < d-a < (c-a)/2 < (b-a)/4$$
$$0 < f(d)-f(a) \leq (f(c)-f(a))/2 \leq (f(b)-f(a))/4$$

を満たす。$x_1 = c, x_2 = d$ とし帰納的に (a-2) の列 $(x_n; n \geq 1)$ の存在が従う。
同様な議論で (b-1)(b-2) も示される。

(2) (1) と同様な議論から従う。

命題２の証明 簡単の為 $r=0, R=\infty$ の場合、即ち $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ の場合を考える。一般の場合の証明も同様である。二つの曲線 $\gamma_j : I \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を

$$\gamma_0(t) = e^{2\pi i t},\ t \in I$$
$$\gamma_1(t) = 1/2,\ \ t \in I$$

と定める。γ_0 と γ_1 が同位であるとして矛盾を導けば充分である。即ち次を満たす連続写像 $H : I \times I \to \mathbb{C}$

(1) $H(I \times I) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$

(2) $H(0,\theta) = H(1,\theta),\ \forall \theta \in I$

(3) $H(t,0) = \gamma_0(t),\ H(t,1) = \ \gamma_1(t),\ \forall t \in I$

が存在すると仮定して矛盾を導けば良い。その為に閉曲線 $\gamma_\theta : I \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を
$\gamma_\theta(t) = H(t,\theta),\ \forall t \in I$ と定義し I の部分集合 J を

$$J := \{\theta \in I;\ \exists t_\theta \in I : \gamma_\theta(t_\theta) < 0 \text{ 且つ任意の} \varepsilon,\ \delta > 0 \text{ に対し}$$
$$B(\gamma_\theta(t_\theta);\varepsilon) \cap \mathbb{C}_\pm \cap \gamma_\theta((t_\theta - \delta, t_\theta + \delta)) \neq \emptyset\}$$

と置く。

$0 \in J$ なる事：

$t_0 = 1/2$ とすれば $\gamma_0(t_0) = e^{\pi i} = -1$ であり任意の $\varepsilon, \delta > 0$ に対し

$$B(-1;\varepsilon) \cap \mathbb{C}_\pm \cap \gamma_0((1/2-\delta, 1/2+\delta))$$
$$= \{e^{2\pi i t} \in \mathbb{C}; 0 < |1/2 - t| < \delta,\ 0 < |e^{2\pi i t} + 1| < \varepsilon\} \neq \emptyset$$

となるので $0 \in J$ が成立つ。

或る $\eta > 0$ に対し $(0, \eta) \subset J$ となる事：

$0 < \varepsilon < 1/\sqrt{2}$ となる任意の ε を取る。H の一様連続性に拠り $\eta > 0$ が存在し
$|\theta| < \eta$ なる任意の θ に対し

$$\|\gamma_\theta - \gamma_0\|_\infty = \sup_{t \in I} |\gamma_\theta(t) - \gamma_0(t)| < \varepsilon$$

を満たす。さて

$$\mathrm{Re}\gamma_0\left(\frac{3}{8}\right) = \mathrm{Re}\gamma_0\left(\frac{5}{8}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathrm{Re}\gamma_0\left(\left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right]\right) = \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right],$$

$$\mathrm{Im}\gamma_0\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathrm{Im}\gamma_0\left(\frac{5}{8}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathrm{Im}\gamma_0\left(\left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right]\right) = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right],$$

であり

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\gamma_\theta\left(\frac{3}{8}\right) &= \mathrm{Im}\gamma_0\left(\frac{3}{8}\right) + \mathrm{Im}\left(\gamma_\theta\left(\frac{3}{8}\right) - \gamma_0\left(\frac{3}{8}\right)\right) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} - \|\gamma_\theta - \gamma_0\|_\infty > \frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon > 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\gamma_\theta\left(\frac{5}{8}\right) &= \mathrm{Im}\gamma_0\left(\frac{5}{8}\right) + \mathrm{Im}\left(\gamma_\theta\left(\frac{5}{8}\right) - \gamma_0\left(\frac{5}{8}\right)\right) \\ &\leq -\frac{1}{\sqrt{2}} + \|\gamma_\theta - \gamma_0\|_\infty < -\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon < 0\end{aligned}$$

となるので実数値連続函数 $\mathrm{Im}\gamma_\theta : I \to \mathbb{R}$ に対する中間値の定理に拠り $t_\theta \in \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$ が存在し
$\mathrm{Im}\gamma_\theta(t_\theta) = 0$ を満たす。またこの時 $\mathrm{Re}\gamma_0(t_\theta) \in \mathrm{Re}\gamma_0([\frac{3}{8}, \frac{5}{8}]) = [-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ より

$$\begin{aligned}\gamma_\theta(t_\theta) = \mathrm{Re}\gamma_\theta(t_\theta) &= \mathrm{Re}\gamma_0(t_\theta) + \mathrm{Re}(\gamma_\theta(t_\theta) - \gamma_0(t_\theta)) \\ &\leq -\frac{1}{\sqrt{2}} + \|\gamma_\theta - \gamma_0\|_\infty < -\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon < 0\end{aligned}$$

が従う。補題 1 より二つの列 $(s_n^\pm) \subset I$ が存在し

$$\pm\,\mathrm{Im}\gamma_\theta(s_n^\pm) > 0,$$

$$\frac{3}{8} < s_1^+ < \cdots < s_n^+ \uparrow t_\theta, \quad \mathrm{Im}\gamma_\theta\left(\frac{3}{8}\right) > \mathrm{Im}\gamma_\theta(s_1^+) > \cdots > \mathrm{Im}\gamma_\theta(s_n^+) \downarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\frac{5}{8} > s_1^- > \cdots > s_n^- \downarrow t_\theta, \quad \mathrm{Im}\gamma_\theta\left(\frac{5}{8}\right) < \mathrm{Im}\gamma_\theta(s_1^-) < \cdots < \mathrm{Im}\gamma_\theta(s_n^-) \uparrow 0 \quad (n \to \infty)$$

を満たす。この時 γ_θ の連続性に因り

$$|\gamma_\theta(s_n^\pm) - \gamma_\theta(t_\theta)| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が従うので任意の $\delta > 0$ に対し $N \geq 1$ が存在し $n \geq N$ ならば

$$\gamma_\theta(s_n^\pm) \in B(\gamma_\theta(t_\theta); \varepsilon) \cap \mathbb{C}_\pm \cap \gamma_\theta((t_\theta - \delta, t_\theta + \delta))$$

を満たす。これは $(0, \eta) \subset J$ なる事を意味する。

$\sup J \in J$ なる事：

$\theta^* := \sup J$ と置く。J は (空でない) 上に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合であるから上限を持つ。上限の定義に拠り J の列 $(\theta_n; n \geq 1) \subset J$ が存在し $\theta_n \uparrow \theta^*(n \to \infty)$ となる。H の一様連続性に依り

$$\|\gamma_{\theta_n} - \gamma_{\theta^*}\|_\infty = \sup_{t \in I} |\gamma_{\theta_n}(t) - \gamma_{\theta^*}(t)| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が従い $\theta_n \in J$ なる事に因り任意の $n \geq 1$ に対し $t_{\theta_n} \in I$ が存在し

$$\gamma_{\theta_n}(t_{\theta_n}) < 0$$

且つ任意の $\varepsilon, \delta > 0$ に対し

$$B(\gamma_{\theta_n}(t_{\theta_n}); \varepsilon) \cap \mathbb{C}_\pm \cap \gamma_{\theta_n}((t_{\theta_n} - \delta, t_{\theta_n} + \delta)) \neq \emptyset$$

を満たす。そこで $t_n = t_{\theta_n}$ と置く。点列 $(t_n; n \geq 1)$ は有界列を成すので
或る $t_0 \in I$ 及び部分列 $(t_{n_j}; j \geq 1)$ を取り $t_{n_j} \to t_0(j \to \infty)$ と出来る。この時

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Im}\gamma_{\theta^*}(t_0)| &= |\mathrm{Im}(\gamma_{\theta^*}(t_0) - \gamma_{\theta^*}(t_{n_j})) + \mathrm{Im}(\gamma_{\theta^*}(t_{n_j}) - \gamma_{\theta_{n_j}}(t_{n_j}))| \\
&\leq |\gamma_{\theta^*}(t_0) - \gamma_{\theta^*}(t_{n_j})| + \|\gamma_{\theta^*} - \gamma_{\theta_{n_j}}\|_\infty \to 0 \quad (j \to \infty)
\end{aligned}$$

より $\mathrm{Im}\gamma_{\theta^*}(t_0) = 0$ 即ち $\gamma_{\theta^*}(t_0) \in \mathbb{R}$ を得る。一方

$$\begin{aligned}
\gamma_{\theta^*}(t_0) &= \gamma_{\theta_{n_j}}(t_{n_j}) + (\gamma_{\theta^*}(t_{n_j}) - \gamma_{\theta_{n_j}}(t_{n_j})) + (\gamma_{\theta^*}(t_0) - \gamma_{\theta^*}(t_{n_j})) \\
&\leq \gamma_{\theta_{n_j}}(t_{n_j}) + \|\gamma_{\theta^*} - \gamma_{\theta_{n_j}}\|_\infty + |\gamma_{\theta^*}(t_0) - \gamma_{\theta^*}(t_{n_j})| \\
&< \|\gamma_{\theta^*} - \gamma_{\theta_{n_j}}\|_\infty + |\gamma_{\theta^*}(t_0) - \gamma_{\theta^*}(t_{n_j})| \to 0 \quad (j \to \infty)
\end{aligned}$$

となるので $\gamma_{\theta^*}(t_0) \leq 0$ が従う。$\gamma_{\theta^*}(I) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ より更に $\gamma_{\theta^*}(t_0) < 0$ が従う。
そこで $B(\gamma_{\theta^*}(t_0); \varepsilon) \cap \mathbb{C}_\pm \cap \gamma_{\theta^*}((t_0 - \delta, t_0 + \delta)) \neq \emptyset$ を示そう。$N_0 \geq 1$ が存在し任意の $j \geq N_0$ に対し $\|\gamma_{\theta_{n_j}} - \gamma_{\theta^*}\|_\infty < \varepsilon/4$ が成立つ。特に $j \geq N_0$ ならば

$$\gamma_{\theta_{n_j}}(t_0) \in B\left(\gamma_{\theta^*}(t_0); \frac{\varepsilon}{4}\right)$$

が成立つ。$t_{n_j} \to t_0(j \to \infty)$ より

$$\begin{aligned}
|\gamma_{\theta_{n_j}}(t_{n_j}) - \gamma_{\theta^*}(t_0)| &\leq |\gamma_{\theta_{n_j}}(t_{n_j}) - \gamma_{\theta^*}(t_{n_j})| + |\gamma_{\theta^*}(t_{n_j}) - \gamma_{\theta^*}(t_0)| \\
&\leq \|\gamma_{\theta_{n_j}} - \gamma_{\theta^*}\|_\infty + |\gamma_{\theta^*}(t_{n_j}) - \gamma_{\theta^*}(t_0)| \to 0 \ (j \to \infty)
\end{aligned}$$

となるので $N_1 \geq N_0$ なる N_1 が存在し $j \geq N_1$ ならば

$$\gamma_{\theta_{n_j}}(t_{n_j}) \in B\left(\gamma_{\theta^*}(t_0); \frac{\varepsilon}{4}\right)$$

が成立つ。さて $B(\gamma_{\theta_{n_j}}(t_{n_j}); \frac{\varepsilon}{4}) \cap \mathbb{C}_\pm \cap \gamma_{\theta_{n_j}}((t_{n_j} - \frac{1}{n_j}, t_{n_j} + \frac{1}{n_j})) \neq \emptyset$ であるから、各 $j \geq 1$ に対し $s_j^\pm \in I$ が存在し

$$\begin{aligned} &|t_{n_j} - s_j^\pm| < \frac{1}{n_j}, \quad \pm\mathrm{Im}\gamma_{\theta_{n_j}}(s_j^\pm) > 0, \\ &|\gamma_{\theta_{n_j}}(s_j^\pm) - \gamma_{\theta_{n_j}}(t_{n_j})| < \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

を満たす。γ_{θ^*} の連続性に拠り $N_2 \geq N_1$ が存在し任意の $j \geq N_2$ に対し

$$|\gamma_{\theta^*}(t_{n_j}) - \gamma_{\theta^*}(t_0)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

が成立つ。以上より任意の $j \geq N_2$ に対し

$$\begin{aligned} &|\gamma_{\theta^*}(s_j^\pm) - \gamma_{\theta^*}(t_0)| \\ &\leq |\gamma_{\theta^*}(s_j^\pm) - \gamma_{\theta_{n_j}}(s_j^\pm)| + |\gamma_{\theta_{n_j}}(s_j^\pm) - \gamma_{\theta_{n_j}}(t_{n_j})| + |\gamma_{\theta_{n_j}}(t_{n_j}) - \gamma_{\theta^*}(t_{n_j})| + |\gamma_{\theta^*}(t_{n_j}) - \gamma_{\theta^*}(t_0)| \\ &< \|\gamma_{\theta^*} - \gamma_{\theta_{n_j}}\|_\infty + \frac{\varepsilon}{4} \ + \ \|\gamma_{\theta_{n_j}} - \gamma_{\theta^*}\|_\infty + |\gamma_{\theta^*}(t_{n_j}) - \gamma_{\theta^*}(t_0)| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

が成立ち $s_j^\pm \to t_0 (j \to \infty)$ となるので $N_3 \geq N_2$ が存在し任意の $j \geq N_3$ に対し

$$\gamma_{\theta^*}(s_j^\pm) \in B(\gamma_{\theta^*}(t_0); \varepsilon) \cap \mathbb{C}_\pm \cap \gamma_{\theta^*}((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$$

が成立つ。これは $\theta^* \in J$ を意味する。

以上より $\theta^* = \sup J$ が $\theta^* \in J$ として定まる。次の場合の何れか一つが必ず成立つ：

(i) $\theta^* < 1$, (ii) $\theta^* = 1$

そこで夫々の場合に就いて考える。

(i) $\theta^* < 1$ の場合：

$\theta^* \in J$ であるから $t_{\theta^*} \in I$ が存在し $\gamma_{\theta^*}(t_{\theta^*}) < 0$ であり任意の $\varepsilon, \delta > 0$ に対し $B(\gamma_{\theta^*}(t_{\theta^*}); \varepsilon) \cap \mathbb{C}_\pm \cap \gamma_{\theta^*}((t_{\theta^*} - \delta, t_{\theta^*} + \delta)) \neq \emptyset$ が成立つ。故に二つの列 $(t_n^\pm; n \geq 1) \subset I$ が存在し $t_n^\pm \to t_{\theta^*}, \gamma_{\theta^*}(t_n^\pm) \to \gamma_{\theta^*}(t_{\theta^*}), \pm\mathrm{Im}\gamma_{\theta^*}(t_n^\pm) > 0, \pm\mathrm{Im}\gamma_{\theta^*}(t_1^\pm) > \cdots > \pm\mathrm{Im}\gamma_{\theta^*}(t_n^\pm) \downarrow 0 \ (n \to \infty)$ を満たす。この時 I の列 $(\theta_n; n \geq 1)$ が存在し

$$\begin{aligned} &\theta_n > \theta^*, \\ &\theta_1 > \theta_2 > \cdots > \theta_n \downarrow \theta^*, \\ &\|\gamma_{\theta_n} - \gamma_{\theta^*}\|_\infty < \frac{1}{2}\min(-\gamma_{\theta^*}(t_{\theta^*}), \pm\mathrm{Im}\gamma_{\theta^*}(t_n^\pm)) \end{aligned}$$

を満たす。各 $n \geq 1$ に対し

$$\begin{aligned}\pm\mathrm{Im}\gamma_{\theta_n}(t_n^{\pm}) &= \pm\mathrm{Im}\gamma_{\theta^*}(t_n^{\pm}) \mp \mathrm{Im}(\gamma_{\theta^*}(t_n^{\pm}) - \gamma_{\theta_n}(t_n^{\pm})) \\ &\geq \pm\mathrm{Im}\gamma_{\theta^*}(t_n^{\pm}) - \|\gamma_{\theta^*} - \gamma_{\theta_n}\|_\infty \\ &> \pm\frac{1}{2}\mathrm{Im}\gamma_{\theta^*}(t_n^{\pm}) > 0\end{aligned}$$

を得る。実数値連続函数 $\mathrm{Im}\gamma_{\theta_n} : I \to \mathbb{R}$ に中間値の定理を適用し $\mathrm{Im}\gamma_{\theta_n}(s_n) = 0$ なる $s_n \in I$ の存在を得る。s_n は t_n^- と t_n^+ を端点とする開区間に属すので $s_n \to t_{\theta^*}(n \to \infty)$ が従う。また

$$\begin{aligned}|\gamma_{\theta_n}(s_n) - \gamma_{\theta^*}(t_{\theta^*})| &\leq |\gamma_{\theta_n}(s_n) - \gamma_{\theta^*}(s_n)| + |\gamma_{\theta^*}(s_n) - \gamma_{\theta^*}(t_{\theta^*})| \\ &\leq \|\gamma_{\theta_n} - \gamma_{\theta^*}\|_\infty + |\gamma_{\theta^*}(s_n) - \gamma_{\theta^*}(t_\theta)| \\ &\to 0, \\ |\gamma_{\theta_n}(t_n^{\pm}) - \gamma_{\theta^*}(t_{\theta^*})| &\leq |\gamma_{\theta_n}(t_n^{\pm}) - \gamma_{\theta^*}(t_n^{\pm})| + |\gamma_{\theta^*}(t_n^{\pm}) - \gamma_{\theta^*}(t_{\theta^*})| \\ &\leq \|\gamma_{\theta_n} - \gamma_{\theta^*}\|_\infty + |\gamma_{\theta^*}(t_n^{\pm}) - \gamma_{\theta^*}(t_\theta^*)| \\ &\to 0, \\ |\gamma_{\theta_n}(s_n) - \gamma_{\theta^*}(t_n^{\pm})| &\leq |\gamma_{\theta_n}(s_n) - \gamma_{\theta^*}(t_{\theta^*})| + |\gamma_{\theta^*}(t_{\theta^*}) - \gamma_{\theta_n}(t_n^{\pm})| \\ &\to 0,\end{aligned}$$

となるので $N \geq 1$ が存在し任意の $n \geq N$ に対し

$$\begin{aligned}&\gamma_{\theta_n}(s_n) = \mathrm{Re}\gamma_{\theta_n}(s_n) < 0, \\ &\gamma_{\theta_n}(t_n^{\pm}) \in B(\gamma_{\theta_n}(s_n); \varepsilon) \cap \mathbb{C}_{\pm} \cap \gamma_{\theta_n}((s_n - \delta, s_n + \delta))\end{aligned}$$

が従う。故に $\theta_n \in J$ となり θ^* の上限性に反する。従って $\theta^* < 1$ となる事は有り得ない。

(ii) $\theta^* = 1$ の場合：

これは $1 \in J$ を意味するが、これより直ちに $\gamma_1(1) = 1/2 \in \mathbb{C}_{\pm}$ が従い矛盾を生ずる。

２．単連結領域の特徴付け

複素平面 $\mathbb{C}$ に於ける空でない領域（連結開集合）の特徴付けに就いて纏めて置こう。

定理１　空でない領域 $D \subset \mathbb{C}$ に対し次は同値である：

(1) D は単連結である。即ち D 内の任意の閉曲線は一点に同位 null-homotopic である。

(2) D 内の任意の閉曲線は 0 に同調 homologous to 0 である。即ち D 内の任意の閉曲線 γ 及び任意の $a \in \mathbb{C} \setminus D$ に対し $\mathrm{Ind}(\gamma; a) = 0$

(3) D は単位円板 $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ に位相同型である。

(4) $\mathbb{C} \setminus D$ は有界な連結成分を持たない。即ち互いに素なコンパクト集合 K と閉集合 C に依り $\mathbb{C} \setminus D = K \sqcup C$ と表されているものとすると $K = \emptyset$ 。

(5) $\mathbb{C} \setminus D \neq \emptyset$ ならば D は単位円板に正則同型 (共形同型) である。

(6) 零を取らない D 上の正則函数は正則対数を持つ。即ち $0 \notin f(D)$ なる任意の正則函数 $f : D \to \mathbb{C}$ に対し正則函数 $g : D \to \mathbb{C}$ が存在し $f = \exp \circ g$ と表される。

(7) 零を取らない D 上の正則函数は正則平方根を持つ。即ち $0 \notin f(D)$ なる任意の正則函数 $f : D \to \mathbb{C}$ に対し正則函数 $h : D \to \mathbb{C}$ が存在し $f = h^2$ と表される。

(8) D 上の任意の調和函数は正則函数の実部である。即ち任意の調和函数 $u : D \to \mathbb{R}$ に対し正則函数 $f : D \to \mathbb{C}$ が存在し $u = \mathrm{Re} f$ と表される。

(9) D 上の任意の正則函数は正則原始函数を持つ。即ち任意の正則函数 $f : D \to \mathbb{C}$ に対し正則函数 $F : D \to \mathbb{C}$ が存在し $f = F'$ と表される。

(10) D 上の正則函数の D 内の任意の閉曲線上の積分は零となる。即ち任意の正則函数 $f : D \to \mathbb{C}$ 及び D 内の任意の閉曲線 γ に対し次の等式が成立つ：

$$\int_\gamma f = 0$$

(11) D 上の任意の正則函数と D 内の任意の閉曲線に対し一般化コーシーの積分公式が成立つ。即ち任意の正則函数 $f : D \to \mathbb{C}$ と D 内の任意の閉曲線 $\gamma : I \to \mathbb{C}$ 及び任意の $z \in D \setminus \gamma(I)$ に対し次の等式が成立つ：

$$\mathrm{Ind}(\gamma; z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

上記の内、(1) から (4) は位相幾何的性質、(5) は複素幾何的性質、(6) から (11) は複素解析的性質と考えられるが、何れも同値な内容となる事を主張するものであり大変興味深い。

３．$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ の非単連結性

$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ の非単連結性に就いては命題 2 で初等的に示した所であるが、定理 1 の (10) が成立しない事からも導かれる。実際 $\gamma(t) = e^{2\pi i t},\ t \in [0,1]$ で与えられる $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内の閉曲線 γ 及び $f(z) = 1/z,\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ で与えられる正則函数 $f : D \to \mathbb{C}$ に依り (10) は成立しない：

$$\int_\gamma f = 2\pi i t \neq 0 \tag{1}$$

更に f は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ に於いて正則な原始函数も対数函数も平方根も持たない。これらは $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ が単連結で無い事に由来するのである。複素積分 (1) の標準的な計算法は次で与えられる。

$$\int_\gamma f = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi i t}} \cdot 2\pi i e^{2\pi i t} dt = 2\pi i \int_0^1 dt = 2\pi i$$

これは定理 1 の (11) に於いて $f \equiv 1$ とした等式

$$1 = \mathrm{Ind}(\gamma; 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta} d\zeta$$

とも見做す事が出来る。中心を $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ とした曲線 $\gamma_a : [0,1] \ni t \mapsto \gamma_a(t) = e^{2\pi i t} + a$ も $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内の閉曲線であり、定理 1 の (11) に拠れば

$$\int_{\gamma_a} \frac{1}{\zeta} d\zeta = 2\pi i \mathrm{Ind}(\gamma_a; 0) = \begin{cases} 1, & |a| < 1 \\ 0, & |a| > 1 \end{cases}$$

が直ちに従うが、次の様に直接計算で確かめる事も出来る：

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_a} \frac{1}{\zeta} d\zeta &= \int_0^1 \frac{1}{\gamma_a(t)} \gamma_a'(t) dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi i t} + a} 2\pi i e^{2\pi i t} dt \\
&= 2\pi i \int_0^1 \frac{(e^{2\pi i t} + a) - a}{e^{2\pi i t} + a} dt \\
&= 2\pi i - 2\pi i a \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi i t} + a} dt \\
&= \begin{cases} 2\pi i - 2\pi i a \displaystyle\int_0^1 e^{-2\pi i t} \cdot \frac{1}{1 + a e^{-2\pi i t}} dt & (|a| < 1) \\ \\ 2\pi i - 2\pi i \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi i t} a^{-1} + 1} dt & (|a| > 1) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2\pi i - 2\pi i a \displaystyle\int_0^1 \sum_{j=0}^{\infty} (-a)^j e^{-2\pi i (j+1) t} dt & (|a| < 1) \\ \\ 2\pi i - 2\pi i \displaystyle\int_0^1 \sum_{j=0}^{\infty} (-e^{2\pi i t} a^{-1})^j dt & (|a| > 1) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2\pi i - 2\pi i \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a^{j+1} \int_0^1 e^{-2\pi i (j+1) t} dt & (|a| < 1) \\ \\ 2\pi i - 2\pi i \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a^{-j} \int_0^1 e^{2\pi i j t} dt & (|a| > 1) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2\pi i & (|a| < 1) \\ \\ 0 & (|a| > 1) \end{cases}
\end{aligned}$$

または次のように計算する事も出来る：

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_a} \frac{1}{\zeta} d\zeta &= 2\pi i - 2\pi i a \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi i t} + a} dt \\
&= 2\pi i - 2\pi i a \int_0^1 \frac{e^{-2\pi i t} + a}{(e^{2\pi i t} + a)(e^{-2\pi i t} + a)} dt \\
&= 2\pi i - 2\pi i a \int_0^1 \frac{\cos 2\pi t - i \sin 2\pi i t + a}{1 + 2a\cos 2\pi t + a^2} dt \\
&= 2\pi i - 2\pi i a \int_0^1 \frac{\cos 2\pi t}{1 + 2a\cos 2\pi t + a^2} dt - 2\pi i a^2 \int_0^1 \frac{1}{1 + 2a\cos 2\pi t + a^2} dt \\
&= \begin{cases} 2\pi i - 2\pi i a \cdot \dfrac{-a}{1-a^2} - 2\pi i a^2 \cdot \dfrac{1}{1-a^2} = 2\pi i & (|a| < 1) \\[3ex] 2\pi i - 2\pi i a \cdot \dfrac{-1}{a(a^2-1)} - 2\pi i a^2 \cdot \dfrac{1}{a^2-1} = 0 & (|a| > 1) \end{cases}
\end{aligned}
$$

ここに

$$
\int_0^1 \frac{1}{1 + 2a\cos 2\pi t + a^2} dt = \begin{cases} \dfrac{1}{1-a^2} & (|a| < 1) \quad (2) \\ \dfrac{1}{a^2-1} & (|a| > 1) \quad (3) \end{cases}
$$

$$
\int_0^1 \frac{\cos 2\pi t}{1 + 2a\cos 2\pi t + a^2} dt = \begin{cases} -\dfrac{a}{1-a^2} & (|a| < 1) \quad (4) \\ -\dfrac{1}{a(a^2-1)} & (|a| > 1) \quad (5) \end{cases}
$$

を用いた。

a と $1/a$ の入れ替えに依り (2) と (3) 及び (4) と (5) の同値性が従うので上の 4 つの等式の証明には (2) と (4) を示せば充分である。そこで同値な次の積分を示そう。

$$
\int_0^\pi \frac{1}{1 + 2a\cos x + a^2} dx = \frac{\pi}{1-a^2} \quad (|a| < 1) \tag{6}
$$

$$
\int_0^\pi \frac{\cos x}{1 + 2a\cos x + a^2} dx = -\frac{\pi a}{1-a^2} \quad (|a| < 1) \tag{7}
$$

(6)(7) 両方共、被積分函数は原始函数を持つので次の様に直接計算出来る：

$$\int_0^\pi \frac{1}{1+2a\cos x+a^2}dx = \left[\frac{2}{1-a^2}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1-a}{1+a}\tan\frac{x}{2}\right)\right]_0^\pi$$
$$= \frac{2}{1-a^2}\lim_{x\uparrow\pi}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1-a}{1+a}\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{1-a^2},$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos x}{1+2a\cos x+a^2}dx = \left[\frac{x}{2a} - \frac{1+a^2}{a(1-a^2)}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1-a}{1+a}\tan\frac{x}{2}\right)\right]_0^\pi$$
$$= \frac{\pi}{2a} - \frac{1+a^2}{a(1-a^2)}\lim_{x\uparrow\pi}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1-a}{1+a}\tan\frac{x}{2}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi(1+a^2)}{2a(1-a^2)} = -\frac{\pi a}{1-a^2}$$

実際、

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1-a}{1+a}\tan\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{1-a}{1+a}\tan\frac{x}{2}\right)^2}\,\frac{1-a}{1+a}\,\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{1-a}{1+a}\,\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}+(\frac{1-a}{1+a})^2\sin^2\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{1-a}{1+a}\,\frac{1}{1-(1-(\frac{1-a}{1+a})^2)\sin^2\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{1-a}{1+a}\,\frac{1}{1-\frac{4a}{(1+a)^2}\sin^2\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{1-a}{1+a}\,\frac{1}{1-\frac{2a}{(1+a)^2}(1-\cos x)}$$
$$= \frac{(1-a)(1+a)}{2}\,\frac{1}{(1+a)^2-2a+2a\cos x}$$
$$= \frac{1-a^2}{2}\,\frac{1}{1+a^2+2a\cos x}$$

及び

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2a} - \frac{1+a^2}{a(1-a^2)}\,\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1-a}{1+a}\tan\frac{x}{2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2a} - \frac{1+a^2}{2a}\,\frac{1}{1+a^2+2a\cos x}$$
$$= \frac{1}{2a}\frac{(1+a^2+2a\cos x)-(1+a^2)}{1+a^2+2a\cos x} = \frac{\cos x}{1+a^2+2a\cos x}$$

より、原始函数である事が分かる。発見的方法で求めるには変数変換（置換積分）

$$\theta = \tan\frac{x}{2}$$

を用いれば良い。一方、等式

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+2a\cos\theta+a^2} &= \frac{1}{1+a(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+a^2} = \frac{1}{e^{-i\theta}(e^{i\theta}+ae^{2i\theta}+a+a^2e^{i\theta})} \\
&= \frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}+a)(1+ae^{i\theta})} \\
&= \frac{e^{i\theta}}{1-a^2}\left(\frac{1}{e^{i\theta}+a}-\frac{a}{1+ae^{i\theta}}\right) \\
&= \frac{1}{1-a^2}\left(\frac{1}{1+ae^{-i\theta}}-\frac{ae^{i\theta}}{1+ae^{i\theta}}\right) \\
&= \frac{1}{1-a^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-ae^{-i\theta})^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-ae^{-i\theta})^n\right) \\
&= \frac{1}{1-a^2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-a)^n(e^{-in\theta}+e^{in\theta})\right) \\
&= \frac{1}{1-a^2}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-a)^n\cos n\theta\right)
\end{aligned}
$$

はフーリエ（余弦）展開であり $\cos n\theta$ に対して一意的に定まるフーリエ係数は $\dfrac{2(-a)^n}{1-a^2}$ で与えられる事を示している。これは

$$
\frac{(-a)^n}{1-a^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{1+2a\cos\theta+a^2}d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta}{1+2a\cos\theta+a^2}d\theta
$$

を意味し、(6)(7) はその特別な場合と見做せる。

$D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ は単連結ではないが D 上の全ての正則函数が γ 上で零でない複素積分値を持つ訳ではない。実際 $f(z)=z^n, n\in\mathbb{Z}$ とすれば f は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上正則であるが $n\neq -1$ の場合

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma f &= \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_0^1 e^{2\pi int}\cdot 2\pi ie^{2\pi it} = 2\pi i\int_0^1 e^{2\pi i(n+1)t}dt \\
&= 2\pi i\int_0^1(\cos(2\pi(n+1)t))+i(\sin(2\pi(n+1)t))dt \\
&= 2\pi i\left[\frac{\sin(2\pi(n+1)t)}{2\pi(n+1)}-i\frac{\cos(2\pi(n+1)t)}{2\pi(n+1)}\right]_0^1 = 0 \qquad (6)
\end{aligned}
$$

となる。

$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の非単連結性を定理 1 の (6) の観点から初等的に論じよう。

命題３　任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対し $z=\exp(f(z))$ を満たすような連続函数 $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ は存在しない。

(証明 その 1)　その様な函数 f が存在すると仮定し矛盾を導こう。$z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対し $g(z)=\dfrac{\exp(\frac{1}{2}f(z^2))}{z}$ と置くと連続函数 $g:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ が定まる。仮定より任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対し等式

$$g(z)^2=\frac{\exp(f(z^2))}{z^2}=1$$

が成立つので

$$U_\pm=\{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\};g(z)=\pm1\}$$

と置けば $\mathbb{C}\setminus\{0\}=U_+\cup U_-$ が従う。定義より $U_+\cap U_-=\emptyset$ となり、一点集合である閉集合の連続函数に因る逆像として $U_\pm=g^{-1}(\{\pm1\})$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の閉集合であり、開集合 $(0,\infty)$ 及び $(-\infty,0)$ の連続函数に因る逆像として夫々$U_+=g^{-1}((0,\infty))$ 及び $U_-=g^{-1}((-\infty,0))$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の開集合である。

さて $U_+=\emptyset$ であるとすると $U_-=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 即ち任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対し $\exp(\frac{1}{2}f(z^2))=-z$ となるが $z=1$ に於いて $\exp(\frac{1}{2}f(1))=-1,\ z=-1$ に於いて $\exp(\frac{1}{2}f(1))=1$ となり矛盾が導かれるので $U_+\neq\emptyset$ を得る。一方 $U_-=\emptyset$ であるとすると $U_+=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 即ち任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対し $\exp(\frac{1}{2}f(z^2))=z$ となるが $z=1$ に於いて $\exp(\frac{1}{2}f(1))=1,\ z=-1$ に於いて $\exp(\frac{1}{2}f(1))=-1$ となり矛盾が導かれるので $U_-\neq\emptyset$ を得る。

以上より $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ は二つの空でない開かつ閉集合で分割される：

$$\mathbb{C}\setminus\{0\}=U_+\sqcup U_-,\ U_\pm\neq\emptyset,\ U_\pm \text{は} \mathbb{C}\setminus\{0\} \text{の開かつ閉集合}$$

これは $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の連結性に矛盾する。

(証明 その 2)　その様な函数 f が存在すると仮定し矛盾を導こう。$\theta\in\mathbb{R}$ に対し $z=e^{i\theta}$ と置くと $e^{i\theta}=\exp(f(e^{i\theta}))$ が従うので $k(\theta)\in\mathbb{Z}$ が定まり $i\theta-f(e^{i\theta})=2\pi k(\theta)i$ が成立つ。左辺は θ の函数 $\mathbb{R}\ni\theta\mapsto i\theta-f(e^{i\theta})\in\mathbb{C}$ として連続故 $\mathbb{R}\ni\theta\mapsto k(\theta)\in\mathbb{R}$ も連続となるが $k(\theta)\in\mathbb{Z}$ 故 $k_0\in\mathbb{Z}$ が唯一つ存在し任意の $\theta\in\mathbb{R}$ に対し等式 $i\theta-f(e^{i\theta})=2\pi k_0 i$ が成立つ。$\theta=0$ 及び 2π を代入すると夫々$-f(1)=2\pi k_0 i$ 及び $2\pi i-f(1)=2\pi k_0 i$ を得るので $2\pi k_0=if(1)=2\pi k_0-2\pi$ となり矛盾を得る。

参考文献：杉浦光夫，解析入門 I，II，東京大学出版会
高橋礼二，複素解析，東京大学出版会
E. Freitag and R. Busam, Complex Analysis, Springer