ユークリッド空間の部分多様体

平成 21 年 11 月
平成 25 年 8 月改訂
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html
“sleeping in the jungle of motor block manifolds, ” King Crimson

　ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に埋め込まれた d 次元曲面を C^k 級部分多様体として考え、その特徴付けを議論しよう。ここに n, d, k は $n \geqslant 2, 1 \leqslant d \leqslant n-1, k \geqslant 1$ なる整数とする。初めに基本的な概念を纏めて置こう。

定義　$\mathbb{R}^d$ の空でない開集合 V で定義された $\mathbb{R}^n$ 値 C^k 級写像 g が**嵌め込み** immersion であるとは任意の $x \in V$ に対し線型写像 $g'(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ が単射であることと定義する。嵌め込み $g \in C^k(V; \mathbb{R}^n)$ が**埋め込み** embedding であるとは $g : V \to g(V)$ が同相（全単射両連続）であることと定義する。

定義　$\mathbb{R}^n$ の空でない開集合 U で定義された $\mathbb{R}^{n-d}$ 値 C^k 級写像 h が**沈め込み** submersion であるとは任意の $x \in U$ に対し線型写像 $h'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ が全射であることと定義する。

定義　$\mathbb{R}^n$ の空でない開集合 U で定義された $\mathbb{R}^n$ 値 C^k 級写像 Φ が**微分同相** diffeomorphism であるとは $\Phi : U \to \Phi(U)$ が同相であり逆写像 $\Phi^{-1} : \Phi(U) \to \mathbb{R}^n$ が C^k 級であることと定義する。

1．ユークリッド空間に埋め込まれた部分多様体の特徴付け

この節では、ユークリッド空間の部分多様体の特徴付けを与えよう。そのため次の記法を用いる。自然な直和分解 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ に対して

$$\pi_1 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \ni (x', x'') \mapsto x' \in \mathbb{R}^d, \ \pi_2 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \ni (x', x'') \mapsto x'' \in \mathbb{R}^{n-d}$$

を付随する射影とし

$$\iota_1 : \mathbb{R}^d \ni x' \ \mapsto (x', 0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}, \ \iota_2 : \mathbb{R}^{n-d} \ni x'' \mapsto (0, x'') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$$

を付随する埋め込みとする。n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の元、即ち $\{1, \cdots, n\}$ からそれ自身への全単射 σ により、線型写像

$$\mathbb{R}^n \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

が定まる。これを L_σ と表す。L_σ は座標の番号を入れ替える操作に対応する線型同型写像である。$m\times n$ 次行列 A の行ベクトル表示

$$A=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right]$$

に対しても行ベクトルの番号を $\sigma\in\mathfrak{S}_m$ で入れ換えた行列

$$\begin{bmatrix} a_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ a_{\sigma(m)} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc} a_{\sigma(1)1} & \cdots & a_{\sigma(1)n} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline a_{\sigma(m)1} & \cdots & a_{\sigma(m)n} \end{array}\right]$$

を考える事が出来るが、これは A に L_σ を合成して得られたものに外ならない。L_σ の表現行列は行列の基本変形に対応する行列の積で表される m 次正方行列であり、A の行ベクトルを σ で入れ換えた行列は A に L_σ の表現行列を左から掛けたものである。
A の列ベクトル表示

$$A=[a_1,\cdots,a_n]=\left[\begin{array}{c|c|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right]$$

に対しても列ベクトルの番号 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ で入れ換えた行列

$$[a_{\sigma(1)},\cdots,a_{\sigma(n)}]=\left[\begin{array}{c|c|c} a_{1\sigma(1)} & \cdots & a_{1\sigma(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m\sigma(1)} & \cdots & a_{m\sigma(n)} \end{array}\right]$$

を考える事が出来るが、これは上の L_σ の表現行列に相当する n 次正方行列を右から掛けたものである。L_σ と区別してこれを AR_σ と表そう。R_σ は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線型同型写像である。

定理 1. $\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合 M に対し次は同値である。

(1)(**局所グラフ表示**）任意の $x\in M$ に対し $x\in U$ なる $\mathbb{R}^n$ の開集合 U, $\mathbb{R}^d$ の開集合 V, $f\in C^k(V;\mathbb{R}^{n-d}),\sigma\in\mathfrak{S}_n$ が存在して $M\cap U$ は f のグラフ（の座標の番号を σ で入れ換えた集合）として表示される：

$$M\cap U=L_\sigma(G(f)),\ G(f)=\{(v,f(v))\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{n-d};v\in V\}$$

(2)(**局所パラメタ表示**）任意の $x\in M$ に対し $x\in U$ なる $\mathbb{R}^n$ の開集合 $U,\mathbb{R}^d$ の開集合 V, 埋め込み $g\in C^k(V;\mathbb{R}^n)$ が存在して $M\cap U$ は g でパラメタ表示される：

$$M\cap U=g(V)=\{g(v)\in\mathbb{R}^n;v\in V\}$$

(3)(**局所零集合表示**）任意の $x\in M$ に対し $x\in U$ なる $\mathbb{R}^n$ の開集合 U, 沈め込み $h\in C^k(U;\mathbb{R}^{n-d})$ が存在して $M\cap U$ は h の零集合として表示される：

$$M\cap U=h^{-1}(\{0\})=\{u\in U;h(u)=0\in\mathbb{R}^{n-d}\}$$

(4)(**局所平坦化表示**）任意の $x \in M$ に対し $x \in U$ なる $\mathbb{R}^n$ の開集合 U，$\mathbb{R}^d$ の開集合 V, 微分同相 $\Phi \in C^k(U;\mathbb{R}^n)$ が存在し $M \cap U$ は Φ によって $\mathbb{R}^d \times \{0\}(\subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d})$ の中に直化される：

$$\Phi(M \cap U) = V \times \{0\} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$$

(5)(**ユークリッド空間に埋め込まれた部分多様体の微分構造**) M の開集合の族 $(U_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ 及び同相写像 $\varphi_\lambda : U_\lambda \to \varphi_\lambda(U_\lambda) \subset \mathbb{R}^d$ の族 $(\varphi_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ が存在して次を満たす：

(a) $M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$

(b) $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ なる任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して

$$(\varphi_\lambda | U_\lambda \cap U_\mu) \circ (\varphi_\mu | U_\lambda \cap U_\mu)^{-1} : \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$$

は C^k 級微分同相写像

(c) 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$\iota \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda) \to \mathbb{R}^n$$

は C^k 級の埋め込みである。ここに $\iota : M \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}^n$ とする。

証明 (1) ⇒ (2)：(1) を仮定する。$v \in V$ に対し

$$\tilde{g}(v) = (v, f(v)),\ g = L_\sigma \circ \tilde{g}$$

と置くと $\tilde{g} \in C^k(V;\mathbb{R}^n)$ となり線型写像

$$\tilde{g}(v) = \left[\frac{I_d}{f'(v)}\right] : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$$

は rank $\tilde{g}'(v) = d$ を満たすので $\tilde{g}$ 及び g は埋め込みとなる。更に次の等式が成り立つ：

$$M \cap U = L_\sigma(G(f)) = L_\sigma(\tilde{g}(V)) = g(V)$$

(2) ⇒ (1)： (2) を仮定する。$x_0 \in M \cap U$ を与えると $x_0 = g(v_0)$ なる $v_0 \in V$ が唯一つ定まる。このとき

$g'(v_0) \in L(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n)$ は単射
$\Leftrightarrow$ rank $g'(v_0) = d$
$\Leftrightarrow$ ヤコビ行列 $g'(v_0) \in M(n,d)$ に於いて一次独立な d 個の行ベクトルが存在する
$\Leftrightarrow$ $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が存在して $\pi_1 \circ L_\sigma \circ g'(v_0) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ は線型同型

となるので、逆写像定理により $v_0 \in V' \subset V$ なる $\mathbb{R}^d$ の開集合 V' が存在して
$\pi_1 \circ L_\sigma \circ g\ |V' : V' \to (\pi_1 \circ L_\sigma \circ g)(V') \equiv W$ は C^k 級微分同相写像となる。
このとき $f = (\pi_2 \circ L_\sigma \circ g) \circ (\pi_1 \circ L_\sigma \circ g\ |V')^{-1} : W \to \mathbb{R}^{n-d}$ は C^k 級であり

$$\begin{aligned} G(f) &= \{(w, f(w)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}; w \in W\} \\ &= \{((\pi_1 \circ L_\sigma \circ g)(v), (\pi_2 \circ L_\sigma \circ g)(v)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}; v \in V'\} \\ &= (L_\sigma \circ g)(V') \end{aligned}$$

が成り立つ。そこで $U' = U \cap g(V')$ と置くと U' は $x_0 \in U'$ なる $\mathbb{R}^n$ の開集合であり

$$M \cap U' = (M \cap U) \cap g(V') = g(V') = L_{\sigma^{-1}}(G(f))$$

となるので (1) は x, U, V, σ を夫々x_0, U', V', σ^{-1} と置き換えて成り立つ。

(1) ⇒ (3): (1) を仮定する。$(v, w) \in V \times \mathbb{R}^{n-d}$ に対し

$$\tilde{h}(v, w) = w - f(v)$$

と置くと $\tilde{h} \in C^k(V \times \mathbb{R}^{n-d}; \mathbb{R}^{n-d})$ が定まり $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n-d} \end{bmatrix}$ と表すと $\tilde{h}$ のヤコビ行列は

$$\tilde{h}'(v, w) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\partial_1 f_1(v) & \cdots & -\partial_d f_1(v) & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ -\partial_1 f_{n-d}(v) & \cdots & -\partial_d f_{n-d}(v) & & & 1 \end{array}\right]$$

と表される。これより rank $\tilde{h}'(v, w) = n - d$ となり $\tilde{h}$ は沈め込みとなる。さて

$$\begin{aligned} (v, w) \in L_{\sigma^{-1}}(M \cap U) &\Leftrightarrow (v, w) \in G(f) \\ &\Leftrightarrow f(v) = w, v \in V \\ &\Leftrightarrow \tilde{h}(v, w) = 0, (v, w) \in V \times \mathbb{R}^{n-d} = \pi_1^{-1}(V) \end{aligned}$$

となるので $U' = U \cap (L_\sigma \circ \pi_1^{-1})(V), h = \tilde{h} \circ L_{\sigma^{-1}} : U' \to \mathbb{R}^{n-d}$ と置くと $h \in C^k(U'; \mathbb{R}^{n-d})$ は沈め込みであり $u = L_\sigma(v, w)$ とすれば次が成り立つので (3) が従う：

$$\begin{aligned} M \cap U' &= (M \cap U) \cap (L_\sigma \circ \pi_1^{-1})(V) \\ &= L_\sigma(\{(v, w) \in \pi_1^{-1}(V); \tilde{h}(v, w) = 0\}) \\ &= \{u \in U'; h(u) = 0\} \end{aligned}$$

(3) ⇒ (4)：$u_0 \in M$ に対し $u_0 \in U$ なる $\mathbb{R}^n$ の開集合 U 及び沈め込み $h \in C^k(U; \mathbb{R}^{n-d})$ が存在して

$$M \cap U = h^{-1}(\{0\}) = \{u \in U; h(u) = 0 \in \mathbb{R}^{n-d}\}$$

と表される。このとき次は同値である：

$h'(u_0) \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n-d})$ は全射
⇔ rank $h'(u_0) = n - d$
⇔ ヤコビ行列 $h'(u_0) \in M(n - d, n)$ に於いて一次独立な $n - d$ 個の列ベクトルが存在する
⇔ $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が存在して $h'(u_0) \circ R_\sigma \circ \iota_2 : \mathbb{R}^{n-d} \to \mathbb{R}^{n-d}$ は線型同型

そこで $u \in U$ に対し

$$\Phi(u) = \big((\pi_1 \circ R_\sigma^{-1})(u), h(u)\big)$$

と置くと $\Phi \in C^k(U;\mathbb{R}^n)$,

$$\Phi'(u_0) = \left[\begin{array}{c} \pi_1 \circ R_\sigma^{-1} \\ \hline h'(u_0) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{h'(u_0) \circ R_\sigma} \end{array}\right] R_\sigma^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline h'(u_0) \circ R_\sigma \circ \iota_1 & h'(u_0) \circ R_\sigma \circ \iota_2 \end{array}\right] R_\sigma^{-1}$$

となるので $\Phi'(u_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は線型同型である。逆写像定理により $u_0 \in U' \subset U$ なる $\mathbb{R}^n$ の開集合 U' が存在して $\Phi : U' \to \Phi(U')$ は C^k 級微分同相となる。$V = (\pi_1 \circ R_\sigma^{-1})(U')$ と置くと V は $\mathbb{R}^d$ の開集合であり

$$\begin{aligned} u \in M \cap U' &\Leftrightarrow u \in U', h(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\pi_1 \circ R_\sigma^{-1})(u) \in V, h(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow \Phi(u) \in V \times \{0\} \end{aligned}$$

となり $\Phi(M \cap U') = V \times \{0\} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ が従う。

(4) $\Rightarrow$ (2): $g = \Phi^{-1} \circ \iota_1 : V \to \mathbb{R}^n$ とすれば良い。

(4) $\Rightarrow$ (5): 各 $m \in M$ に対し (4) で与えられる $m \in U$ なる $\mathbb{R}^n$ の開集合 U と $\Phi_m \in C^k(U;\mathbb{R}^n)$ を取り $U_m = M \cap U, \varphi_m = \pi_1 \circ \Phi_m$ と置くと $\Phi_m(U_m) \equiv V_m$ は $\mathbb{R}^d$ の開集合となり $M = \bigcup_{m \in M} U_m,\ \varphi_m : U_m \to \varphi_m(U)$ は同相となり逆写像は $\varphi_m^{-1} = \Phi_m^{-1} \circ \iota_1 : V_m \to U_m$ となる。実際

$$\begin{aligned} &u = (\Phi_m^{-1} \circ \iota_1)(v), v \in V_m \\ &\Leftrightarrow (v, 0) \in V \times \{0\} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}, u = \Phi_m^{-1}(v, 0) \in M \cap U \\ &\Leftrightarrow \Phi_m(u) = (v, 0) \in V \times \{0\}, u \in U_m \\ &\Leftrightarrow \varphi_m(u) = v, v \in V_m, u \in U_m \end{aligned}$$

また、$U_m \cap U_{m'} \neq \emptyset$ なるとき

$$(\varphi_m | U_m \cap U_{m'}) \circ (\varphi_{m'} | U_m \cap U_{m'})^{-1} = \pi_1 \circ (\Phi_m | U_m \cap U_{m'}) \circ (\Phi_{m'} | U_m \cap U_{m'})^{-1} \circ \iota_1$$

は C^k 級微分同相であり $\iota_1 : V_m \to \mathbb{R}^n$ は線型単射なので
$\iota \circ \varphi_m^{-1} = \iota \circ \Phi_m^{-1} \circ \iota_1 = \Phi_m^{-1} \circ \iota_1 : V_m \to \mathbb{R}^n$ は C^k 級埋め込みとなる。これより (5) が従う。

(5) $\Rightarrow$ (2): 任意の $x \in M$ に対し $\lambda \in \Lambda$ が存在し $x \in U_\lambda$ となる。U_λ は M の開集合なので $\mathbb{R}^n$ の開集合が存在して $U_\lambda = M \cap U$ と表される。そこで $V = \varphi_\lambda(U_\lambda), g = \iota \circ \varphi_\lambda^{-1} : V \to \mathbb{R}^n$ と置けば $g \in C^k(V;\mathbb{R}^n)$ は 埋め込みとなり $M \cap U = U_\lambda = g(V)$ となる。

2. ユークリッド空間に埋め込まれた部分多様体の接空間

M を $\mathbb{R}^n$ に埋め込まれた d 次元 C^k 級部分多様体とし $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ を M の座標近傍系とする。$x \in M$ に対し

$$\mathcal{T}_x = \{(\lambda, \xi) \in \Lambda \times \mathbb{R}^d ; x \in U_\lambda\}$$

と置く。$(\lambda,\xi),(\mu,\eta)\in\mathcal{T}_x$ とすると $x\in U_\lambda\cap U_\mu$ となる。このとき

$$\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1}=(\varphi_\mu|U_\lambda\cap U_\mu)\circ(\varphi_\lambda|U_\lambda\cap U_\mu)^{-1}:\varphi_\lambda(U_\lambda\cap U_\mu)\to\varphi_\mu(U_\lambda\cap U_\mu)$$

の点 $\varphi_\lambda(x)\in\mathbb{R}^d$ に於ける微分係数 $(\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1})'(\varphi_\lambda(x))\in L(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ が ξ を η に写すとき $(\lambda,\xi)\sim(\mu,\eta)$ と定義する：

$$(\lambda,\xi)\sim(\mu,\eta)\underset{def.}{\Longleftrightarrow}(\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1})'(\varphi_\lambda(x))\xi=\eta$$

この関係 $\sim$ は $\mathcal{T}_x$ に於ける同値関係となる事を示そう。

反射律： $(\lambda,\xi)\sim(\lambda,\xi)$ なる事は $(\varphi_\lambda\circ\varphi_\lambda^{-1})'(\varphi_\lambda(x))\xi=(id)'(\varphi_\lambda(x))\xi=\xi$ より従う。

対称律： $(\lambda,\xi)\sim(\mu,\eta)$ ならば $(\mu,\eta)\sim(\lambda,\xi)$ なる事は、仮定 $(\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1})'(\varphi_\lambda(x))\xi=\eta$ 及び $(\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1})'(\varphi_\lambda(x))\in GL(\mathbb{R}^d)$ 更にその逆が

$$\left((\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1})'(\varphi_\lambda(x))\right)^{-1}=(\varphi_\lambda\circ\varphi_\mu^{-1})'(\varphi_\mu(x))$$

で与えられる事より従う。

推移律：$(\lambda,\xi)\sim(\mu,\eta)$ 及び $(\mu,\eta)\sim(\nu,\zeta)$ 即ち

$$\begin{aligned}(\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1})'(\varphi_\lambda(x))\xi=&\ \eta\\(\varphi_\nu\circ\varphi_\mu^{-1})'(\varphi_\mu(x))\eta=&\ \zeta\end{aligned}$$

を仮定すると

$$\begin{aligned}&(\varphi_\nu\circ\varphi_\lambda^{-1})'(\varphi_\lambda(x))\xi\\&=\left((\varphi_\nu\circ\varphi_\mu^{-1})\circ(\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1})\right)'(\varphi_\lambda(x))\xi\\&=(\varphi_\nu\circ\varphi_\mu^{-1})'\left((\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1})(\varphi_\lambda(x))\right)\circ(\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1})'(\varphi_\lambda(x))\xi\\&=(\varphi_\nu\circ\varphi_\mu^{-1})'(\varphi_\mu(x))\eta=\zeta\end{aligned}$$

となるので $(\lambda,\xi)\sim(\nu,\zeta)$ が従う。

$\mathcal{T}_x$ を同値関係 $\sim$ で割った商集合を $\widetilde{T_xM}$ と表し (λ,ξ) の属す同値類を $[\lambda,\xi]_x$ と表そう：

- $\widetilde{T_xM}=\mathcal{T}_x/\sim$
- $(\mu,\eta)\in[\lambda,\xi]_x\Longleftrightarrow(\lambda,\xi)\sim(\mu,\eta)\Longleftrightarrow(\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1})'(\varphi_\lambda(x))\xi=\eta$

$x\in U_\lambda$ なる $\lambda\in\Lambda$ を一つ取り $\xi\in\mathbb{R}^d$ に対し $\alpha_x^\lambda(\xi)=[\lambda,\xi]_x$ と定めると
写像 $\alpha_x^\lambda:\mathbb{R}^d\to\widetilde{T_xM}$ が定まる。

$$\begin{aligned}\alpha_x^\lambda(\xi)=\alpha_x^\lambda(\xi')&\Longleftrightarrow[\lambda,\xi]_x=[\lambda,\xi']_x\\&\Longleftrightarrow(\varphi_\lambda\circ\varphi_\lambda^{-1})'(\varphi_\lambda(x))\xi=\xi'\Longleftrightarrow\xi=\xi'\end{aligned}$$

より α_x^λ は単射であり任意の $(\mu,\eta)\in\mathcal{T}_x$ に対し $\xi=(\varphi_\lambda\circ\varphi_\mu^{-1})'(\varphi_\mu(x))\eta$ と置くと $(\mu,\eta)\sim(\lambda,\xi)$ となるから $\alpha_x^\lambda(\xi)=[\lambda,\xi]_x=[\mu,\eta]_x$ 即ち α_x^λ は全射となる。$\mathbb{R}^d$ の線型構造は α_x^λ により $\widetilde{T_xM}$ の線型構造を定める。
即ち $\widetilde{T_xM}$ に於ける加法とスカラー倍は

$$\alpha_x^\lambda(\xi)+\alpha_x^\lambda(\xi')=\alpha_x^\lambda(\xi+\xi'),\ a\alpha_x^\lambda(\xi)=\alpha_x^\lambda(a\xi)$$

で定義され $\alpha_x^\lambda:\mathbb{R}^d\to\widetilde{T_xM}$ は線型同型となる。また

$$\alpha_x^\mu\circ(\alpha_x^\lambda)^{-1}=(\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1})'(\varphi_\lambda(x))$$

は $\mathbb{R}^d$ から $\mathbb{R}^d$ への線型同型となる。

このように定まる d 次元ベクトル空間 $\widetilde{T_xM}$ を x に於ける M の**接空間**と謂う。

一方、接空間を $\mathbb{R}^n$ の曲線の接ベクトルの全体として捉える方法も有る：

$$T_xM=\{\xi\in\mathbb{R}^n; 0 \text{ を含む開区間 } I\subset\mathbb{R} \text{ で定義された}\gamma\in C^1(I;\mathbb{R}^n) \text{ が存在して}$$
$$\gamma(I)\subset M,\gamma(0)=x,\gamma'(0)=\xi\ \}$$

このとき次が成り立つ：

定理 2. M を $\mathbb{R}^n$ に埋め込まれた d 次元 C^k 級部分多様体とし $x\in M$ とする。定理 1 の局所表示により x は

$$x=L_\sigma(v,f(v))=g(v)=(\Phi^{-1}\circ\iota_1)(v)=(\iota\circ\varphi_\lambda^{-1})(v),\ v\in V=\varphi_\lambda(U_\lambda),$$
$$h(x)=0$$

と表されているものとする。このとき

$$T_xM=L_\sigma(G(f'(v)))=\mathrm{Im}\ g'(v)=\mathrm{Im}(\Phi^{-1}\circ\iota_1)'(v)=\mathrm{Im}(\iota\circ\varphi_\lambda^{-1})'(v)=\mathrm{Ker}\ h'(x)$$

が成り立つ。これより T_xM は d 次元ベクトル空間の構造を持つ。

(証明) $L_\sigma(G(f'(v)))\subset T_xM$ なる事：

$$G(f'(v))=\{(\eta,f'(v)\eta)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{n-d};\eta\in\mathbb{R}^d\}$$

である事に注意して $\eta\in\mathbb{R}^d$ を任意に取る。$\varepsilon>0$ が存在して $B(v;\varepsilon|\eta|)\subset V$ となる。$t\in I_\varepsilon=(-\varepsilon,\varepsilon)$ に対し $\gamma(t)=L_\sigma(v+t\eta,f(v+t\eta))$ と置くと $\gamma\in C^1(I_\varepsilon;\mathbb{R}^n),\gamma(I_\varepsilon)\subset L_\sigma(G(f))=M\cap U\subset M,\gamma(0)=L_\sigma(v,f(v))=x,\gamma'(0)=L_\sigma(\eta,f'(v)\eta)\in L_\sigma(G(f'(v)))$ となる。これより $L_\sigma(G(f'(v)))\subset T_xM$ が従う。

$\mathrm{Im}\ g'(v)=\mathrm{Im}(\Phi^{-1}\circ\iota_1)'(v)=\mathrm{Im}(\iota\circ\varphi_\lambda^{-1})'(v)\subset T_xM$ なる事：

$g=\Phi^{-1}\circ\iota_1=\iota\circ\varphi_\lambda^{-1}:V=\varphi_\lambda(U_\lambda)\to\mathbb{R}^n$ を C^k 級の埋め込みとする。任意の $\eta\in\mathbb{R}^d$ に対し $g'(v)\eta\in T_xM$ である事を示せば良い。$\varepsilon>0$ が存在し $B(v;\varepsilon|\eta|)\subset V$ となる。$t\in I_\varepsilon=(-\varepsilon,\varepsilon)$

に対し $\gamma(t) = g(v + t\eta)$ と置くと $\gamma \in C^1(I_\varepsilon; \mathbb{R}^n), \gamma(I_\varepsilon) \subset g(V) = M \cap U \subset M, \gamma(0) = g(v) = x,$
$g'(v)\eta = \gamma'(0) \in T_x M$ が従う。

$T_x M \subset \mathrm{Ker}\ h'(x)$ なる事：

任意の $\xi \in T_x M$ に対し $\xi = \gamma'(0), x = \gamma(0), \gamma(I) \subset M$ なる $\gamma \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ が存在する。γ の連続性により $\varepsilon > 0$ が存在し $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon) \subset I, \gamma(I_\varepsilon) \subset M \cap U$ となる。よって任意の $t \in I_\varepsilon$ に対し $(h \circ \gamma)(t) = h(\gamma(t)) \in h(M \cap U) = \{0\}$ となり $0 = (h \circ \gamma)'(0) = h'(\gamma(0))\gamma'(0) = h'(x)\xi$ が従う。即ち $\xi \in \mathrm{Ker}\ h'(x)$ となる。

$L_\sigma(G(f'(v)) = \mathrm{Im}\ g'(v) = \mathrm{Im}(\Phi^{-1} \circ \iota_1)'(v) = \mathrm{Im}(\iota \circ \varphi_\lambda^{-1})'(v) = \mathrm{Ker}\ h'(x) = T_x M$ なる事：

$L_\sigma(G(f'(v))) \subset T_x M \subset \mathrm{Ker}\ h'(x)$ 及び $\mathrm{Im}\ g'(v) = \mathrm{Im}(\Phi^{-1} \circ \iota_1)'(v) = \mathrm{Im}(\iota \circ \varphi_\lambda^{-1})'(v) \subset T_x M \subset \mathrm{Ker}\ h'(x)$ に於いて両端は夫々$\mathbb{R}^n$ の部分空間であるから、それらの次元が等しい事を示せば充分である。
$\mathbb{R}^d \ni \eta \mapsto (\eta, f'(v)\eta) \in \mathbb{R}^n$ 及び $g'(v) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ は線型単射であり $h'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ は線型全射なので

$$\dim L_\sigma(G(f'(v))) = \dim G(f'(v)) = d, \quad \dim \mathrm{Im}\ g'(v) = d,$$

$$\dim \mathrm{Ker}\ h'(x) = n - (n - d) = d$$

となる。これが示すべき事であった。

定理２の系.

$$h'(x)(T_x M) = 0 \in \mathbb{R}^{n-d}$$

即ち任意の $\xi \in T_x M$ に対し $h'(x)\xi = 0$ となる。ここに $h'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ は線型全射である。$d = n - 1$ の場合 $h'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は線型汎函数であり、$\mathbb{R}^n$ の内積 $\cdot$ を基礎とした同型 $(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$ により $\nabla h(x) \in \mathbb{R}^n$ と同一視される。即ち $\nabla h(x) \cdot \xi = h'(x)\xi = 0$ となる。これは $\dim \mathrm{span} \nabla h(x) = 1$ 且つ $\nabla h(x) \in (T_x M)^\perp$ を意味する。

　最後に $T_x M$ と $\widetilde{T_x M}$ との関係を考えよう。$x \in M$ に対し $x \in U_\lambda$ なる $\lambda \in \Lambda$ を一つ取る。このとき

$$\beta_x([\lambda, \xi]_x) = (\iota \circ \varphi_\lambda^{-1})'(\varphi_\lambda(x))\xi$$

と置くと

$$\beta_x : \widetilde{T_x M} \to \mathrm{Im}(\iota \circ \varphi_\lambda)'(\varphi_\lambda(x)) = T_x M$$

が定まる。等式 $\beta_x = (\iota \circ \varphi_\lambda^{-1})'(\varphi_\lambda(x)) \circ (\alpha_x^\lambda)^{-1}$ に於いて $\alpha_x^\lambda : \mathbb{R}^d \to \widetilde{T_x M}$ は線型同型であり $(\iota \circ \varphi^{-1})'(\varphi_\lambda(x)) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ は線型単射であるから β_x は線型同型となる。これにより $T_x M$ と $\widetilde{T_x M}$ とを同一視する。

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{T_xM} \arrow[rr, "\beta_x"] & & T_xM = \mathrm{Im}(\iota\circ\varphi_\lambda^{-1})'(\varphi_\lambda(x)) \\
& \mathbb{R}^d \arrow[ul, "\alpha_x^\lambda"] \arrow[ur, "(\iota\circ\varphi_\lambda^{-1})'(\varphi_\lambda(x))"'] &
\end{tikzcd}
$$

3．滑らかな境界を持つ開集合の境界近傍の局所表示

この節では滑らかな境界を持つ開集合の境界近傍の同値な局所表示に就いて纏めて置こう。即ち、境界 $\partial\Omega$ が $d = n-1$ 次元部分多様体を成す開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ の境界近傍 ($\partial\Omega \cap U \neq \emptyset$ なる開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$) による特徴付けを与えよう。

定理 3． 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ で、その境界 $\partial\Omega$ が C^k 級の $(n-1)$ 次元部分多様体を成すものに対し、次は同値である：

(1)(**片側配置条件 I**）任意の $x_0 \in \partial\Omega$ 及び x_0 の任意の開近傍 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対し U から $\partial\Omega$ を除いた集合 $U \setminus \partial\Omega$ は $U \cap \Omega$ 以外の連結成分を持つ。

(2)(**片側配置条件 II**）任意の $x_0 \in \partial\Omega$ 及び x_0 の任意の開近傍 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対し $U \cap \Omega$ は $U \setminus \partial\Omega$ と一致しない：$U \cap \Omega \neq U \setminus \partial\Omega$

(3)(**片側配置条件 III**）任意の $x_0 \in \partial\Omega$ 及び x_0 の任意の開近傍 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対し U から Ω の閉包 $\overline{\Omega}$ を除いた集合 $U \setminus \overline{\Omega}$ は空でない：$U \setminus \overline{\Omega} \neq \emptyset$

(4)(**埋め込み写像による局所表示**）任意の $x_0 \in \partial\Omega$ 及び任意の $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus T_{x_0}\partial\Omega$ に対して x_0 の開近傍 $U \subset \mathbb{R}^n$, 開集合 $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\delta > 0$ 及び C^k 級埋め込み写像 $g : V \to \mathbb{R}^n$ が存在し

$$
\Psi(t, v) = t\xi + g(v),\ t \in I_\delta \equiv (-\delta, \delta),\ v \in V
$$

で定まる写像 $\Psi : I_\delta \times V \to U$ は C^k 級微分同相写像であり

$$
\begin{cases}
\partial\Omega \cap U = \Psi(\{0\} \times V), \\
\Omega \cap U = \Psi((-\delta, 0) \times V) \text{ または } \Psi((0, \delta) \times V)
\end{cases}
$$

が成立つ。

(5)(**沈め込み写像による局所表示**）任意の $x_0 \in \partial\Omega$ に対し x_0 の開近傍 $U \subset \mathbb{R}^n$ 及び C^k 級沈め込み写像 $h : U \to \mathbb{R}$ が存在し

$$
\begin{cases}
\partial\Omega \cap U = h^{-1}(\{0\}) = \{u \in U; h(u) = 0\}, \\
\Omega \cap U = h^{-1}((-\infty, 0)) = \{u \in U; h(u) < 0\}
\end{cases}
$$

が成立つ。

（証明）　$\mathbb{R}^n$ の開集合 $U \setminus \partial\Omega$ は

$$U \setminus \partial\Omega = (U \cap \Omega) \cup (U \setminus \bar{\Omega})$$

と互いに共通部分を持たない二つの開集合 $U \cap \Omega$ と $U \setminus \bar{\Omega}$ の合併で表されるので (1) と (2) と (3) は同値である。そこで (2)⇒(4)⇒(5)⇒(2) を証明する。その前に定理 1 及び定理 2 により導かれる一般的状況に就いて纏めて置こう。先ず定理 1 により x_0 の開近傍 $U_0 \subset \mathbb{R}^n$, 開集合 $V_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 及び C^k 級埋め込み写像 $g_0 : V_0 \to \mathbb{R}^n$ が存在し

$$\partial\Omega \cap U_0 = g_0(V_0) = \{g_0(v) \in \mathbb{R}^n; v \in V_0\}$$

が成立つ。$v_0 \in V_0$ が唯一存在して $x_0 = g_0(v_0)$ を満たす。定理 2 より

$$T_{x_0}\partial\Omega = \mathrm{Im}\ g'(v_0)$$

は $\mathbb{R}^n$ の $(n-1)$ 次元部分空間を成す。$\xi \in \mathbb{R}^n \backslash T_{x_0}\partial\Omega$ を任意に取る。ξ は $T_{x_0}\partial\Omega$ の $(n-1)$ 個の元から成る基底と合せて $\mathbb{R}^n$ の基底を成す。

　さて $(t, v) \in \mathbb{R} \times V_0$ に対し $\Psi_0(t, v) = t\xi + g(v)$ と置く事で C^k 級の写像 $\Psi_0 : \mathbb{R} \times V_0 \to \mathbb{R}^n$ が定まる。Ψ_0 の $(t, v_0) \in \mathbb{R} \times V_0$ に於けるヤコビ行列は

$$\Psi_0'(t, v_0) = [\xi | g'(v_0)]$$

と列ベクトル表示され ξ と $g'(v_0)$ の $(n-1)$ 個の列ベクトルの成す計 n 個のベクトルは $\mathbb{R}^n$ の基底を成すので

$$\det \Psi_0'(t, v_0) \neq 0$$

が従う。逆写像定理より $v_0 \in V \subset V_0,\ x_0 \in U \subset U_0$ なる開集合 $V \subset \mathbb{R}^{n-1}, U \subset \mathbb{R}^n$ 及び $\delta > 0$ が存在し $U = g_0(V)$ で

$$\Psi \equiv \Psi_0 | I_\delta \times V : I_\delta \times V \to U$$

は C^k 級微分同相写像となる。このとき

$$\begin{aligned}\partial\Omega \cap U &= (\partial\Omega \cap U_0) \cap g_0(V) = g_0(V_0) \cap g_0(V) = g_0(V) \\ &= \Psi_0(\{0\} \times V) = \Psi(\{0\} \times V)\end{aligned}$$

が従う。ここで V は小さく取り直す事により一般性を失う事なく凸であるとして良い。

　さて

$$U_\pm = \{\Psi(t, v) \in \mathbb{R}^n;\ t \in I_\delta, \pm t > 0, v \in V\}$$

と置く。このとき

$$U \backslash (U_+ \cup U_-) = \Psi(\{0\} \times V) = \partial\Omega \cap U \subset \partial\Omega$$

となるから

$$\begin{aligned}&\Omega \cap (U \backslash (U_+ \cup U_-)) \subset \Omega \cap \partial\Omega = \emptyset, \\ &\Omega \cap U = \Omega \cap (U_+ \cup U_-) = (\Omega \cap U_+) \cup (\Omega \cap U)\end{aligned}$$

が従う。一方 $x_0 \in \partial\Omega \subset \bar{\Omega}$ より $\Omega \cap U \neq \emptyset$ となっている。さて、次の主張：

$\Omega\cap U_\pm\neq\emptyset$ ならば $\Omega\cup U_\pm=U_\pm$ なる事

を示そう。$\Omega\cap U_+\neq\emptyset$ を仮定すると $x\in\Omega\cap U_+=\Omega\cap\Psi((0,\delta)\times V)$ が存在する事になる。いま $x'\in U_+=\Psi((0,\delta)\times V)$ を任意に取る。$(t,v),(t',v')\in(0,\delta)\times V$ が一意的に定まり $x=\Psi(t,v),x'=\Psi(t',v')$ と表される。さて $\theta\in[0,1]$ に対し

$$x(\theta)=\Psi((1-\theta)t+\theta t',(1-\theta)v+\theta v')$$

と置く。$t,t'\in(0,\delta)$ により $(1-\theta)t+\theta t'\in(0,\delta)$ であり V の凸性により $(1-\theta)v+\theta v'\in V$ となり $x([0,1])\subset U_+$ が従う。

さて、ここで $x'\notin\Omega$ であると仮定し矛盾を導こう。$x(0)=x\in\Omega$ により

$$\theta^*=\sup\{\theta\in[0,1];x(\theta)\in\Omega\}$$

が定まる。これより直ちに $x(\theta^*)\in x([0,1])\subset U_+$ が従う。上限の性質により数列 $\{\theta_j\}\subset[0,1]$ が存在し $x(\theta_j)\in\Omega$ 且つ $\theta_j\uparrow\theta^*(j\to\infty)$ が成立つ。$\Psi:I_\delta\times V\to\mathbb{R}^n$ の連続性より

$$x(\theta^*)=\lim_{j\to\infty}x(\theta_j)\in\bar{\Omega}$$

が従う。このときもし $x(\theta^*)\in\Omega$ ならば Ψ の連続性により $\varepsilon>0$ が存在して $x(\theta^*+\varepsilon)\in\Omega$ となってしまい θ^* の上限性に反する。故に $x(\theta^*)\in\bar{\Omega}\backslash\Omega=\partial\Omega$ 更には $x(\theta^*)\in\partial\Omega\cap U_+\subset\partial\Omega\cap U=\Psi(\{0\}\times V)$ が従う。これは $x(\theta^*)=\Psi((1-\theta^*)t+\theta^*t',\ (1-\theta^*)v+\theta^*v')\in\Psi((0,\delta)\times V)$ である事に反する。従って $x'\in\Omega$ となる。

よって任意の $x'\in U_+$ は $x'\in\Omega$ となる事が示された。これは $U_+\subset\Omega$ を意味する。故に $\Omega\cap U_+\neq\emptyset$ なるとき $\Omega\cap U_+=U_+$ となる事が示された。U_- に就いても同様である。

以上の議論を踏まえ (2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (2) の証明を与えよう。

(2) $\Rightarrow$ (4) $\partial\Omega=\Psi(\{0\}\times V)$ は既に示されているので「$\Omega\cap U=U_+$ または U_- のどちらかである事」を示せば良い。$\Omega\cap U=(\Omega\cap U_+)\cup(\Omega\cap U_-)$ であり「$\Omega\cap U_\pm\neq\emptyset\Rightarrow\Omega\cap U_\pm=U_\pm$」が示されているので「$\Omega\cap U_+\neq\emptyset$ 且つ $\Omega\cap U_-\neq\emptyset$」が起こり得ない事を示せば充分である。さて、これを仮定すると $\Omega\cap U_\pm=U_\pm$ が従うので $\Omega\cap U=U_+\cup U_-$ を得る。一方 $\Psi(\{0\}\times V)=\partial\Omega\cap U=U\backslash(U_+\cup U_-)$ より $U=U_+\cup U_-\cup\Psi(\{0\}\times V)=(U_+\cup U_-)\cup(\partial\Omega\cap U)$ 更には $\Omega\cap U=U_+\cup U_-=U\setminus\partial\Omega$ が従う。これは (2) に反する。

(4) $\Rightarrow$ (5) $h=\pi_1\circ\Psi^{-1}:U\to I_\delta$ とする。ここに $\pi_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ は第 1 成分への射影とし $\xi\in\mathbb{R}^n\backslash T_{x_0}\partial\Omega$ に対し $\Omega\cap U=\Psi((-\delta,0)\times V)$ ならば Ψ の定義は (4) のままとし $\Omega\cap U=\Psi((0,\delta)\times V)$ ならば Ψ の定義に於いて ξ を $-\xi$ に置き換えたものを考えるものとする。このとき $u\in U,\ t\in I_\delta$ に対し

$$h(u)=t\ \Leftrightarrow\ \exists1v\in V:u=\Psi(t,v)$$

特に $x_0\in\partial\Omega\cap U$ に対し $x_0=\Psi(0,v_0)$ なる $v_0\in V$ が唯一つ存在する。このとき

$$(\Psi^{-1})'(x_0)=(\Psi'(0,v_0))^{-1}$$

は線型同型で

$$h'(x_0)=\pi_1\circ(\Psi'(0,v_0))^{-1}\neq0$$

が従うので線型写像 $h'(x_0):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ は全射となり h は沈め込みである事が分かる。また定義により

$$\begin{aligned}h^{-1}(\{0\}) &= \{u\in U; h(u)=0\}\\ &= \{u\in U;\ \exists 1v\in V: u=\Psi(0,v)\xi\}\\ &= \Psi(\{0\}\times V)\\ &= \partial\Omega\cap U,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h^{-1}((-\infty,0)) &= \{u\in U; h(u)<0\}\\ &= \{u\in U; \exists t<0,\ \exists v\in V: u=\Psi(t,v)\}\\ &= \Psi((-\infty,0)\times V)\\ &= \Omega\cap U\end{aligned}$$

が従う。

(5) $\Rightarrow$ (2)　与えられた沈め込み $h:U\to\mathbb{R}$ に対し曲線

$$\gamma:\mathbb{R}\ni t\mapsto x_0+t(\nabla h)(x_0)\in\mathbb{R}^n$$

を考える。このとき $(h\circ\gamma)(0)=h(x_0)=0$ 及び $(h\circ\gamma)'(0)=h'(\gamma(0))\gamma'(0)=h'(x_0)(\nabla h)(x_0)=|(\nabla h)(x_0)|^2>0$ が成立つ。従って $\delta>0$ が存在し任意の $t\in(0,\delta)$ に対し $\gamma(t)\in U$ 及び $(h\circ\gamma)(t)>0$ となる。仮定 $\partial\Omega\cap U=h^{-1}(\{0\})$ より任意の $t\in(0,\delta)$ に対し $\gamma(t)\in U\backslash\partial\Omega$ となる一方、仮定 $\Omega\cap U=h^{-1}((-\infty,0))$ より任意の $t\in(0,\delta)$ に対し $\gamma(t)\notin U\cap\Omega$ が成立つ。故に $U\backslash\partial\Omega\neq U\cap\Omega$ が従う。

定義　開集合 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ は、その境界 $\partial\Omega$ が C^k 級の $(n-1)$ 次元部分多様体を成し、定理 3 の同値な条件 (1)-(5) を満たすとき**境界の片側に在る**と謂う。

さて、開集合 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ は境界 $\partial\Omega$ の片側に在るとする。$x_0\in\partial\Omega$ に於ける接空間 $T_{x_0}\partial\Omega$ を

$$\begin{aligned}T_{x_0}\partial\Omega\ =\{\xi\in\mathbb{R}^n; 0\in I \text{ なる開区間 } I\subset\mathbb{R} \text{ 上定義された } \gamma\in C^1(I;\mathbb{R}^n) \text{ が}\\ \text{存在して } \gamma(I)\subset\partial\Omega,\ \gamma'(0)=\xi\}\end{aligned}$$

と定める。定理 2 より $T_{x_0}\partial\Omega$ は $\mathbb{R}^n$ の $(n-1)$ 次元部分空間を成し、局所零集合表示を与える任意の沈め込み $h\in C^k(U;\mathbb{R})$ に対し

$$\nabla h(x_0)\perp T_{x_0}\partial\Omega$$

が成立つ。即ち $\mathbb{R}^n$ は

$$\mathbb{R}^n=(\mathrm{span}\nabla h(x_0))\oplus T_{x_0}\partial\Omega$$

と直交分解される。

定理 4.　開集合 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ は境界 $\partial\Omega$ の片側に在るとし $x_0\in\partial\Omega$ とする。このとき空でない凸開集合 $C^\pm_{x_0}\subset\mathbb{R}^n$ が唯一組存在して次を満たす。

(1)　$C_{x_0}^+ \cup C_{x_0}^- = \mathbb{R}^n \setminus T_{x_0}\partial\Omega,\ C_{x_0}^+ \cap C_{x_0}^- = \emptyset$

(2)　任意の $a>0$ に対して $aC_{x_0}^\pm = C_{x_0}^\pm$　即ち　$\eta \in C_{x_0}^\pm,\ a>0 \Rightarrow a\eta \in C_{x_0}^\pm$

(3)　$-C_{x_0}^\pm = C_{x_0}^\mp$ 即ち　$\eta \in C_{x_0}^\pm \Leftrightarrow -\eta \in C_{x_0}^\mp$

(4)　定理 3 の (5) を満たす任意の沈め込み写像 $h : U \to \mathbb{R}$ 及び任意の $\eta \in C_{x_0}^\pm$ に対し
　$\pm\nabla h(x_0)\cdot\eta > 0$

(5)　任意の $\eta \in C_{x_0}^+$ 及び $0 \in I$ なる開区間 I で定義された $\gamma(0) = x_0, \gamma'(0) = \eta$ なる任意の曲線 $\gamma \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ に対し $\delta > 0$ が存在し

$$\gamma((-\delta,0)) \subset \Omega \text{ 且つ } \gamma((0,\delta)) \not\subset \bar{\Omega}$$

(6)　任意の $\eta \in C_{x_0}^-$ 及び $0 \in I$ なる開区間 I で定義された $\gamma(0) = x_0.\gamma'(0) = \eta$ なる任意の曲線 $\gamma \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ に対し $\delta > 0$ が存在し

$$\gamma((-\delta,0)) \not\subset \bar{\Omega} \text{ 且つ } \gamma((0,\delta)) \subset \Omega$$

（証明）　定理 3 の (5) を満たす沈め込み $h : U \to \mathbb{R}$ を一つ取り

$$C_{x_0}^\pm = \{\eta \in \mathbb{R}^n; \pm\nabla h(x_0)\cdot\eta > 0\}$$

と定める。$C_{x_0}^+ = (h'(x_0))^{-1}((0,\infty)),\ C_{x_0}^- = (h'(x_0))^{-1}((-\infty,0))$ とも表される。これより (1)-(3) は直ちに従う。次に (5) を示そう。$\eta \in C_{x_0}^+$ 及び $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = \eta$ なる $\gamma \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ を任意に取る。このとき

$$\begin{aligned}
&(h\circ\gamma)(0) = h(x_0) = 0,\\
&(h\circ\gamma)'(0) = h'(\gamma(0))\gamma'(0) = h'(x_0)\eta = \nabla h(x_0)\cdot\eta > 0
\end{aligned}$$

となるから $\delta > 0$ が存在し $|t| \le \delta$ なる任意の t に対して

$$(h\circ\gamma)'(t) \ge \frac{1}{2}\nabla h(x_0)\cdot\eta > 0$$

となる。従って、等式

$$(h\circ\gamma)(t) = \int_0^t (h\circ\gamma)'(s)ds,\ t \in I$$

より $(h\circ\gamma)(0,\delta]) > 0,\ (h\circ\gamma)([-\delta,0)) < 0$ が成立つ。これは $(h\circ\gamma)((0,\delta]) \not\subset \bar{\Omega}$, $(h\circ\gamma)([-\delta,0)) \subset \Omega$ を意味し (5) が成立つ。(6) の証明も同様である。(5) 及び (6) により $\mathbb{R}^n \setminus T_{x_0}\partial\Omega$ の二つの連結成分 $C_{x_0}^\pm$ は沈め込みの取り方に依らず定まる事が分かる。これより (4) が従う。

参考文献： J.J. Duistermaat and J.A.C. Kolk, Multidimensional Real Analysis, Cambridge
S. Lang, Differentiable Manifolds, Addison-Wiley
杉浦光夫、解析入門、東京大学出版会
山﨑圭次郎、解析学概論、共立出版