様々なる臨界冪

小澤　徹

非線型偏微分方程式の研究では，非線型項を少し一般化しただけでも様々な臨界冪 (critical power) が登場する．次の形の非線型シュレディンガー方程式

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda |u|^{p-1} u \tag{NLS}$$

を例に取って考える．ここに，u は $1+n$ 変数 $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ を持つ複素数値函数，∂_t は t 変数に関する偏微分，Δ は x 変数に関するラプラス作用素，λ と p は実定数で $p>1$ とする．冪 p の許される範囲に立ちはだかる壁が臨界冪である．典型的なものに限って紹介しよう．

1. ソボレフ (Sobolev) の臨界冪　$p = 1 + 4/(n-2)$.

言わずと知れた臨界冪で 3 次元以上で意味を持つ．ソボレフの埋蔵定理 $H^1 \hookrightarrow L^{2n/(n-2)}$ を由来とする．ここに $L^q = L^q(\mathbb{R}^n)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の q 乗可積分函数の成す空間，$H^1 = H^1(\mathbb{R}^n)$ は一階導函数が L^2 に属す L^2 函数の成す空間である．ソボレフの臨界冪は $p+1 = 2n/(n-2)$ なる数である．L^{p+1} ノルムは (NLS) のポテンシャルエネルギーとして現れる．$\lambda > 0$ の場合，p が劣臨界 (subcritical) $p < 1 + 4/(n-2)$ では有限エネルギー解 (H^1 解) は一意大域的に存在するが，優臨界 (superctirical) $p > 1 + 4/(n-2)$ では一意性は未解決であり，臨界 (critical) $p = 1 + 4/(n-2)$ では Bourgain 等の部分的結果が知られている．$\lambda < 0$ の場合，p が優臨界では定常的 H^1 解は存在しない．臨界的定常問題は山辺の問題に相当し，この四半世紀でソボレフの不等式を巡って数学の新概念を続々と生み出す原動力となった．

2. 擬共形冪 (pseudo-conformal power)　$p = 1 + 4/n$.

これは非線型波動方程式の共形冪 $p = 1 + 4/(n-1)$ に対応する (ペンローズのミンコフスキ時空の共形コンパクト化に現れる) ものであり，特別な対称性に由来する幾何学的意味はもとより $SL(2;\mathbb{R})$ に関する表現論的意義を持つ．解析的には，L^2 ノルムを不変に保つスケール変換で (NLS) を不変に保つ唯一の冪であり，ストリッカーツ評価で時空両変数に関する可積分性の一致する対角型の場合に対応する唯一の冪でもある．ストリッカーツ評価は対角型の場合 (線型偏微分作用素の) 特性曲面上のフーリエ変換の有界性 (フーリエ制限定理) と同値である．これを軸とした掛谷予想，ボッホナー・リース予想に関する Tao による指摘もある．$\lambda > 0$ の場合 p が優臨界 $p > 1 + 4/n$ ならエネルギー散乱が成立し $\lambda < 0$ の場合優臨界又は臨界ならば爆発解が存在する．

3. ストラウス (Strauss) の臨界冪　$p = (n + 2 + \sqrt{n^2 + 12n + 4})/(2n)$.

非線型波動方程式でジョンが発見した臨界冪 $1 + \sqrt{2}$ に因むものであるが，n 次元の (NLS) に対して初めて書き下した人物の名を冠して呼ぶのが (NLS) の研究では普通の様である．p が優臨界である事と，解の L^{p+1} ノルムの p 乗の時間に関する可積分性は同値であり，(NLS) に限らず小振幅解や散乱理論にしばしば登場する臨界冪である．(NLS) の散乱理論は臨界にも拡張される．

4. 藤田の臨界冪　$p = 1 + 2/n$.

(NLS) では特別な名称で呼ぶ事はないが非線型熱方程式の爆発解の研究では最も重要な臨界冪である．(NLS) の長距離相互作用はここで初めて登場し，優臨界 $p > 1 + 2/n$ で成立する通常の短距離散乱が破綻する境目となる．

さて (NLS) では $p = 3$ 及び 5 が代表的であるが，その数学的意義はこうして臨界冪の観点から論じると次元によって全く異なる事が分かる．非線型相互作用の数学的構造は p と n を一般化して初めて見えて来るものなのである．