微分方程式を巡る 10 の概念

小澤 徹
●早稲田大学理工学術院

未知函数とその導関数の関係式として与えられた方程式を**微分方程式** differential equation といい，独立変数が一つの場合は**常微分方程式** ordinary differential equation，二つ以上の場合は**偏微分方程式** partial differential equation という．

特別な法則を満たす函数族は微分方程式を規定し，特別な微分方程式は解としての函数族を特徴づける．実際，指数函数，三角函数，対数函数などの**初等函数** elementary functions やルジャンドル多項式，エルミート多項式，ベッセル函数，超幾何函数などの**特殊函数** special functions はその代表例である．また， 複素函数論に現れるコーシー・リーマンの偏微分方程式系は正則函数を特徴づけ，ラプラス方程式は調和函数を特徴づける．一方，古典力学におけるニュートンの運動方程式や電磁気学に現れるマクスウェル方程式系をはじめ，物理学のほとんどの基礎理論は微分方程式によって記述される．

このように，微分方程式は数学および物理学の土台を形成しているにもかかわらず，微分方程式を基礎に据えた理論体系を展開する入門書は少ない．そればかりか，我が国では高等学校の数学の教科書から微分方程式の項目が消滅し，物理の教科書からは，力学と共通の起源をもつ微分積分法そのものが追放されてから久しく，学問の根幹が不当に歪められた状態が続いており，実に嘆かわしい限りである（個人の感想です）．そのような現状も踏まえ，関連分野とのつながりに配慮しつつ，常微分方程式を中心に重要な 10 の概念を選んで説明することが本稿の目的である．

1——ベクトルとベクトル場

ベクトルとベクトル場は微分方程式に限らず広い分野で用いられる概念である．ベクトルとはベクトル空間の元であり，**ベクトル空間** vector space とは加法とスカラー倍の二つの二項演算が両立的に定義された集合（加法に関し可換群を成し，スカラー倍の作用は 1 を恒等変換として結合的に働くとともにスカラーとベクトルの和のどちらにも分配的に働く集合）を意味する．

ベクトル空間 X における**ベクトル場** vector field とは，各 $x \in X$ に対し x におけるベクトル空間 $T_xX := \{x\} \times X$ の元 $(x, v(x))$ を対応させる写像 $x \mapsto (x, v(x))$ を意味する．ここに T_xX の線型構造（ベクトル空間としての性質）は X から導入されるものとする．$TX := X \times X = \coprod_{x \in X} T_xX$ から第 j 成分への射影を p_j $(j = 1, 2)$ とすると，ベクトル場は $p_1 \circ v = \mathrm{id}$ (X の恒等変換) を満たす写像 $v : X \to TX$ と定義される．ここでもそうであるが，しばしば v と $p_2 \circ v$ を混同して用いる．

2——微分

一変数函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が一点 $a\in\mathbb{R}$ で**微分可能** differentiable at a であるとは，$\alpha\in\mathbb{R}$ および連続函数 $R_f(a:\bullet):\mathbb{R}\ni h\mapsto R_f(a;h)\in\mathbb{R}$ が存在し，二つの条件

$$f(a+h)-f(a)=\alpha h+|h|R_f(a;h), \tag{1}$$
$$R_f(a;h)\to 0\,(h\to 0) \tag{2}$$

が成り立つことである．このとき α は a で一意的に定まるので $f'(a)$ と表し，a における f の**微分係数** differential coefficient という．

f が $\mathbb{R}$ の各点で微分可能であるとき，各 $x\in\mathbb{R}$ に $f'(x)\in\mathbb{R}$ を対応させる函数 $f':\mathbb{R}\ni x\mapsto f'(x)\in\mathbb{R}$ が定まる．この函数 f' を f の**導函数** derivative という．(1) の右辺の第一項 $f'(a)h$ は h について一次であり，第二項 $|h|R_f(a;h)$ は (2) により 一次より高次に消滅する項である．従って一点 a における微分可能性とは，f の変動が a において一次近似可能 (線型化可能) であることを表し，具体的には，その一次部分から定まる写像 $T_a\mathbb{R}\ni(a,h)\mapsto f'(a)h\in\mathbb{R}$ が**線型形式** linear form（$\mathbb{R}$ に値をもつ線型写像）であることを意味する．ここに $T_a\mathbb{R}=\{a\}\times\mathbb{R}$ は a におけるベクトル空間で前節で導入したものである．この線型形式 を $df(a)$ と表し a における**微分** differential at a という．恒等函数 $\mathrm{id}:x\mapsto x$ に対する微分は $(\mathrm{id})'(a)=\mathrm{id}$ より $d(\mathrm{id})(a)(a,h)=(\mathrm{id})'(a)h=\mathrm{id}(h)=h$ で与えられる．これより任意の $h\in\mathbb{R}$ に対し，等式 $df(a)(a,h)=f'(a)d(\mathrm{id})(a)(a,h)$ が従う．即ち $T_a\mathbb{R}$ 上の線型形式としての等式

$$df(a)=f'(a)d(\mathrm{id})(a)$$

が成立する．この等式が任意の $a\in\mathbb{R}$ で成立することを

$$df=f'd(\mathrm{id}) \tag{3}$$

と表す．函数 $f:x\mapsto f(x)$ と函数の値 $f(x)$ とを混同した上さらに双方を y と表し，函数 $\mathrm{id}:x\mapsto x$ と函数の値 x とを混同した上さらに双方を x と表し，さらには導函数 f' を $\dfrac{dy}{dx}$ と表せば，(3) は

$$dy=\frac{dy}{dx}dx$$

なる形を取る．

3——方程式

未知の（求めたい）数学的対象に関する等式を**方程式** equation という．方程式を満たす数学的対象を**解**（即ち答) solution といい，解を決定することを**方程式を解く** to solve an equation という．$x,y\in\mathbb{R}$ に対する等式 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ のように，どんな x,y に対しても成立する等式は**恒等式** identity といい，方程式とは区別して考える．二次方程式等の代数方程式の解は数で与えられ，微分方程式の解は函数で与えられる．

方程式は等式を用いて与えられるものであるが，次の二つの論点:

(A) 解はどのような意味で方程式を満たすのか
(B) 解としてどのような性質をもつものを想定するのか

を明確にしておく必要がしばしば生じる．例を二つ挙げよう．二次方程式 $x^2+1=0$ の解は実数の範囲では存在しないが，複素数の範囲では $\pm i$（i は虚数単位）として二つ存在する．一階の微分方程式 $x\dfrac{dy}{dx}+y=0$ を実数から原点を除いた集合 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上で考え，その解を $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上の滑らかな函数の成すベクトル空間 $C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ の範囲で求めると，解は任意定数 $c\in\mathbb{R}$ を用いて $y=\dfrac{c}{x}$，$x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ と表されるが，実数全体 $\mathbb{R}$ 上で考え，その解を $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ 即ち $C_0^\infty(\mathbb{R})$（有界な台をもつ $\mathbb{R}$ 上の滑らかな函数の成すベクトル空間）の**双対空間** dual space（線型形式の成すベクトル空間) の範囲で求めると, 解は任意定数 $c\in\mathbb{R}$ を用いて $y=c\,(\mathrm{p.v.}\dfrac{1}{x}+\delta)$ と表される．ここに $\mathrm{p.v.}\dfrac{1}{x}$ は $\dfrac{1}{x}$ の**主値** principal value

$$\text{p.v.}\frac{1}{x} : C_0^\infty(\mathbb{R}) \ni \varphi \\ \mapsto \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx \in \mathbb{R},$$

δ は原点における**ディラック分布** Dirac distribution（ディラックのデルタ函数と呼ばれることもある）

$$\delta : C_0^\infty(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto \varphi(0) \in \mathbb{R}$$

である．このように解の概念は (A) (B) に依存して決まるものであり，(A) (B) を明確にして初めて解の概念が成立し，解の**存在** existence と**一意性** uniqueness が意味を成す.

物理学に現れる方程式は, 数学的概念と物理学的概念を等式で結んだ法則を表したものと，物理学的概念の間に成立すべき均衡を等式で表したものが典型的である．前者の例として，質点の加速度と質点に働く力を等式で結んだニュートンの運動方程式や時空の曲率と重力を等式で結んだアインシュタイン方程式があり，質量や重力定数という物理定数が数学的概念と物理学的概念を結び付ける仲介役となっている，後者の例として，電磁気学や流体力学に現れる方程式系があり，何れも注目した点または境界において物理量の入出量の均衡を等式で結んだものである．経済学においては，需要 = 供給を恒等式と見なせばセイの法則であり，方程式と見なせば均衡方程式である．ビートルズの実質最後の曲 “The End”の最後の一節 “And in the end, the love you take is equal to the love you make.” は恒等式と見なせば愛の法則であり，均衡方程式と見なせば愛の方程式である.

多くの物理法則はラグランジアンの時空積分としての作用積分に関する変分問題として定式化され，対応する基礎方程式はオイラー・ラグランジュ方程式として記述されるので，この定式化では，ラグランジアンを与えることが物理法則を規定することと同値となり，基礎方程式を導く出発点となる．ラグランジアンの導入には自由系（非摂動系）や対称性の設定が不可欠であり，それだけである程度の形が決まってしまう.

ちなみに，ラグランジュ力学に現れるラグランジアンが運動項とポテンシャル項の差で与えられる背景には，双方のエネルギーの均衡を実現する経路のみが物理現象を正しく記述するのであるという考え方が横たわっている.

4——微分積分の基本定理

微分積分の基本定理 fundamental theoren of calculus とは大雑把に言うと「微分と積分は互いの逆演算である」ことを主張するものであり，滑らかな函数 f に対しては等式

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) \tag{4}$$

で表され，微分方程式の分野全般にわたる基礎を成す定理である．これは数列 $(a_n; n \geq 0)$ の差分の総和に関する等式

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$$

の連続版と位置づけられるとともに，(4) の証明の指針となる．(4) の右辺に現れる $f(b)$ と $f(a)$ は積分領域 (a,b) の境界 $\{b\},\{a\}$ における f の値であり，付随する符号 $+,-$ は $\mathbb{R}$ における順序から定まる (a,b) の自然な向きに関する外向き法線 $+1,-1$ を反映したものである．即ち，微分積分の基本定理は「向きづけられた領域における微分の積分は境界値で与えられる」事情を述べたものであり，ガウス・グリーンの定理やストークスの定理などベクトル解析の積分定理を貫く考え方を表すものである．この考え方は，微分可能多様体上で外微分によって微分形式に導かれるド・ラームコホモロジーと境界作用素によって特異鎖に導かれる特異ホモロジーとの**双対性** duality を記述するド・ラーム理論に一般化される.

微分法における**ライプニッツ則** Leibniz rule $(fg)' = f'g + fg'$ を (4) に適用すると，**部分積分**

の公式 integration by parts formula

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx \tag{5}$$
$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

が得られる．特に $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ の場合，(5) より

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)dx \tag{6}$$

を得る．等式 (6) は双対性による弱微分（超函数の微分と呼ばれることもある）の定義を通じてソボレフ空間論の基礎を成す．

5——求積法

与えられた微分方程式の解を積分を用いて具体的に表示する方法を**求積法** quadrature といい，ベルヌイ型，クレロー型，リッカチ型，完全型をはじめ，求積法が有効な微分方程式の例とその解法が古くから知られており，多くの入門書で解説されている．その際，有効な**変数変換** change of variables を見出すことが重要となる．

古典力学では，調和振動，ケプラー問題，独楽の運動の求積法を学ぶ．熱力学では熱の完全形式化に絶対温度の逆数が**積分因子** integrating factor として用いられ，エントロピー概念の導入の根拠となる．積分因子の存在を解空間に不変に作用する運動群の立場から説明する表現論と微分幾何にまたがる分野はリーに始まり，微分ガロア理論として一般化される一方，可積分系の研究として広がりを見せている．

6——線型微分方程式

線型微分作用素と非斉次項（外力項）から成る微分方程式を**線型微分方程式** linear differential equation といい，非斉次項が零のものを斉次線型微分方程式という．線型写像としての微分作用素の核（零空間）の基底を基本解という．

斉次線型微分方程式の解（斉次解）は核の元であるから，基本解の線型結合で表示される．非斉次の場合は，定数変化法（デュアメルの公式）によって解は斉次解とデュアメル項との和で表示される．定係数微分作用素は平面波（単色波）$e_\lambda : x \mapsto e_\lambda(x) := e^{\lambda x}$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ に多項式として作用するので，単項式を掛けた一次独立系による核の基底を取れば，基本解を求める問題は行列の問題に帰着される．従って，定係数線型微分方程式の問題は線型代数（特に固有値問題）に帰着される．

本質的に同じ発想をもつ解法として**演算子法** operational calculus が幾つか考案されているが，何れも電気工学者ヘビサイドの方法論に起源をもつ．演算子法は回路理論で頻繁に用いられる．平面波の考え方を未知函数の平面波展開（平面波の重ね合せ）に推し進めれば，こういった方法論はフーリエ変換，ラプラス変換，ラドン変換をはじめとする**積分変換** integral transformations を用いた定係数線型偏微分方程式の理論に一般化される．

7——保存量

微分方程式の解で表される（汎）函数で独立変数に依存しない定数値を取るものを**保存量** conserved quantity という．ポテンシャル力をもつニュートン運動方程式に対するエネルギーは典型的な例であり，方程式と速度ベクトルとの内積を時間微分の形に書き換えることにより自然に得られるものである．ラグランジュ力学では，ラグランジアンの時間積分としての作用積分の時間並進対称性の**ネーター原理** Noether’s principle による帰結として得られ，運動方程式に掛けた速度ベクトルは位置ベクトルの時間並進による生成作用素としての**乗法因子** multiplier として捉えられる．保存量は求積法に役立つこともある．方程式の導出に保存則の考え方が直接反映されることも多く，流体力学や電磁流体力学における質量，運動量，エネルギー密度の保存が典型的である．

8——力学系

位置と運動量の成す積空間としての**相空間** phase space においてニュートンの運動方程式は一階微分方程式系に書き換えられ，初期状態を指定すると，その初期値問題の解は一つの**軌道** orbit を成す．その軌道は加法群 $(\mathbb{R}, +)$ の**表現** representation となり，時間変数について群を成す．即ち，時間大域解の場合，初期状態 $(x(0), p(0))$ に対して時刻 t に於ける状態 $(x(t), p(t))$ を対応させる写像 $S(t) : (x(0), p(0)) \mapsto (x(t), p(t))$ は群の性質をもつ：$S(0) = \mathrm{id}$（恒等変換），$S(t+s) = S(t) \circ S(s)$ $(t, s \in \mathbb{R})$．このような写像の族 $(S(t); t \in \mathbb{R})$ をもつ系を**力学系** dynamical system といい，古典力学に限らずさまざまな微分方程式に応じた力学系や，原点を含む有界区間や半開区間 $[0, +\infty)$ 上の力学系が知られている．微分可能多様体のベクトル場の生成する力学系は指数写像や管状近傍といった概念の基礎となる．

9——解の存在

求積法で解ける微分方程式は微分方程式全体の中では少数である．しかし，具体的な解の表示が無くとも初期値問題や境界値問題など一定の条件の下では**解の存在**が証明されることが多い．

リプシッツ条件を満たす外力項をもつ一階微分方程式の局所解の存在と一意性を主張する基礎定理は大抵の入門書に載っている．ここで存在の証明では有界閉区間 $I = [0, T]$ 上の連続函数の成すベクトル空間 $C(I)$ の距離 $d(f, g) := \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in I\}$ に関する**完備性** completeness が本質的に用いられ，一意性の証明では**グロンウォールの論法** Grönwall's argument が効果的に用いられる．前節で紹介した解析や幾何で用いられる力学系の存在は，この基礎定理に全面的に拠るものである．リプシッツ条件を外し連続性のみを仮定した場合には，解の存在だけなら保障される（ペアノの定理）．その証明には $C(I)$ の相対点列コンパクト部分集合の特徴づけ（アスコリ・アルツェラの定理）が決定的な役割を果たす．

常微分方程式さらには非線型発展方程式の初期値問題の基礎定理の証明には，方程式を積分して積分方程式の形に転換し，積分方程式に現れる積分を解の属すべき函数空間の有界閉部分集合における写像として設定し，その不動点として解を位置づけることが出発点となる．非線型発展方程式が主要項を微分作用素とする半線型方程式の場合は対応する積分方程式は通常デュアメル型に設定する．その場合，微分作用素は適当な**バナハ空間** Banach space（ノルムが与えられたベクトル空間でノルムから導入された距離に関して完備となる集合）上で**一径数半群** one-parameter semigroup を成していることが必要である．その一般論は函数解析学でヒレ・吉田理論として学ぶ．不動点理論を基礎とする初期値問題の解法を支える最も基本的を概念は完備性である．

10——解の一意性

解の一意性とは，解の存在を仮定した場合に解は一つに限ることを意味する．通常，二つの解が存在すると仮定して両者が一致することを示すという論法が用いられる．どの解を取っても特定の形に表示に等式変形可能であることを示す論法も，その一つである．その意味で求積法は，解の存在を仮定してその具体的表示を特定の形で与えている訳であるから，意外にも一意性を示す方法論を呈示していることになる．解の存在を主張するためには，求積法により与えられた解の候補は（全て同値な等式変形による場合を除いて）解としての検証が必要である．一意性の議論では**単調性** monotonicity が役立つこともある．

［おざわ とおる］