高岡秀夫氏の業績

小澤　徹

2008 年度日本数学会賞春季賞は高岡秀夫氏に与えられた．同じ研究分野で働く者として大変喜ばしい事である．高岡秀夫氏は昨年度春季賞受賞者中西賢次氏と共に，分散型非線型偏微分方程式の研究で我が国を代表する若手研究者であり，世界的な研究動向に大きな影響を与える業績を挙げている．特に，James Colliander, Markus Keel, Gigliola Staffilani, Terence Tao との 1999 年頃からの共同研究によって得られた結果は，解析の分野における近年の最も大きな成果の一つであると言って良い[1]．以下その具体的内容を概説したい[2]．尚，最後の文献表は高岡氏の業績リストであり本文中の引用文献とは一致しない．高岡氏本人による論説をご覧戴きたい．

1993 年に Bourgain はフーリエ制限法と云う，非線型波動方程式や非線型分散型方程式を解析する新しい手法を開発した[3] [4]．これは，運動量空間 (フーリエ波数空間) において，非線型相互作用を直接評価すると云うものであり，非線型項の次数が低い場合は，従来の手法に比べ極めて精密な時間局所的評価式を与えてくれる．これにより，非常に広い（言い換えれば，弱い）函数空間における時間局所解の存在証明が可能となった．非線型偏微分方程式の解のクラスとしては，エネルギークラスなどの物理的に意味のある保存量に対応した函数空間を考えることが多い．しかし，解の時間大域的挙動を調べようとする場合，エネルギークラスでは狭すぎる事がしばしば起こる．例えば統計力学的な研究を行うため，不変測度の一つであるギブス測度を構成しようとすると，エネルギークラスが測度零になってしまうので，より広い函数空間で解を作る必要がある．[5] .Bourgain や，それに先行する Lebowitz-Rose-Speer の着想は，不変測度を保存量の代わりに用いることで，(エネルギークラスより広い) 殆ど全ての初期値について大域解を構成しようというものであった．また，KdV 方程式は，指数 $-1/2$ のソボレフ空間（粗く言って，$-1/2$ 階の導函数が 2 乗可積分となるような超函数の空間）に対応するシンプレクティック空間における無限次元ハミルトン系と見做すことができる．このような幾何学的な構造が入る函数空間で非線型発展方程式を考えることができれば，解の時間大域的な挙動がより精密に解析できると期待される．したがって，Bourgain 以後の大きな問題の一つは，運動量空間における解析方法において，どのようにすれば時間大域的評価式を得ることができるかと

[1] T.Tao は 2006 年 8 月にフィールズ賞を受賞したが，受賞理由の一つは非線型シュレディンガー方程式に関するこの共同研究であったことは記憶に新しい．

[2] 以下の内容は堤誉志雄先生のご教示による所が多い．

[3] 1994 年に，Bourgain がフィールズ賞を受賞したときの受賞理由の一つがこの研究業績である．

[4] 同じ 1993 年に全く独立に Klainerman と Machedon は同様の方法で相対論的非線型波動方程式やその相互作用系に対してエネルギークラスでの解の一意性を証明した．その経緯から現在この方法は，非線型分散型方程式の研究者からは Bourgain の方法，非線型双曲型方程式の研究者からは Klainerman-Machedon の方法と呼ばれている．本論説では分散型を扱うので慣例に従って Bourgain の方法と称する事にする．

[5] 空間一次元の場合，ギブス測度の台は指数 1/2 のソボレフ空間（粗く言って，1/2 階導函数が 2 乗可積分となるような函数の空間）より広い函数空間に載っている．これは，ブラウン運動の軌道の滑らかさに対応している

云うことであった．1998 年に Bourgain は，この問題に対しても部分的な解決法を提案した．しかし，適用できる方程式のクラスが狭く，非線型項が解の導函数に依存するような場合[6] には適用できなかった．この方向で大きな進展をもたらしたのが Colliander, Keel, Staffilani, 高岡, Tao による一連の共同研究であった．現在，この研究グループは I-team と呼ばれ，彼らが開発した運動量空間における時間大域的解析方法は I-method と呼ばれている．

さて，まず I-method とは何かについて，簡単に説明しておきたい．非線型発展方程式に対しては，非線型相互作用により，運動量空間において低周波から高周波への、あるいはその逆の高周波から低周波へのエネルギーの流れが引き起こされる．このエネルギーの流れが，解の大域的性質を決定するであろうと云う予想は，物理学者や数学者の間で古くからあった．例えば，コルモゴロフの乱流理論などは，その典型例である．このエネルギー流について，形式的な考察は数多くなされてきたが，数学的に厳密な議論や証明はほとんど無かったと言ってよい．I-method 以前に使われていた通常の議論は，非線型発展方程式が満たす保存則を用いて，間接的にエネルギーの流れを制御する方法と見做す事が出来る．しかしこの方法では，保存則が意味を持たないような弱いクラスの解に対しては，何の情報も得ることもできない．I-method は以下の二つの部分からなる．

（1）運動量空間における高周波切断による解の近似方法

（2）高周波と低周波の非線型相互作用の評価

1998 年に Bourgain は，非線型シュレディンガー方程式に対し (1)，(2) に対応した手法を提出した．この方法は，階段函数により高周波部分を切断するものであった．しかし，Bourgain の方法は，先駆的ではあったが，適用できる方程式が限られており，得られる解の評価式も最良のものではなかった．その理由は，運動量空間における高周波と低周波の相互作用を，ある種の平滑化作用によって制御していたためであった．それに対し，I-method では，滑らかに減衰する切断作用素をうまく取り，近似保存則を基礎に，高周波と低周波の相互作用を方程式の持つ構造（例えば，エネルギー保存則を保証する方程式の対称性など）を利用して評価するという手法を取っている．この方法は，高周波と低周波の相互作用を評価する際に，方程式の対称性から生じる特異性の相殺を考慮した手法であると言え，ここが Bourgain のように，低周波部分のみに保存則を適用する手法と決定的に異なる点である．従って，I-method を具体的な方程式に適用する場合，特異性の相殺を考慮しながら高周波と低周波の相互作用をいかに評価するのかと云うことが重要となる．

次に，I-method による解析から，何が得られたのかと云う点について述べたい．すでに述べたように，運動量空間におけるエネルギー流を時間大域的に評価する方法は，I-method 以前には，解が満たす保存則を用いるより他になかった．しかし，それは間接的な評価方法であり，非線型相互作用により何が起こっているのかについては推測の域を出なかった．これについて，数学的に厳密な情報を引き出す方法論を初めて提出したのが I-method である．その結果として，保存量が意味を持たないような広いクラスの弱解に対して大域的な解析が可能になった．さらに，エネルギークラスの解に対しても ソボレフ臨界指数の非線型項を持つシュレディンガー方程式の一意大域解の存在を証明することにも成功した．これは，非線型楕円型方程式で記述される山辺の問題のシュレディン

[6] 微分型非線型シュレディンガー方程式や KdV 方程式など

ガー版に相当する難問で，長い間未解決であった．非線型波動方程式に対しては 1990 年に，Grillakis によってこの問題は解かれたが，シュレディンガー方程式の場合，特異性を局所化するのが困難であったため未解決のまま残っていた．この研究で見出された相互作用モラベッツ評価は，方程式の対称性から見ても，解の大域的情報を新たに記述した点から見ても，極めて重要な研究対象である．

なお，I-method は完全可積分系でない非線型分散型方程式にも適用できるうえに，KdV 方程式のような完全可積分系に対し，逆散乱法からは証明できないような結果を得ることにも成功している．具体的には，シンプレクティック構造が入るような広い函数空間で KdV 方程式を考え，解の作る流れが Gromov の意味での non-squeezing property を持つことを証明した．この性質は，写像による像がつぶれない，あるいは写像によって写された集合の体積が保存されると云う性質の一般化である．この結果は非線型発展方程式に対しては，非線型相互作用により，運動量空間においてエネルギーが低周波から高周波へ流れるときの振舞いを規定する結果であると考えられている．

最後に，I-method の数学的な価値・意義について考えたい．もちろん，この方法だけで，形式的な議論あるいは物理的な考察から得られる重要な現象をまだ説明できていない，と云うのは事実である．しかし，その方面への研究の大きな第一歩であると言えよう．また，単に非線型分散型方程式を解析するという観点だけからではなく，古典的な調和解析と密接な関係があると云う点でも非常に興味深い．例えば，フーリエ波数を切断する手法は，フーリエ級数の総和法として古くから知られた手法である．総和法の窓函数（すなわち，切断作用素）を適切に選ぶことにより，ギブス現象を抑制できることはよく知られている．I-method はこのような古典的な調和解析の問題と密接な関係があり，今後フーリエ級数およびフーリエ変換の総和法に関する未解決問題に対しても新しい知見を与えるのではないかと予想される．さらに，個別の問題に I-method を適用する場合，(1) や (2) について，問題に応じた工夫が必要となる．そのための改良も重要であり，I-method で全ての問題が解決したという訳ではないが将来的に汎用性の高い方法論を提出したと言えるだろう．また，I-method は解の存在だけでなく，非線型散乱理論や定在波解の安定性・不安定性の問題にも広く適用されており，そのことが I-method の有効性をさらに高めている．

高岡氏は以下の文献表にあるように，I-team での研究以外にも数々の業績を挙げている．その中で一つ修正ベンジャミン・オノ方程式に関する Kenig[7] との共同研究について触れておきたい．(修正) ベンジャミン・オノ方程式は，非線型シュレディンガー方程式や KdV 方程式と共に非線型分散型方程式を代表する方程式であり，重要な研究対象であるが，文献は比較的少ない．これは，ベンジャミン・オノ方程式の非線型項の滑らかさが線型項の平滑化作用に比べて低い事に起因する困難の表れとも言える．高岡氏は Kenig との共同研究で，修正ベンジャミン・オノ方程式の初期値問題について指数 1/2 のソボレフ空間での大域適切性を証明した．この結果は現時点で最良のものである．指数 1/2 のソボレフ空間が最大であるかどうかは今後の課題である．

以上のように，高岡氏は非線型分散型方程式の大域理論の研究に大きく貢献した．非線型偏微分方程式と調和解析にまたがる幅広い領域における極めて深い一連の研究は日本数学会賞春季賞に誠に相応しいものである．

[7] Kenig は 2008 年に Bôcher 賞を受賞したが受賞業績の一つはベンジャミン・オノ方程式に関するものである．

謝辞　I-method に関して堤誉志雄先生から多くの事を学びました．また，査読の先生からは数々の重要なご指摘を戴きました。ここに御礼申し上げます.

参考文献

[1] H. Takaoka, Well-posedness for the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation with the derivative nonlinearity, Adv. Differential Equations **4** (1999), 561-580.

[2] H. Takaoka, Well-posedness for the Zakharov system with the periodic boundary condition, Differential Integral Equations **12** (1999), 789-810.

[3] J, Colliander, G. Staffilani and H. Takaoka, Global wellposedness for KdV below L^2, Math. Res. Lett. **6** (1999), 755-778.

[4] H. Takaoka, Global well-posedness for the Kadomtsev-Petviashvili II equation. Discrete Contin, Dynam. Systems **6** (2000), 483-499.

[5] H. Takaoka, Well-posedness for the higher order nonlinear Schrödinger equation, Adv. Math. Sci. Appl. **10** (2000), 149-171.

[6] H. Takaoka, Well-posedness for the Kadomtsev-Petviashvili II equation, Adv. Differential Equations **5** (2000), 1421-1443.

[7] H. Takaoka and N. Tzvetkov, On the local regularity of the Kadomtsev-Petviashvili-II equation, Internat. Math. Res. Notices 2001, **2**, 77-114.

[8] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Global well-posedness for KdV in Sobolev spaces of negative index. Electron., J. Differential Equations 2001, **26**, 7 pp.

[9] H. Takaoka and N. Tzvetkov, On 2D nonlinear Schrödinger equations with data on $\mathbf{R} \times \mathbf{T}$, J. Funct. Anal. **182** (2001), 427-442.

[10] H. Takaoka, Global well-posedness for Schrödinger equations with derivative in a nonlinear term and data in low-order Sobolev spaces, Electron. J. Differential Equations 2001, **42**, 23 pp.

[11] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Global well-posedness for Schrödinger equations with derivative, SIAM J. Math. Anal. **33** (2001), 649-669.

[12] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Almost conservation laws and global rough solutions to a nonlinear Schrödinger equation, Math. Res. Lett. **9** (2002), 659-682.

[13] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, A refined global well-posedness result for Schrödinger equations with derivative, SIAM J. Math. Anal. **34** (2002), 64-86.

[14] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Polynomial upper bounds for the orbital instability of the 1D cubic NLS below the energy norm, Discrete Contin. Dyn. Syst. **9** (2003), 31-54.

[15] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Polynomial upper bounds for the instability of the nonlinear Schrödinger equation below the energy norm, Commun. Pure Appl. Anal. **2** (2003), 33-50.

[16] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on $\mathbf{R}$ and $\mathbf{T}$, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 705-749.

[17] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Global existence and scattering for rough solutions of a nonlinear Schrödinger equation on $\mathbf{R}^3$, Comm. Pure Appl. Math. **57** (2004), 987-1014.

[18] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Multilinear estimates for periodic KdV equations, and applications, J. Funct. Anal. **211** (2004), 173-218.

[19] H. Takaoka and Y. Tsutsumi, Well-posedness of the Cauchy problem for the modified KdV equation with periodic boundary condition, Int. Math. Res. Not. 2004, **56**, 3009-3040.

[20] J. Colliander, M. Markus, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Symplectic non-squeezing of the Korteweg-de Vries flow, Acta Math. **195** (2005), 197-252.

[21] C.-E. Kenig and H. Takaoka, Global wellposedness of the modified Benjamin-Ono equation with initial data in $H^{1/2}$, Int. Math. Res. Not. 2006, Art. ID 95702, 44 pp.

[22] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, The energy-critical nonlinear Schrödinger equation in $\mathbf{R}^3$, Contemp. Math. **439** (2007), 69-80.

[23] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Global well-posedness and scattering for the energy-critical nonlinear Schrödinger equation in $\mathbf{R}^3$, Annals of Math. **167**, no.3, (2008).

[24] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Resonant decompositions and the I-method for cubic nonlinear Schrödinger on $\mathbf{R}^2$, Discrete Contin. Dyn. Syst. **21** (2008), 665-686.

会議録その他

[25] H. Takaoka, Time local well-posedness for the Zakharov system with the periodic boundary condition, Harmonic analysis and nonlinear partial differential equations (Kyoto, 1997), Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku No.1059 (1998), 74-88.

[26] H. Takaoka, Time local well-posedness for the KP II equation, Harmonic analysis and nonlinear partial differential equations (Kyoto, 1998), Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku No.1102 (1999), 1-8.

[27] H. Takaoka, On global well-posedness of some nonlinear dispersive equations for rough data, Harmonic analysis and nonlinear partial differential equations (Kyoto, 2000), Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku No.1201 (2001), 83-95.

[28] K. Nakanishi, H. Takaoka and Y. Tsutsumi, Counterexamples to bilinear estimates related with the KdV equation and the nonlinear Schrödinger equation. IMS Conference on Differential Equations from Mechanics (Hong Kong, 1999), Methods Appl. Anal. **8** (2001), 569-578.

[29] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Existence globale et diffusion pour l'équation de Schrödinger nonlinéaire répulsive cubique sur $\mathbf{R}^3$ en dessous l'espace d'énergie, Journées "Equations aux Derivees Partielles" (Forges-les-Eaux, 2002), Exp. No. X, 14 pp., Univ. Nantes, Nantes, 2002.

[30] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Notes on symplectic non-squeezing of the KdV flow, Journées "Équations aux Dérivées Partielles", Exp. No. XIV, 15 pp., École Polytech., Palaiseau, 2005.

[31] H. Takaoka, On the infinite dimensional approximation of solution for the KdV equation on the torus, Harmonic analysis and nonlinear partial differential equations (Kyoto, 2006), Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku No.1529 (2007), 110-122.

(20 年 5 月 22 日提出)
(おざわ とおる・北海道大学大学院理学研究院)