

コーシー・リーマン作用素の幾何学的特徴付け

令和8年8月

小澤 徹

<http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html>

平面上の滑らかな函数に作用するコーシー・リーマン作用素を平面内の等角アフィン変換の下での共変的変換則により特徴付けよう。

1 正則及び反正則微分作用素の共变的変換則

以下では実二次元ユークリッド空間を $\mathbb{R}^2$ と表し、その点を (x, y) または縦表示 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ で表す事にする。2次正方行列 I 及び J を夫々

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

と表し $\theta \in \mathbb{R}$ による回転行列 R_θ を

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

と定める。定義より $R_0 = I, R_{\pi/2} = J, R_\theta = (\cos \theta)I + (\sin \theta)J$ が従う。滑らかな函数 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対し $u := p_1 \circ f, v := p_2 \circ f$ と置く。ここに $p_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は第 j 成分への射影とする。従って f は $f = (u, v)$ 或いは縦表示では $f = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ と表される。

複素解析に於ける正則微分 $\partial/\partial z$ 及び反正則微分 $\partial/\partial \bar{z}$ に相当するものとして二つの偏微分作用素 ∂ 及び $\bar{\partial}$ を

$$\partial := \frac{1}{2}(I\partial_x - J\partial_y), \quad \bar{\partial} := \frac{1}{2}(I\partial_x + J\partial_y)$$

と定める。即ち

$$\begin{aligned} \partial f = \partial \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x u \\ \partial_x v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_y u \\ \partial_y v \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \partial_x u + \partial_y v \\ -\partial_y u + \partial_x v \end{bmatrix}, \\ \bar{\partial} f = \bar{\partial} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x u \\ \partial_x v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_y u \\ \partial_y v \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \partial_x u - \partial_y v \\ \partial_y u + \partial_x v \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここに $\partial_x = \partial/\partial x, \partial_y = \partial/\partial y$ とする。定義より

$$I\partial_x = \partial + \bar{\partial}, \quad J\partial_y = \bar{\partial} - \partial \quad (\Leftrightarrow I\partial_y = J(\partial - \bar{\partial}))$$

が従う。

ここで平面内の等角アフィン変換 $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ に就いて考える。与えられた等角アフィン変換 $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対し唯一組の $(r, R, (\xi, \eta)) \in (0, +\infty) \times O(2; \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ が存在し、任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対し

$$\varphi(x, y) = rR \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

が成立する。このとき φ による $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の引き戻しを $\varphi^*f := f \circ \varphi$ と定めると

$$(\varphi^*f)'(x, y) = f'(\varphi(x, y))\varphi'(x, y) = r(\varphi^*f')(x, y)R$$

即ち

$$\begin{bmatrix} \partial_x(\varphi^*u)(x, y) & \partial_y(\varphi^*u)(x, y) \\ \partial_x(\varphi^*v)(x, y) & \partial_y(\varphi^*v)(x, y) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} (\varphi^*\partial_x u)(x, y) & (\varphi^*\partial_y u)(x, y) \\ (\varphi^*\partial_x v)(x, y) & (\varphi^*\partial_y v)(x, y) \end{bmatrix} R$$

が任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対し成立する。 $R = R_\theta$ の場合

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \partial_x(\varphi^*u) & \partial_y(\varphi^*u) \\ \partial_x(\varphi^*v) & \partial_y(\varphi^*v) \end{bmatrix} &= r \begin{bmatrix} \varphi^*\partial_x u & \varphi^*\partial_y u \\ \varphi^*\partial_x v & \varphi^*\partial_y v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= r \begin{bmatrix} (\cos \theta)\varphi^*\partial_x u + (\sin \theta)\varphi^*\partial_y u & -(\sin \theta)\varphi^*\partial_x u + (\cos \theta)\varphi^*\partial_y u \\ (\cos \theta)\varphi^*\partial_x v + (\sin \theta)\varphi^*\partial_y v & -(\sin \theta)\varphi^*\partial_x v + (\cos \theta)\varphi^*\partial_y v \end{bmatrix} \end{aligned}$$

特に

$$\begin{aligned} \partial_x(\varphi^*f) &= r(\cos \theta)\varphi^*\partial_x f + r(\sin \theta)\varphi^*\partial_y f, \\ \partial_y(\varphi^*f) &= -r(\sin \theta)\varphi^*\partial_x f + r(\cos \theta)\varphi^*\partial_y f \end{aligned}$$

が成立する。これより

$$\begin{aligned} \partial(\varphi^*f) &= \frac{1}{2}(I\partial_x(\varphi^*f) - J\partial_y(\varphi^*f)) \\ &= \frac{r}{2}((\cos \theta)\varphi^*\partial_x f + (\sin \theta)\varphi^*\partial_y f) - \frac{r}{2}(-(\sin \theta)J\varphi^*\partial_x f + (\cos \theta)J\varphi^*\partial_y f) \\ &= \frac{r}{2}(\cos \theta)(\varphi^*\partial_x f - J\varphi^*\partial_y f) + \frac{r}{2}(\sin \theta)(J\varphi^*\partial_x f + \varphi^*\partial_y f) \\ &= r(\cos \theta)\varphi^*\left(\frac{1}{2}(I\partial_x - J\partial_y)f\right) + r(\sin \theta)J\varphi^*\left(\frac{1}{2}(I\partial_x - J\partial_y)f\right) \\ &= r((\cos \theta)I + (\sin \theta)J)\varphi^*\partial f \\ &= rR_\theta(\varphi^*\partial f), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\partial}(\varphi^*f) &= \frac{1}{2}(I\partial_x(\varphi^*f) + J\partial_y(\varphi^*f)) \\ &= \frac{r}{2}((\cos \theta)\varphi^*\partial_x f + (\sin \theta)\varphi^*\partial_y f) + \frac{r}{2}(-(\sin \theta)J\varphi^*\partial_x f + (\cos \theta)J\varphi^*\partial_y f) \\ &= \frac{r}{2}(\cos \theta)(\varphi^*\partial_x f + J\varphi^*\partial_y f) - \frac{r}{2}(\sin \theta)(J\varphi^*\partial_x f - \varphi^*\partial_y f) \\ &= r(\cos \theta)\varphi^*\left(\frac{1}{2}(I\partial_x + J\partial_y)f\right) - r(\sin \theta)J\varphi^*\left(\frac{1}{2}(I\partial_x + J\partial_y)f\right) \\ &= r((\cos \theta)I - (\sin \theta)J)\varphi^*\bar{\partial}f \\ &= rR_{-\theta}(\varphi^*\bar{\partial}f), \end{aligned}$$

が従う。回転行列 R_θ は引き戻し φ^* 及び微分作用素 $\partial, \bar{\partial}$ と可換なので上記変換則は纏めて

$$\begin{aligned} \partial(\varphi^* f) &= r R_\theta(\varphi^* \partial f) = r \varphi^*(R_\theta \partial f) = r \varphi^*(\partial R_\theta f), & (T)_\theta \\ \bar{\partial}(\varphi^* f) &= r R_{-\theta}(\varphi^* \bar{\partial} f) = r \varphi^*(R_{-\theta} \bar{\partial} f) = r \varphi^*(\bar{\partial} R_{-\theta} f) & (T)_{-\theta} \end{aligned}$$

と表される。ここに $r \in (0, +\infty), \theta \in \mathbb{R}, f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ は任意に取れる。

2 正則及び反正則微分作用素の幾何学的特徴付け

以下では次の形を持つ一階偏微分作用素を考える：

$$L = A\partial_x + B\partial_y + C$$

ここに $A, B, C \in C(\mathbb{R}^2; M(2; \mathbb{R}))$ とし、2次正方行列の成す実ベクトル空間 $M(2; \mathbb{R})$ の位相は $\mathbb{R}^4$ から導かれるものとする。そこで等角アフィン変換 $\varphi = \varphi_{(r, \theta, \xi, \eta)} := r R_\theta + \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$ に対し変換則 $(T)_{\pm\theta}$ に従う L の条件を与えよう。実際次の定理が成立する。

定理 1. A と J は可換であるとする。このとき次は同値である。

- (1) 任意の $r \in (0, +\infty), \theta \in \mathbb{R}, (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ に対し

$$L(\varphi^* f) = r R_\theta(\varphi^* Lf) = r \varphi^*(R_\theta Lf) = r \varphi^*(L R_\theta f)$$

- (2) $A, B \in M(2; \mathbb{R})$ (即ち定数行列), $C = 0$ であり、任意の $r \in (0, +\infty), \theta \in \mathbb{R}, (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ に対し

$$L(\varphi^* f) = r R_\theta(\varphi^* Lf) = r \varphi^*(R_\theta Lf) = r \varphi^*(L R_\theta f)$$

- (3) $A, B \in M(2; \mathbb{R})$ (即ち定数行列), $C = 0$ であり $B = -JA$

- (4) $A, B \in M(2; \mathbb{R})$ (即ち定数行列), $C = 0$ であり $L = 2A\partial$

定理 2. A と J は可換であるとする。このとき次は同値である。

- (1) 任意の $r \in (0, +\infty), \theta \in \mathbb{R}, (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ に対し

$$L(\varphi^* f) = r R_{-\theta}(\varphi^* Lf) = r \varphi^*(R_{-\theta} Lf) = r \varphi^*(L R_{-\theta} f)$$

- (2) $A, B \in M(2; \mathbb{R})$ (即ち定数行列), $C = 0$ であり、任意の $r \in (0, +\infty), \theta \in \mathbb{R}, (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ に対し

$$L(\varphi^* f) = r R_{-\theta}(\varphi^* Lf) = r \varphi^*(R_{-\theta} Lf) = r \varphi^*(L R_{-\theta} f)$$

- (3) $A, B \in M(2; \mathbb{R})$ (即ち定数行列), $C = 0$ であり $B = JA$

- (4) $A, B \in M(2; \mathbb{R})$ (即ち定数行列), $C = 0$ であり $L = 2A\bar{\partial}$

註 1. 定理 1 及び 2 の (4) $\Rightarrow$ (1) は前節の計算から従う。

註 2. A と J が非可換であるとき定理 1 は成立しない。実際 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とすれば $B = -JA$, $L = 2A\partial$ 故 (3)(4) は成立するが $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ なら $R_\theta A \neq AR_\theta$ 故 $f(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$ として (1) は成立しない。

註 3. A と J が非可換であるとき定理 2 は成立しない。実際 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とすれば $B = JA$, $L = 2A\bar{\partial}$ 故 (3)(4) は成立するが $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ なら $R_{-\theta} A \neq AR_{-\theta}$ 故 $f(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ として (1) は成立しない。

3 定理の証明

定理 1, 2 の証明のために先ず $(T)_{\pm\theta}$ を用いて $L(\varphi^* f)$ と $rR_{\pm\theta}(\varphi^* Lf)$ を計算しよう。

$$\begin{aligned} L(\varphi^* f) &= (A\partial_x + B\partial_y + C)(\varphi^* f) \\ &= (A(\partial + \bar{\partial}) + BJ(\partial - \bar{\partial}) + C)(\varphi^* f) \\ &= (A + BJ)\partial(\varphi^* f) + (A - BJ)\bar{\partial}(\varphi^* f) + C(\varphi^* f) \\ &= r(A + BJ)R_\theta(\varphi^* \partial f) + r(A - BJ)R_{-\theta}(\varphi^* \bar{\partial} f) + C(\varphi^* f), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} rR_{\pm\theta}(\varphi^* Lf) &= rR_{\pm\theta}(\varphi^*(A\partial_x f + B\partial_y f + Cf)) \\ &= rR_{\pm\theta}(\varphi^*(A(\partial + \bar{\partial})f + BJ(\partial - \bar{\partial})f + Cf)) \\ &= rR_{\pm\theta}(\varphi^*((A + BJ)\partial f + (A - BJ)\bar{\partial} f + Cf)) \\ &= rR_{\pm\theta}((\varphi^* A + \varphi^* BJ)\varphi^* \partial f + (\varphi^* A - \varphi^* BJ)\varphi^* \bar{\partial} f + (\varphi^* C)\varphi^* f) \\ &= rR_{\pm\theta}(\varphi^* A + \varphi^* BJ)(\varphi^* \partial f) \\ &\quad + rR_{\pm\theta}(\varphi^* A - \varphi^* BJ)(\varphi^* \bar{\partial} f) + rR_{\pm\theta}(\varphi^* C)(\varphi^* f) \end{aligned} \quad (2)_{\pm}$$

このとき次の命題が成立する。

命題 1. 次は同値である。

(1) 任意の $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ に対し

$$L(\varphi^* f) = \varphi^* Lf$$

ここに φ はその定義に於いて $r = 1$, $R = I$ としたものとする。

(2) $A, B, C \in M(2; \mathbb{R})$

命題 2. 次は同値である。

- (1) 任意の $r \in (0, +\infty)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ に対し

$$L(\varphi^* f) = r\varphi^* Lf$$

ここに φ はその定義に於いて $R = I$, $(\xi, \eta) = (0, 0)$ としたものである。

- (2) $C = 0$

命題 3. $A, B \in M(2; \mathbb{R})$, $C = 0$ であり A と J は可換であるとする。このとき次は同値である。

- (1) 任意の $\theta \in \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ に対し

$$L(\varphi^* f) = R_\theta(\varphi^* Lf)$$

ここに φ はその定義に於いて $r = 1$, $R = R_\theta$, $(\xi, \eta) = (0, 0)$ としたものである。

- (2) $B = -JA$

- (3) $L = 2A\partial$

命題 4.

- (1) 任意の $\theta \in \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ に対し

$$L(\varphi^* f) = R_{-\theta}(\varphi^* Lf)$$

ここに φ はその定義に於いて $r = 1$, $R = R_\theta$, $(\xi, \eta) = (0, 0)$ としたものである。

- (2) $B = JA$

- (3) $L = 2A\bar{\partial}$

定理 1 は命題 1, 2, 3 から従い、定理 2 は命題 1, 2, 4 から従う。そこで命題 1, 2, 3, 4 を順に証明して行こう。

命題 1 の証明 (1) $\Rightarrow$ (2) を示せば充分である。 $f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 及び $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とすると $r = 1$, $R = I$ とした仮定 (1) は条件 (1) = (2) $_{\pm}$ を用いて

$$C(x, y) = C(x + \xi, y + \eta)$$

と表される。特に $(x, y) = (0, 0)$ として

$$C(0, 0) = C(\xi, \eta)$$

が成立する。 (ξ, η) は任意故 C は定数行列となる。次に

- $f(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とすると $\partial f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{\partial} f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ であるから $(1) = (2)_{\pm}$ より

$$(A + BJ) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (\varphi^* A + \varphi^* BJ) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $f(x, y) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$ とすると $\partial f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\bar{\partial} f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ であるから $(1) = (2)_{\pm}$ より

$$(A + BJ) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (\varphi^* A + \varphi^* BJ) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $f(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ とすると $\partial f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{\partial} f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ であるから $(1) = (2)_{\pm}$ より

$$(A - BJ) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (\varphi^* A - \varphi^* BJ) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $f(x, y) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ とすると $\partial f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{\partial} f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ であるから $(1) = (2)_{\pm}$ より

$$(A - BJ) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (\varphi^* A - \varphi^* BJ) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の4つの等式が従う。これより

$$A + BJ = \varphi^* A + \varphi^* BJ$$

$$A - BJ = \varphi^* A - \varphi^* BJ$$

更に

$$A = \varphi^* A, \quad B = \varphi^* B$$

が従う。これより A 及び B は定数行列となる。

命題2の証明 $(1) \Rightarrow (2)$ を示せば充分である。 $f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 及び $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とすると $r \neq 1$, $R = I$, $(\xi, \eta) = (0, 0)$ とした仮定 (1) は条件 $(1) = (2)_{\pm}$ を用いて

$$C(x, y) = rC(x, y)$$

と表される。これより $C(x, y) = 0$ が従う。

命題3の証明 $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ を示せば充分である。

(1) $\Rightarrow$ (2) : $A, B \in M(2; \mathbb{R})$ より $\varphi^* A = A$, $\varphi^* B = B$ となり $C = 0$ であるから $r = 1$, $R = R_\theta$, $(\xi, \eta) = (0, 0)$ とした仮定 (1) は条件 (1) = (2) $_+$ を用いて

$$\begin{aligned} & (A + BJ)R_\theta(R_\theta^* \partial f) + (A - BJ)R_{-\theta}(R_\theta^* \bar{\partial} f) \\ &= R_\theta(A + BJ)(R_\theta^* \partial f) + R_\theta(A - BJ)(R_\theta^* \bar{\partial} f) \end{aligned}$$

と表される。この等式は

$$\bullet f(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ とすると } \partial f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\partial} f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ より}$$

$$(A + BJ)R_\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = R_\theta(A + BJ) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet f(x, y) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \text{ とすると } \partial f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{\partial} f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ より}$$

$$(A + BJ)R_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = R_\theta(A + BJ) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet f(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \text{ とすると } \partial f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\partial} f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ より}$$

$$(A - BJ)R_{-\theta} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = R_\theta(A - BJ) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet f(x, y) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \text{ とすると } \partial f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\partial} f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ より}$$

$$(A - BJ)R_{-\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = R_\theta(A - BJ) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の形を取る。これより

$$\begin{aligned} (A + BJ)R_\theta &= R_\theta(A + BJ) \\ (A - BJ)R_{-\theta} &= R_\theta(A - BJ) \end{aligned}$$

が従う。両辺のそれぞれ和と差を取って

$$\begin{aligned} A(R_\theta + R_{-\theta}) + BJ(R_\theta - R_{-\theta}) &= 2R_\theta A \\ A(R_\theta - R_{-\theta}) + BJ(R_\theta + R_{-\theta}) &= 2R_\theta BJ \end{aligned}$$

を得る。第一式の両辺を θ で微分し $\theta = 0$ とすると

$$A(J - J) + BJ(J + J) = 2JA \Leftrightarrow -B = JA \Leftrightarrow A = JB$$

第二式の両辺を θ で微分し $\theta = 0$ とすると

$$A(J + J) + BJ(J - J) = 2JB \Leftrightarrow A = JB \Leftrightarrow B = -JA$$

即ち (2) を得る。

(2) $\Rightarrow$ (3) : (2) より $L = A\partial_x + B\partial_y = A\partial_x - JA\partial_y$ を得る。ここで $AJ = JA$ を用いると $L = A\partial_x - AJ\partial_y = A(I\partial_x - J\partial_y) = 2A\partial$ となり (3) が従う。

命題 4 の証明 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) を示せば充分である。

(1) $\Rightarrow$ (2) : $A, B \in M(2; \mathbb{R})$ より $\varphi^*A = A$, $\varphi^*B = B$ となり $C = 0$ であるから $r = 1$, $R = R_\theta$, $(\xi, \eta) = (0, 0)$ とした仮定 (1) は条件 (1) = (2)₋ を用いて

$$\begin{aligned} & (A + BJ)R_\theta(R_\theta^*\partial f) + (A - BJ)R_{-\theta}(R_\theta^*\bar{\partial}f) \\ &= R_{-\theta}(A + BJ)(R_\theta^*\partial f) + R_{-\theta}(A - BJ)(R_\theta^*\bar{\partial}f) \end{aligned}$$

と表される。この等式は

$$\bullet f(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ とすると } \partial f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\partial} f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ より}$$

$$(A + BJ)R_\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = R_{-\theta}(A + BJ) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet f(x, y) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \text{ とすると } \partial f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{\partial} f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ より}$$

$$(A + BJ)R_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = R_{-\theta}(A + BJ) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet f(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \text{ とすると } \partial f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\partial} f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ より}$$

$$(A - BJ)R_{-\theta} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = R_{-\theta}(A - BJ) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet f(x, y) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \text{ とすると } \partial f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\partial} f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ より}$$

$$(A - BJ)R_{-\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = R_{-\theta}(A - BJ) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の形を取る。これより

$$(A + BJ)R_\theta = R_{-\theta}(A + BJ)$$

$$(A - BJ)R_{-\theta} = R_{-\theta}(A - BJ)$$

が従う。両辺のそれぞれ和と差を取って

$$\begin{aligned}A(R_\theta + R_{-\theta}) + BJ(R_\theta - R_{-\theta}) &= 2R_{-\theta}A \\A(R_\theta - R_{-\theta}) + BJ(R_\theta + R_{-\theta}) &= 2R_{-\theta}BJ\end{aligned}$$

を得る。第一式の両辺を θ で微分し $\theta = 0$ とすると

$$A(J - J) + BJ(J + J) = -2JA \Leftrightarrow -B = JA \Leftrightarrow A = -JB$$

第二式の両辺を θ で微分し $\theta = 0$ とすると

$$A(J + J) + BJ(J - J) = -2JB \Leftrightarrow A = -JB \Leftrightarrow B = JA$$

即ち (2) を得る。

(2) $\Rightarrow$ (3) : (2) より $L = A\partial_x + B\partial_y = A\partial_x - JA\partial_y$ を得る。ここで $AJ = JA$ を用いると $L = A\partial_x + AJ\partial_y = A(I\partial_x + J\partial_y) = 2A\bar{\partial}$ となり (3) が従う。

参考文献：

小澤 徹，等長変換と等角アフィン変換

https://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/pdf/affine_transformations.pdf