ベクトル空間の力学的解釈

平成 23 年 5 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html
"Yes, it pays to belong," The Blow Monkeys

1. ベクトルは何か

高等学校の数学では、ベクトルとは「大きさと方向を持つ有向線分」であり「始点と終点がそれぞれ同一の平行移動で一致するような有向線分は同じベクトルと見做す」ものと定義される。しかし、「同じと見做す」妥当性の根拠や「方向」の定義を明確にしない限り、この定義は意味を成さない。大学の線型代数学では、n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の元として n 次元数ベクトルが定義される。この定義は明確な意味を持つが、こうすると「始点」は常に原点となってしまう。また $\mathbb{R}^n$ の原点は唯一つしかなく、平行移動の概念が（そのままでは）入らないので、古典力学を論ずるには余りにも不便である。ベクトルを「直交変換による座標系の変換に対して共変的に変換される（単一添字をもった）量」とする考え方もある。この方式に拠れば「直交変換による座標系の変換に対し、不変量がスカラーであり、共変的に変換される（複数添字をもった）量がテンソル」と云う事になる。物理では馴染み深い捉え方である。しかし、この方式では、スカラーかベクトルかテンソルかは「いちいち変換してみないと量の特性が判断出来ない」事になってしまう。また添字集合の個数が、対象とする空間の次元に相当するが、この方式では「無限次元のベクトル」に到達するには無理があり、量子力学的状態を記述するには不便である。そこで、「ベクトル」として認識された初期の例、即ち速度 velocity, 加速度 acceleration, 力 force の基本的性質に立ち戻って考えてみよう。これらには次の共通の性質が見られる：

(i) 合成と分解を考える事が出来る

(ii) 同じ方向（または反対方向）への働きを強めたり弱めたりしたものを考える事が出来る。

上の性質 (i) はベクトルの算法として和 addition が定義されている事が前提であり、性質 (ii) はベクトルのスカラー倍 scalar multiplication が定義されている事が前提である。この二つの算法に注目し公理化したものがベクトル空間の定義である。

2. ベクトル空間の定義

定義　集合 V が体 $\mathbb{K}$(実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$) 上のベクトル空間であるとは

ベクトルの和　$V \times V \ni (x, y) \mapsto x + y \in V$

ベクトルのスカラー倍　$\mathbb{K} \times V \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x \in V$

が次の (1)-(8) を満たす様に定義されている事を謂う：

(1) 任意の $x, y \in V$ に対し　$x + y = y + x$

(2) 任意の $x, y, z \in V$ に対し　$(x + y) + z = x + (y + z)$

(3) 任意の $x \in V$ に対し　$x + 0 = x$ を満たす元 $0 \in V$ が存在する。

(4) 任意の $x \in V$ に対し　$x + y = 0$ を満たす $y \in V$ が存在する。

(5) 任意の $\lambda \in \mathbb{K}$ 及び任意の $x, y \in V$ に対し　$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

(6) 任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ 及び任意の $x \in V$ に対し　$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

(7) 任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ 及び任意の $x \in V$ に対し　$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

(8) 任意の $x \in V$ に対し　$1x = x$

定義　ベクトル空間の元をベクトルと謂う。

以上が現在世界共通に用いられているベクトル空間の定義である。この公理論的体系の原型を初めて与えたのはペアノ (Giuseppe Peano, 1858-1932) で 1888 年の事である。上の定義を成す性質 (1)-(8) は次の様に言い表す事が出来る：

(1) (和の可換則) ベクトルの和の算法は可換 commutative である。

(2) (和の結合則) ベクトルの和の算法は結合的 associative である。

(3) (零元の存在) ベクトルの和の算法に関する零元 zero element が存在する。

(4) (和に関する逆元の存在) ベクトルの和の算法に関する逆元 inverse element が存在する。

(5) (分配則) ベクトルの和に関してスカラー倍は分配的 distributive である。

(6) (分配則) 一つのベクトルに対するスカラー倍の和は分配的である。

(7) (スカラー倍の結合則) 一つのベクトルに対するスカラー倍は結合的である。

(8) (1 の作用) 1 によるスカラー倍は恒等写像として作用する。

これらの性質の下で零元と逆元の一意性が従う。

零元の一意性　(3) を満たす元がもう一つ在るとし、それを $0'$ と表す。(3) を $x = 0' \in V$ に対して適用すると $0' + 0 = 0'$ となる。一方 $0'$ は零元だから任意の $x \in V$ に対し $x + 0' = x$ を満たす。特に $x = 0 \in V$ に適用すると $0 + 0' = 0$ が従う。以上 $0' + 0 = 0'$ 及び $0 + 0' = 0$ 更に (1) の可換則を用いて $0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$ を得る。

逆元の一意性　任意に $x \in V$ を取る。$x+y=x+y'=0$ なる $y, y' \in V$ が在ったとすると

$$
\begin{aligned}
y &= y+0 && \text{(零元の性質)} \\
&= y+(x+y') && \text{($x+y'=0$ の仮定)} \\
&= (y+x)+y' && \text{(和に関する結合則)} \\
&= (x+y)+y' && \text{(和に関する可換則)} \\
&= 0+y' && \text{($x+y=0$ の仮定)} \\
&= y' && \text{(零元の性質)}
\end{aligned}
$$

となり、逆元の一意性が従う。

$x \in V$ に対する逆元を $-x$ と表す。また $x+(-y)$ を $x-y$ と表す。

3. ベクトル空間の力学的理解

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ として、前節で与えられたベクトル空間の定義をニュートン力学的に解釈してみよう。即ち、力はベクトル (=ベクトル空間の元) と見做し、定義にある性質 (1)-(8) をニュートン力学的に捉え直してみよう。

先ず「ベクトルの和が定義出来る」とは「力は合成出来る」と云う事であり、「ベクトルのスカラー倍が定義出来る」とは「力は同一（または反対）方向に強弱を付ける事が出来る」と云う事である。ここで同一方向の強弱とは $\lambda > 0$ を掛ける事であり反対方向の強弱とは $\lambda < 0$ を掛ける事と理解される。これらの理解の下で、性質 (1)-(8) は次の様に解釈される：

(1) (和の可換則) 二つの力の合成は、順序に依存しない

(2) (和の結合則) 三つの力の合成は、順序や組合せに依存しない

(3) (零元の存在) 作用点の存在及び作用点に於いて力の働いていない状態の存在

(4) (和に関する逆元の存在) 反作用の存在 (作用 · 反作用の法則)

(5) (分配則) 力の合成に関する強弱の分配則 (合成された力のスカラー倍は、スカラー倍された力の合成に等しい)

(6) (分配則) 同一の力に対する強弱の和の分配則（一つの力に対して二つのスカラーの和をスカラー倍にした力は、夫々スカラー倍した力の合成に等しい)

(7) (スカラー倍の結合則) 同一の力に対する強弱の積の結合則 (一つの力に対して二つのスカラーの積をスカラー倍した力は、スカラー倍を繰り返した力に等しい)

(8) (1 の作用) 力の 1 倍は元の力に等しい

4. 配位空間と作用点と力

力をベクトル空間の元と見做す方法は前節に説明した通りであるが、「始点」は常に原点（唯一の零元）を起点とする事になってしまい、不自然である。そこで、ニュートン力学に於ける**配位空間** configuration space X とは実ベクトル空間 V を基準とする**アフィン空間**と定義する。アフィン空間の導入によって初めて「有向線分」の概念が明確に定義される。各点 $p \in X$ に対しその接ベクトル空間 tangent space $T_pX = V_p = \{(p, v); v \in V\}$ に和とスカラー倍が

$$
\begin{aligned}
&(p, u) + (p, v) = (p, u + v) \qquad && (p, u), (p, v) \in T_pX \\
&\lambda(p, u) = (p, \lambda u) && \lambda \in \mathbb{R}, (p, u) \in T_pX
\end{aligned}
$$

で定まる。点 p を作用点とする力は T_pX の元であると理解すれば、力の起点は点 p であると云う事情を記述する事が出来る。その場合、前節の (3) は「接ベクトル空間 T_pX の原点 $(p, 0)$ としての作用点の存在」及び「作用点 p に於いて力の働いていない状態 $(p, 0)$ の存在」と言い換えられる。さてベクトル場 vector field としての力の場（但し簡単の為ここでは速度には依存しない力を考える）とは各 $p \in X$ に対し $F(p) \in T_pX$ を一つ対応させるものであるから、写像 $F : X \to TX = \bigcup_{p \in X} T_pX$ で $F(p) \in T_pX$ を満たすものである。$TX = X \times V$ を X の接バンドル tangent bundle とし $\pi : TX = X \times V \ni (p, v) \mapsto p \in X$ を自然な射影とすれば、力の場とは写像 $F : X \to TX$ で $\pi \circ F = id$ を満たすもの、即ち X の接バンドル TX の切断面 cross section と捉える事が出来る。

参考文献： M. Giaquinta and G. Modica, Mathematical Analysis, Linear and Metric Structures and Continuity, Birkhäuser
佐武一郎, 線型代数学, 裳華房
小澤徹, アフィン空間, http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/pdf/a.pdf